改・数学①第１回小テスト　数と式①【解答解説】

BASIC問題篇

1 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+11x+12$　　(2) $6x^2-7xy-3y^2$

2 次の２次方程式を解け。

(1) $x^2+4x+1=0$　　(2) $3x^2-9x+5=0$

3 次の１次不等式を解け。　$\dfrac{x}{5}-\dfrac{x-5}{4}<2$

4 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|2x-3|=11$　　(2) $|3x+4|\leqq 7$

5 次の式を簡単にせよ。$\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$

6 $x=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$　　(2) xy

(3) x^2+y^2　　(4) x^3+y^3

7 次の式の２重根号をはずせ。

(1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　　(2) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

STANDARD問題篇

8 $2x^2+5xy-3y^2+x+17y-10$ を因数分解せよ。

9 次の方程式を解け。

(1) $|x-1|=2x$　　(2) $|x|+2|x-2|=5$

10 $||x-2|-3|=2$ を解け。

11 $\dfrac{10}{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ。

12 和が２で，２乗の和が $2\sqrt{3}$ であるような２つの数について，それらの３乗の和，５乗の和を求めよ。

実戦問題篇

13 $2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものは $^{エ}\boxed{}$ である。

14 相異なる実数 α，β が $\begin{cases}\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6}\\ \beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6}\end{cases}$ を満たすとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

15 $|x-2|+|x+3|<6$ を解け。

改・数学①第１回小テスト　数と式①【解答解説】

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$(x+4)(2x+3)$　　(2)　$(2x-3y)(3x+y)$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$x=-2\pm\sqrt{3}$　　(2)　$x=\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{6}$

$\boxed{3}$ 解答　$x>-15$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$x=-4$，7　　(2)　$-\dfrac{11}{3}\leqq x\leqq 1$

$\boxed{5}$ 解答　$\sqrt{5}-3\sqrt{3}-2$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　-2　　(2)　-1　　(3)　6　　(4)　-14

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{8}$ 解答　$(2x-y+5)(x+3y-2)$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　$x=\dfrac{1}{3}$　　(2)　$x=-\dfrac{1}{3}$，3

$\boxed{10}$ 解答　$x=-3$，1，3，7

$\boxed{11}$ 解答　$5+\sqrt{5}+\sqrt{30}$

$\boxed{12}$ 解答　順に，$6\sqrt{3}-4$，22

$\boxed{13}$ 解答　73

$\boxed{14}$ 解答　順に，$\sqrt{3}$，$3-\sqrt{6}$，$1+\sqrt{6}$

$\boxed{15}$ 解答　$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

$\boxed{1}$ (1)　$2x^2+11x+12=1\cdot 2x^2+(1\cdot 3+4\cdot 2)x+4\cdot 3$

$$=(x+4)(2x+3)$$

(2)　$6x^2-7xy-3y^2$

$$=2\cdot 3x^2+\{2\cdot y+(-3y)\cdot 3\}x+(-3y)\cdot y$$

$$=\{2x+(-3y)\}(3x+y)$$

$$=(2x-3y)(3x+y)$$

[たすきがけ]

(1)
$$\begin{array}{ccc}
1 & 4 & \to 8 \\
2 & 3 & \to 3 \\ \hline
2 & 12 & 11
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc}
2 & -3y & \to -9y \\
3 & y & \to 2y \\ \hline
6 & -3y^2 & -7y
\end{array}$$

$\boxed{2}$ (1)　$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$$=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$=-2\pm\sqrt{3}$$

(2)　$x=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}$

$=\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{6}$

$\boxed{3}$　$\dfrac{x}{5}-\dfrac{x-5}{4}<2$

両辺に 20 をかけると　$20\cdot\dfrac{x}{5}-20\cdot\dfrac{x-5}{4}<20\cdot2$

$4x-5(x-5)<40$

$4x-5x+25<40$

移項すると　$-x<40-25$

よって　$-x<15$

両辺に -1 をかけると　$x>-15$

$\boxed{4}$ (1)　与式より　$2x-3=\pm11$

$2x-3=11$ より　$2x=14$　よって　$x=7$

$2x-3=-11$ より　$2x=-8$　よって　$x=-4$

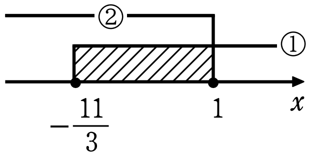
ゆえに　$x=-4,\ 7$

(2)　与式より　$-7\leqq3x+4\leqq7$

$-7\leqq3x+4$ より　$-11\leqq3x$　よって　$x\geqq-\dfrac{11}{3}$　…… ①

$3x+4\leqq7$ より　$3x\leqq3$　よって　$x\leqq1$　…… ②

①，② の共通範囲を求めると　$-\dfrac{11}{3}\leqq x\leqq1$



$\boxed{別解}$　与式より　$-7\leqq3x+4\leqq7$

各辺から 4 を引くと　$-11\leqq3x\leqq3$

各辺を 3 で割ると　$-\dfrac{11}{3}\leqq x\leqq1$

$\boxed{5}$ (与式)$=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}-\dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}-\dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)=\sqrt{5}-3\sqrt{3}-2$

$\boxed{6}$ (1)　$x+y=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dfrac{2}{1-2}=-2$

(2)　$xy=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{1-2}=-1$

(3)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

(1)，(2) より　$x^2+y^2=(-2)^2-2\cdot(-1)=6$

(4)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(1)，(2) より　$x^3+y^3=(-2)^3-3\cdot(-1)\cdot(-2)=-14$

$\boxed{別解}$　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(1)，(2)，(3) より　　$x^3+y^3=-2\{6-(-1)\}=-14$

$\boxed{7}$ (1)　$\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot 2}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(2)　$\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\cdot 3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{8}$ $2x^2+5xy-3y^2+x+17y-10=2x^2+(5y+1)x-(3y^2-17y+10)$

$=2x^2+(5y+1)x-(3y-2)(y-5)$

$=\{2x-(y-5)\}\{x+(3y-2)\}$

$=(2x-y+5)(x+3y-2)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup\quad -(y-5) & \longrightarrow & -y+5 \\ 1 & 3y-2 & \longrightarrow & 6y-4 \\ \hline 2 & & & 5y+1 \end{array}$$

$\boxed{9}$ (1)　[1]　$x-1\geqq 0$　すなわち　$x\geqq 1$ のとき

$|x-1|=x-1$ であるから　$x-1=2x$

これを解くと　　$x=-1$

これは $x\geqq 1$ を満たさない。

[2]　$x-1<0$　すなわち　$x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$ であるから　$-(x-1)=2x$

これを解くと　　$x=\dfrac{1}{3}$

これは $x<1$ を満たす。

以上から，解は　　$x=\dfrac{1}{3}$

(2)　[1]　$x<0$ のとき

$|x|=-x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから　$-x-2(x-2)=5$

これを解くと　　$x=-\dfrac{1}{3}$

これは $x<0$ を満たす。

[2]　$0\leqq x<2$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから　　$x-2(x-2)=5$

これを解くと　　$x=-1$

これは $0 \leqq x < 2$ を満たさない。

[3]　$x \geqq 2$ のとき

$|x| = x$，$|x-2| = x-2$ であるから　　$x + 2(x-2) = 5$

これを解くと　　$x = 3$

これは $x \geqq 2$ を満たす。

以上から，解は　　$x = -\dfrac{1}{3}$，3

10　$||x-2|-3| = 2$ から　　$|x-2|-3 = \pm 2$　　よって　　$|x-2| = 5$，1

$|x-2| = 5$ から　　$x-2 = \pm 5$　　ゆえに　　$x = 7$，-3

$|x-2| = 1$ から　　$x-2 = \pm 1$　　ゆえに　　$x = 3$，1

以上から，求める解は　　$x = -3$，1，3，7

11　$$(\text{与式}) = \frac{10(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})} = \frac{10(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}(1+\sqrt{5}+\sqrt{6}) = 5 + \sqrt{5} + \sqrt{30}$$

12　条件を満たす 2 つの数を x，y とすると　$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=2\sqrt{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　　$(x+y)^2 - 2xy = 2\sqrt{3}$

① を代入して　　$2^2 - 2xy = 2\sqrt{3}$　　よって　　$xy = 2-\sqrt{3}$

このとき　　$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = 2\{2\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\} = 6\sqrt{3}-4$

また　　$x^5+y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) = 2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4) - (2-\sqrt{3})^2 \cdot 2$

$$= 36 - 8\sqrt{3} - 14 + 8\sqrt{3} = 22$$

13　$a^{18}-b^{18} = (a^9)^2 - (b^9)^2 = (a^9+b^9)({}^{ア}a^9 - b^9) = \{(a^3)^3+(b^3)^3\}\{(a^3)^3-(b^3)^3\}$

$$= (a^3+b^3)({}^{イ}a^6 - a^3b^3 + b^6)({}^{ウ}a^3 - b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)$$

この式で $a=2$，$b=1$ とおくと

$$2^{18}-1 = (8+1)(64-8+1)(8-1)(64+8+1) = 9 \times 57 \times 7 \times 73 = 3^3 \times 7 \times 19 \times 73$$

よって，$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものは ${}^{エ}73$ である。

14　$\alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6}$　$\cdots\cdots$ ①

$\beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6}$　$\cdots\cdots$ ②

①－② より　　$\alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{3}(\alpha-\beta) = 0$

整理すると　　$(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta) - \sqrt{3}\} = 0$

$\alpha \neq \beta$ から　　$\alpha+\beta-\sqrt{3} = 0$

したがって　　$\alpha+\beta = \sqrt{3}$

①＋② より　　$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta) = 2\sqrt{6}$

よって　　$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{3}(\alpha+\beta) = 2\sqrt{6}$

ゆえに　$(\sqrt{3})^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

したがって　$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

$\alpha+\beta=\sqrt{3}$，$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$ から

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\sqrt{3})^2-2(3-\sqrt{6})}{3-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}-3}{3-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{3+3\sqrt{6}}{9-6}=1+\sqrt{6}$$

15 [1]　$x-2\geqq 0$ かつ $x+3\geqq 0$ すなわち $x\geqq 2$ のとき

$x-2+x+3<6$　　これを解くと　$x<\frac{5}{2}$

$x\geqq 2$ より　$2\leqq x<\frac{5}{2}$

[2]　$x-2<0$ かつ $x+3\geqq 0$ すなわち $-3\leqq x<2$ のとき

$-(x-2)+x+3<6$　　すなわち　$5<6$

よって，$-3\leqq x<2$ は不等式の解である。

[3]　$x-2<0$ かつ $x+3<0$ すなわち $x<-3$ のとき

$-(x-2)-(x+3)<6$　　すなわち　$x>-\frac{7}{2}$

$x<-3$ より　$-\frac{7}{2}<x<-3$

[1] ～ [3] から，求める解は　$-\frac{7}{2}<x<\frac{5}{2}$