BASIC問題篇

1　40 人のクラスで，好きな教科を調べたところ，数学が好きな生徒は 18 人，体育が好きな生徒は 25 人，数学も体育も好きではない生徒は 5 人いた。このとき，数学も体育も好きな生徒は何人いるか。

2　A，B，C，D，E，F の 6 文字の順列について，文字の列 ABCDEF を 1 番目として最後の文字の列 FEDCBA まで，アルファベット順の辞書式に並べる。

(ア)　文字の列 BCDEAF は何番目であるか。

(イ)　256 番目の文字の列は何か。

3　5 個の数字 0，1，2，3，4 から，異なる数字を 3 個選んで 3 桁の整数を作る。

(1)　3 桁の整数は全部で何個できるか。

(2)　偶数は何個できるか。

4　Training という単語の 8 個の文字すべてを使ってできる文字列は何通りあるか。

5　両親と 4 人の子ども (息子 2 人，娘 2 人) が手をつないで輪を作るとき

(1)　6 人の並び方は全部で何通りあるか。

(2)　両親が隣り合う並び方は何通りあるか。

(3)　両親が正面に向き合う並び方は何通りあるか。

(4)　男性と女性が交互に並ぶ並び方は何通りあるか。

6　A，A，A，B，C，D，E の 7 文字を横 1 列に並べる。

(1)　A が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(2)★　C，D，E の 3 文字がこの順に並んでいるような並べ方は何通りあるか。ただし，C，D，E の間に他の文字が入る場合も含む。

7　互いに異なる 6 個の薬品がある。この 6 個の薬品を 3 つのグループに分けたい。

(1)　1 個，2 個，3 個に分ける方法は何通りであるか。

(2)　1 個，1 個，4 個に分ける方法は何通りであるか。

(3)　2 個，2 個，2 個に分ける方法は何通りであるか。

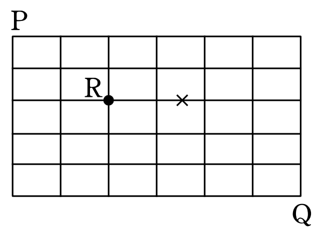
8　男子 6 人と女子 4 人の中から 4 人の委員を選ぶとき，少なくとも女子 1 人を含む組の総数を求めよ。

9　右の図のような道のある町で，P から Q まで遠回りをしないで行くのに，次の場合の道順の総数を求めよ。

(1)　R を通って行く。

(2)　×印の箇所は通らないで行く。

(3)★　R を通り，×印の箇所は通らないで行く。



10　桃，かき，トマトの 3 種類の果物がそれぞれたくさんある。この中から 7 個を選ぶ方法は何通りあるか。ただし，選ばない果物があってもよい。

実戦問題篇

11 (1) 8人がA，Bの2部屋に入る方法は，何通りあるか。ただし，全員が1つの部屋に入ってもよい。

(2) 8人が2つのグループに分かれる方法は何通りあるか。

12 立方体の6面を，赤，青，黄，緑，白，黒の6色を用いて塗ることを考える。ただし，立方体を回転してすべての面の色の並びが同じであれば，同じ塗り方であるとする。

(1) 6面を赤，青，黄，緑，白，黒の6色すべてを用いて塗る場合は何通りあるか。

(2) 向かい合う2面を赤で塗り，残りの4面を青，黄，緑，白の4色すべてを用いて塗る場合は何通りあるか。

13 赤い玉が4個，白い玉が2個，青い玉が1個ある。

(1) 7個すべての玉を円形に並べる方法は何通りあるか。

(2) 7個すべての玉にひもを通し，首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか。ただし，裏返して一致する首飾りは同じものとみなす。

1 解答　8人

2 解答　(1) 順に，720通り，120通り　(2)(ア) 153番目　(イ) CAEDFB

3 解答　(1) 48個　(2) 30個

4 解答　10080通り

5 解答　(1) 120通り　(2) 48通り　(3) 24通り　(4) 12通り

6 解答　(1) 240通り　(2) 140通り

7 解答　(1) 60通り　(2) 15通り　(3) 15通り

8 解答　195組

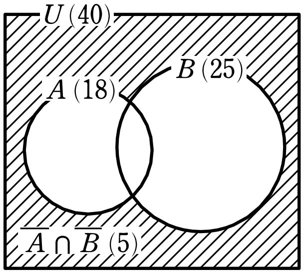
9 解答　(1) 210通り　(2) 362通り　(3) 150通り

10 解答　36通り

11 解答　(1) 256通り　(2) 127通り

12 解答　(1) 30通り　(2)(ア) 6通り　(イ) 3通り　(ウ) 15通り

13 解答　(1) 7通り　(2) 15通り　(3) 9通り



$\boxed{1}$ Uを全体集合とし，数学が好きな生徒の集合を A，体育が好きな生徒の集合を B とすると

$$n(A)=18,\ n(B)=25$$

また，$n(\overline{A\cup B})=n(\overline{A}\cap\overline{B})=5$ であるから

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})=40-5=35$$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ であるから

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=18+25-35=8$$

よって，数学も体育も好きな生徒は　8 人

$\boxed{2}$ (1)　6 文字を 1 列に並べる並べ方は　$6!=720$ (通り)

左端の文字が A である並べ方は　$5!=120$ (通り)

(2)　(ア)　A△△△△△ の形の文字列は，(1) より　120 通り

BA△△△△ の形の文字列は　$4!=24$ (通り)

BCA△△△ の形の文字列は　$3!=6$ (通り)

BCDA△△ の形の文字列は　2 通り

よって，BCDEAF は　$120+24+6+2+1=153$ (番目)

(イ)　(ア) より　A△△△△△ の形の文字列は　120 通り

B△△△△△ の形の文字列は　120 通り

CAB△△△ の形の文字列は　6 通り

CAD△△△ の形の文字列は　6 通り

CAEB△△ の形の文字列は　2 通り

CAED△△ の形の文字列は　2 通り

よって，256 番目は　CAEDFB

$\boxed{3}$ (1)　百の位の数字の選び方は 1 ～ 4 の 4 通りあり，そのおのおのに対して，十，一の位の数字の選び方は ${}_4P_2$ 通りあるから　$4\times{}_4P_2=4\times12=48$ (個)

(2)　整数が偶数のとき，一の位は 0，2，4 のいずれかである。

[1]　一の位が 0 のとき

残りの位の順列を考えると　${}_4P_2=12$ (個)

[2]　一の位が 2 または 4 のとき

百の位の数字の選び方は一の位と 0 を除く 3 通りある。

よって　$3\times3\times2=18$ (個)

[1]，[2] から，偶数の個数は　$12+18=30$ (個)

別解　奇数の個数を考える。

一の位の数字の選び方は 1，3 の 2 通りあり，百の位の数字の選び方は一の位の数と 0 を除く 3 通りある。

よって，奇数の個数は　$3\times3\times2=18$ (個)

ゆえに，偶数の個数は　$48-18=30$ (個)

$\boxed{4}$ i が 2 個，n が 2 個，T，r，a，g がそれぞれ 1 個であるから

$$\frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}=10080\text{（通り）}$$

$\boxed{5}$ (1) 6 人の円順列であるから　$(6-1)!=120$（通り）

(2) 両親 1 組と子ども 4 人の円順列で $(5-1)!$ 通り，両親 2 人の並び方が 2 通り。
よって，求める並び方は　$(5-1)!\times 2=48$（通り）

(3) 両親 2 人を固定して考えると，残り 4 つの位置に子ども 4 人が並ぶ順列の数に等しいから　${}_4P_4=24$（通り）

(4) 男性 3 人をまず円形に並べて　$(3-1)!$ 通り
その間の 3 つの位置に女性 3 人を並べて　${}_3P_3$ 通り
よって，求める並び方は　$(3-1)!\times{}_3P_3=12$（通り）

$\boxed{6}$ (1) B，C，D，E の 4 文字を並べ，その両端と間の 5 か所から 3 か所を選んで A を入れればよい。
よって　$4!\times{}_5C_3=24\times 10=240$（通り）

(2) □ 3 個，A 3 個，B 1 個を 1 列に並べて，3 個の □ を左から C，D，E とすればよい。
よって　$\dfrac{7!}{3!3!1!}=140$（通り）

$\boxed{7}$ (1) 6 個から 1 個を選び，次に残った 5 個から 2 個を選ぶと，残りの 3 個は自動的に決まるから，分け方の総数は　${}_6C_1\times{}_5C_2=60$（通り）

(2) S（1 個），T（1 個），U（4 個）の 3 つの組に分ける方法は　${}_6C_1\times{}_5C_1$ 通り
S，T の区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできるから，分け方の総数は

$$\frac{{}_6C_1\times{}_5C_1}{2!}=15\text{（通り）}$$

(3) S（2 個），T（2 個），U（2 個）の 3 つの組に分ける方法は　${}_6C_2\times{}_4C_2$ 通り
S，T，U の区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつできるから，分け方の総数は

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=15\text{（通り）}$$

$\boxed{8}$ 4 人の組の総数は　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$（組）

4 人全員が男子である組の総数は　${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$（組）

よって，求める組の総数は　$210-15=195$（組）

$\boxed{9}$ (1) 右へ 1 区画進むことを → で，下へ 1 区画進むことを ↓ で表す。P から R まで行く最短の道順は，→ 2 個と ↓ 2 個の順列で表されるから　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

R から Q まで行く最短の道順は，→ 4 個と ↓ 3 個の順列で表されるから

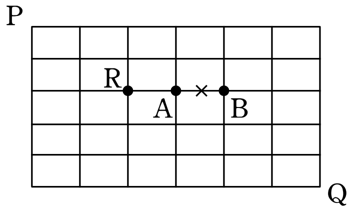
$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，R を通って行く最短の道順の総数は

$$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{7!}{4!3!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=210\ (通り)$$

(2)　求める道順の総数は，P から Q まで行く最短の道順の総数から，× 印の箇所を通って行く道順を除けばよい。右の図のように 2 点 A，B をとると，× 印の箇所を通る経路は

P → A → B → Q



P から A まで行く最短の道順は　$\frac{5!}{3!2!}$ 通り

A から B まで行く最短の道順は　1 通り

B から Q まで行く最短の道順は　$\frac{5!}{2!3!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る最短の道順は

$$\frac{5!}{3!2!}\times1\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=100\ (通り)$$

また，P から Q まで行く最短の道順の総数は　$\frac{11!}{6!5!}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462$ (通り)

したがって，× 印の箇所を通らないで行く最短の道順の総数は

$462-100=362$ (通り)

(3)　R を通って行く最短の道順の総数から，R を通り × 印の箇所を通って行く道順を除けばよい。

R を通り×印の箇所を通る経路は P → R → A → B → Q であるから

$$\frac{4!}{2!2!}\times1\times1\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=60\ (通り)$$

R を通って行く最短の道順の総数は，(1) から　210 通り

よって，R を通り，× 印の箇所は通らないで行く最短の道順の総数は

$210-60=150$ (通り)

10 異なる 3 種類の果物から，重複を許して 7 個取る重複組合せであるから，

$${}_{3-1+7}C_7={}_9C_7=36\ (通り)$$

11 (1)　8 人のそれぞれに A，B の 2 通りの部屋の選び方があるから

$2^8=256$ (通り)

(2)　(1) から A，B のどちらかの部屋が 0 人になる場合の 2 通りを除いて

$256-2=254$ (通り)

さらに，A，B の区別をなくせばよいから

$254\div2!=127$ (通り)

12 (1)　赤を塗る面を固定して考えると，その向かい合う面の塗り方は　5 通り

そのおのおのについて，残りの 4 面の塗り方は，異なる 4 個の円順列の総数に等しいから　$(4-1)!=6$ (通り)

よって，求める塗り方の総数は　$5\times6=30$（通り）

(2)　(ア)　残りの4面に青は塗られないから，青の面と向かい合う赤の面は固定して考える。

よって，求める塗り方の総数は，異なる4個の円順列の総数に等しいから　6通り

(イ)　残りの4面の塗り方は，異なる4個のじゅず順列の総数に等しいから

$$\frac{(4-1)!}{2}=3\text{（通り）}$$

(ウ)　[1]　隣り合う2面を赤で塗る場合

赤を塗る面の1つを固定して考えると，その向かい合う面の塗り方は　4通り

その各々について，残りの4面の塗り方は，(ア)と同様に　6通り

赤の面は2面あるから，回転による塗り方の一致を考えると，塗り方は

$$\frac{4\times6}{2}=12\text{（通り）}$$

[2]　向かい合う2面を赤で塗る場合

(イ)より　3通り

[1]，[2]から，求める塗り方の総数は　$12+3=15$（通り）

13　(1)　[1]　3色取り出すとき

3色の玉を1個ずつ含むから，異なる3つのものを並べる円順列に等しい。

よって　$(3-1)!=2$（通り）

[2]　2色取り出すとき

玉の色と個数の組合せは　(赤2，白1)，(赤2，青1)，(赤1，白2)，(白2，青1)

このそれぞれについて，円形に並べる方法は　1通り

よって　$4\times1=4$（通り）

[3]　1色取り出すとき

赤い玉が3個のときであるから　1通り

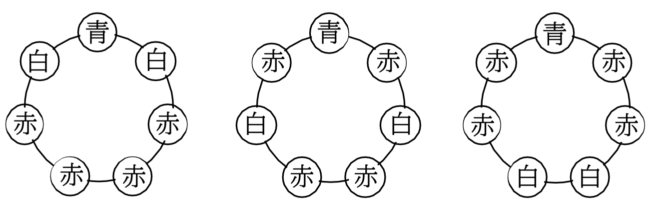
[1]～[3]から，求める方法は　$2+4+1=7$（通り）

(2)　青い玉の位置を固定すると，赤い玉4個と白い玉2個を並べる順列を考えればよい。

よって，求める方法は　$\dfrac{6!}{4!2!}=15$（通り）

(3)　青い玉の位置を固定して考えると，7個の玉を円形に並べる方法は，(2)より15通りある。

このうち，裏返したときにもとの順列と同じになるものは，下の図に示すように3通りある。



また，残りの12通りの順列は，裏返すと一致するものが他に必ず1つある。

よって，求める首飾りの総数は　$3+\dfrac{12}{2}=9$ (通り)