

談話室マロニエ 数学 QUIZ 場合の数

A 問題

道具

$n!$, ${}_nC_k$

① $n! = \boxed{*}$ 。並べる道具

② ${}_nC_k = \boxed{*}$ 。選ぶ道具

③ ${}_nP_k = \boxed{*}$

道具の運用

- ・ 流れ作業はかけざん
- ・ 場合分けはたしざん
- ・ 場合分けがメンドウなとき、(～でないとき)を考えて全体からひきざん
- ・ 区別のできない同じものを数えるときは、その個数の階乗でわりざん。

※ 場合わけでは、モレ・ダブリが発生しないように注意することが大切。

運用の例

～ 公式化しているもの

- 1 円順列 $\Rightarrow$ 固定がポイント
- 2 ネックレス順列 $\Rightarrow$ 円順列 $\div 2$
- 3 重複順列 $\Rightarrow$ 流れ作業＝かけざん がわかっていれば公式不要
- 4 重複組み合わせ

異なる n 種類のものから、重複を許して k 個選ぶ選び方は、 ${}_nH_k$ 通り

これは、 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

$$0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq k$$

を満たす整数解 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の組の総数に他ならない。

○を k 個、| を $(n-1)$ 個、一列に並べると考えると、

$${}_nH_k = \frac{\{k + (n-1)\}!}{k! \cdot (n-1)!}$$

辞書式配列 $\Rightarrow$ 数字に対応させて小さい順に並べる

登場人物の整理

スコアカードに記録

ありうる状態の列挙 (漸化式へ)

積が○の倍数＝素因数に着目

和が○の倍数＝あまりで分類

特殊な場合の数の求め方のチェックシート

- 隣り合う ⇒ かたまりを作って並べる
- 隣り合わない ⇒ ①余事象 ②スキマ両端
- 順番キープ ⇒ 場所確保 (同じものと見なして並べる)
- 区別のないものの個数が問題 ⇒ マルを棒で仕切る (重複組合せ)
- 最短経路 ⇒ タテ, ヨコの移動の順番を考える
- 組分け問題 ⇒ 区別のできない同数の組があればその組数の階乗でわりざん

場合の数・確率の診断テスト

場合の数の基礎

【例題 01】

種類の異なる T シャツ 5 枚, G パン 3 本, 服装の選び方は何通りあるか。

【例題 02】

種類の異なる T シャツ 5 枚, G パン 3 本, スカート 4 枚, 服装の選び方は何通りあるか。
ただし, G パンとスカートの重ね着は行わないものとする。

【例題 02】

C, O, M, P, A, N, Y の 7 文字を一行に並べるとき, C と Y が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

【例題 04】

S, C, H, O, O, L の 6 文字を一行に並べる並べ方は何通りあるか。

【例題 05】

両親と, 子供 4 人で円形に並ぶ。両親が隣り合う並び方は何通りあるか。

【例題 06】

異なる 6 個の宝石をつないでネックレスを作るとき, 作り方は何通りあるか。

【例題 07】

- (1) a, b, c の 3 文字から, 重複を許して 5 文字並べて単語を作るとき, 作り方は何通りあるか。
- (2) A, B, C の 3 つの部屋に, 5 人を分ける分け方は何通りあるか。ただし, 空き部屋があっても良いものとする。

【例題 08】

- (1) 10 個のりんごを A 君, B 君, C 君の 3 人に分けるとき, 分け方は何通りあるか。ただし, 1 つももらえない者がいても良いものとする。
- (2) $x + y + z = 10$ を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組 (x, y, z) の総数は何組あるか。

問題演習（発展篇）

【例題 09】

異なる 9 冊の本を 3 冊ずつ 3 組に分ける分け方は何通りあるか。

【例題 03】

(1) A, B, C の 3 つの部屋に, 5 人を分ける分け方は何通りあるか。

(2) A, B, C の 3 つの部屋に, n 人を分ける分け方は何通りあるか。

ただし, (1)(2)ともに, 空き部屋があってもよいものとする。

【例題 11】

赤球 4 個, 白球 2 個, 黒球 1 個をつないでブレスレットを作る。作り方は何通りあるか。

（発展篇）

【例題 04】

以下の設問では, ボールの数が 0 個であるグループがあってもよいものとする。

(1) 1 から 10 までの番号が書かれている 10 個のボールを 3 人に分ける。何通りの分け方があるか。

(2) 1 から 10 までの番号が書かれている 10 個のボールを区別のない 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか。

(3) 10 個のボール (ボールは区別しない) がある。これを 3 人に分ける方法は何通りか。

(4) 10 個のボール (ボールは区別しない) がある。これを区別のない 3 つのグループに分ける方法は何通りか。

【12】

	(1)	(2)	(3)	(4)
分けられるもの	区別する	区別する	区別しない	区別しない
グループ	区別する	区別しない	区別する	区別しない

(1) 各ボールが「もらえる先」は 3 通りずつであるから、分配の方法は全部で

$$3^{10} = 59049 \text{ (通り)}$$

答

である。

(2) ボールを少なくとも 1 個はもらうグループが 1 つである分け方は 1 通りである。

次に、ボールを少なくとも 1 個はもらうグループが 2 つ以上の場合を数える。この場合は (1) の 3! 通りが 1 通りに数えられる。(1) の数え方でそのような場合の数は、

$$3^{10} - 3 = 59046 \text{ (通り)}$$

であるから、(2) の数え方 (グループを区別しない数え方) では、

$$\frac{59046}{3!} = 9841 \text{ (通り)}$$

である。

以上より、求める場合の数は、

$$1 + 9841 = 9842 \text{ (通り)}$$

答

である。

(3) ボールをもらう 3 人 A, B, C がもらうボールの個数をそれぞれ x, y, z とおくと、

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これを満たす整数 x, y, z の組の個数を求めて、求める場合の数は

$$\frac{(10+2)!}{10! \cdot 2!} = 66 \text{ (通り)}$$

答

である。

(4) これは次の 3 つの場合に分けて考える。

(i) 3 つのグループのボールの個数がすべて一致する場合

この問題ではボールの個数が 10 なのでこの場合はありえない。

(ii) 3 つのグループのうち 2 つのグループだけ個数が一致する場合

これは、グループ内のボールの個数を x, x, y ($x \neq y$) とすると、

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ x \geq 0, y \geq 0, x \neq y & & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たす整数の組の個数だけある。① の条件のもとでは $x = y$ とはならないから、② は $x \geq 0, y \geq 0$ として考えても結果は変わらない。

したがって、①、② を満たす x, y の組の個数は、各 x ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) に対し、それに対応する y が 1 つだけ決まることから x の個数だけ存在する。よって、①、② を満たす x, y の組は全部で 6 組だけある。

(iii) 3 つのグループ内のボールの個数がすべて異なる場合

これは、まずグループを区別した場合で数え、後でそれを重複度である 3! で割るとよい。

3つのグループを区別し、それぞれのグループに含まれるボールの個数を x, y, z とおく. x, y, z は,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たし、これを満たす x, y, z の組の個数は (3) で求めた 66 通りである.

この 66 通りのうち、 x, y, z の 2 つが一致する場合は、

$$\underbrace{6}_{\text{(ii)で求めた個数}} \times \underbrace{3}_{(*)} = 18 \text{ (通り)}$$

だけあるので、 x, y, z のどの 2 つも異なる場合は、

$$66 - 18 = 48 \text{ (通り)}$$

である.

次に、グループの区別をなくせば、グループを区別したときの $3!$ 通りずつがグループの区別をしないときの 1 通りになるから、3つのグループ内のボールの個数がすべて異なる場合は、

$$\frac{48}{6} = 8 \text{ (通り)}$$

である.

以上の (i), (ii), (iii) から求める分け方の個数は

$$0 + 6 + 8 = 14 \text{ (通り)}$$

答

である.

この程度のボールの個数なら、書き上げた方が簡潔である.

グループ内のボールの個数を x, y, z ($x \leq y \leq z$) とし、 $x = 0, 1, 2, 3$ の場合に分けて書いていくと、

$(x, y, z) = (0, 0, 10), (0, 1, 9), (0, 2, 8), (0, 3, 7), (0, 4, 6), (0, 5, 5)$	(6 通り)
$(1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5)$	(4 通り)
$(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4)$	(3 通り)
$(3, 3, 4)$	(1 通り)