BASIC問題篇

$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\tan\theta = -1$

$\boxed{2}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\tan\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $2\sin\theta + \sqrt{3} \leqq 0$　　(5) $2\cos\theta > \sqrt{3}$　　(6) $\tan\theta + 1 \geqq 0$

$\boxed{3}$ 次の値を求めよ。

(1) $\sin 15^\circ$　　(2) $\tan 105^\circ$

$\boxed{4}$ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos 2\alpha$　　(2) $\sin 2\alpha$　　(3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$

$\boxed{5}$ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする。$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\alpha$　　(2) $\sin\beta$　　(3) $\sin(\alpha - \beta)$　　(4) $\cos(\alpha + \beta)$

$\boxed{6}$ 関数 $y=2\sin x-\sqrt{5}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\text{STANDARD問題篇}}$

$\boxed{7}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

$$\sin 2\theta+\sin\theta>0$$

$\boxed{8}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x<\sqrt{2}$$

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=5\cos^2 x+6\sin x\cos x-3\sin^2 x$$

$\boxed{10}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2\cos 2\theta+4\cos\theta+5-a=0$ の異なる解の個数を，定数 a の値の範囲によって調べよ。

実戦問題篇

11 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos\left(\theta + \dfrac{3}{4}\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

(3) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\tan\left(\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right) \leqq -1$

12 $0 \leqq x \leqq \pi$ における 関数 $y = 12\sin x + 5\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。
また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

13 $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の範囲で，関数 $f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$, $g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$ を考える．

(1) $f(60°)=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である．

(2) $\theta=\boxed{\text{イウ}}°$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ をとる．

(3) $g(\theta)=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\cos\left(\theta+\boxed{\text{キク}}°\right)$ と表せる．とくに，

$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，$f(\theta)=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$,

$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{10}$ となる．

14 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta$，$\cos\theta$ を t の式で表せ。

(2) 関数 $y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}$ について，y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ とする。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\theta=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ (2) $\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ (3) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

(4) $\dfrac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ (5) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(6) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (3) $-2-\sqrt{3}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\dfrac{7}{25}$ (2) $-\dfrac{24}{25}$ (3) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $-\dfrac{4}{5}$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (3) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$ (4) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{6}$ 解答 最大値 3，最小値 -3

$\boxed{7}$ 解答 $0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \pi<\theta<\dfrac{4}{3}\pi$

$\boxed{8}$ 解答 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{7}{12}\pi<x<2\pi$

$\boxed{9}$ 解答 最大値は 6，最小値は -4

$\boxed{10}$ 解答 $a<2$，$11<a$ のとき 0 個； $a=2$，$3<a<11$ のとき 2 個；
$2<a<3$ のとき 4 個； $a=3$ のとき 3 個； $a=11$ のとき 1 個

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\theta=\dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi$ (2) $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(3) $0\leqq\theta<\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi<\theta<2\pi$ (4) $\dfrac{\pi}{6}<\theta\leqq\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi<\theta\leqq\dfrac{17}{12}\pi$

$\boxed{12}$ 解答 最大値 13，最小値 -12 （後半） $\tan x=\dfrac{5}{12}$

$\boxed{13}$ 解答 $\sqrt{(ア)}$ $\sqrt{6}$ $(イウ)^\circ$ 90° $\sqrt{(エ)}$ $\sqrt{2}$

$(オ)\sqrt{(カ)}\cos(\theta+(キク)^\circ)$ $2\sqrt{2}\cos(\theta+60^\circ)$ $\dfrac{(ケ)\sqrt{(コ)}}{(サ)}$ $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

$\dfrac{(シ)+(ス)\sqrt{(セ)}}{10}$ $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$

$\boxed{14}$ 解答 (1) $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ (2) $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (3) $y=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2$

(4) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 0，$\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{1}$ (1)　図のように，単位円上で y 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である点 P，Q をとる。

求める θ の動径は　OP，OQ

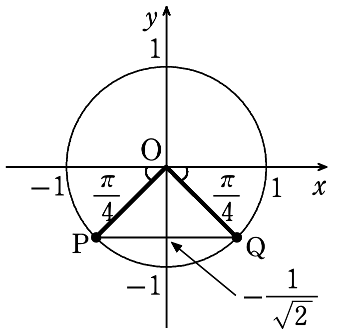
よって　$\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$2\pi-\dfrac{\pi}{4}$　　すなわち　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

(2)　図のように，点 $(1,\ -1)$ と原点を通る直線と，単位円の交点を P，Q とする。

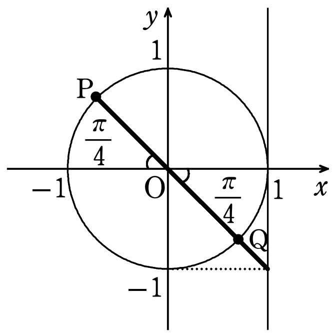
求める θ の動径は　OP，OQ

よって　$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}$，$2\pi-\dfrac{\pi}{4}$　　すなわち　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

(1)

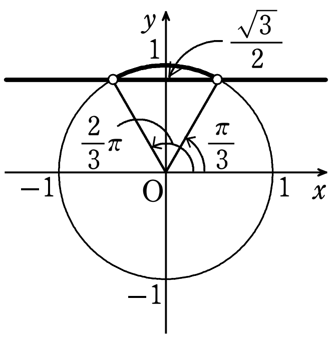


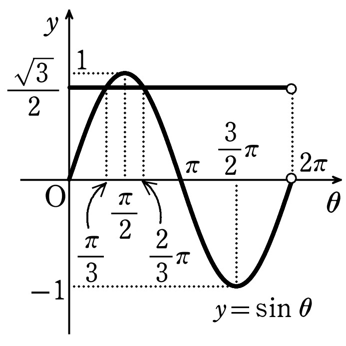
(2)



$\boxed{2}$ (1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

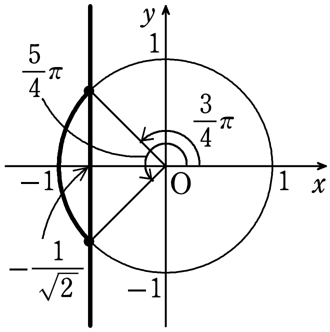
よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

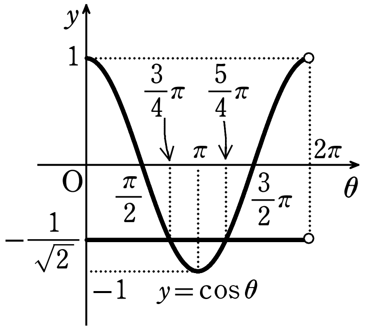




(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$

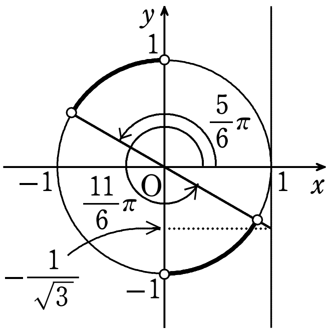
よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi$

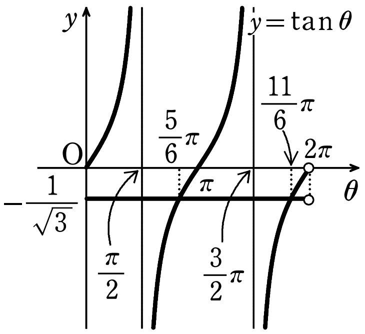




(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ は　　$\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta < \dfrac{11}{6}\pi$

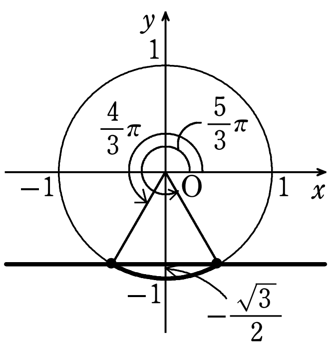


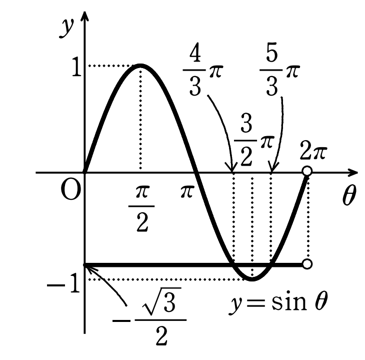


(4)　不等式を変形すると　　$\sin\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{4}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

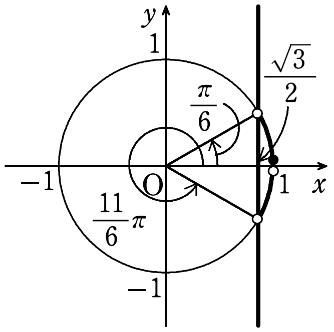


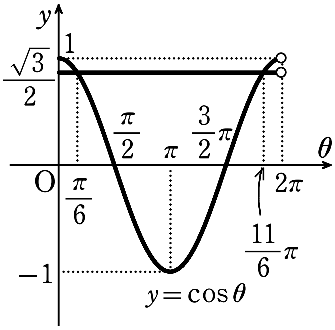


(5)　不等式を変形すると　　$\cos\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$

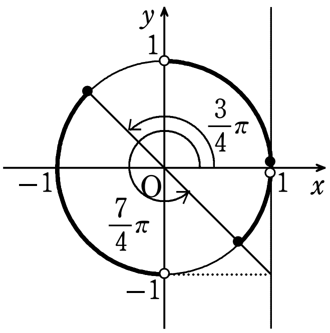


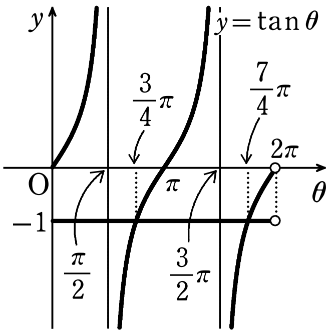


(6)　不等式を変形すると　　$\tan\theta \geqq -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -1$ となる θ は　　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$





$\boxed{3}$ (1) $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 105° = \cos(45° + 60°)$

$= \cos 45° \cos 60° - \sin 45° \sin 60°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\tan 105° = \tan(45° + 60°) = \dfrac{\tan 45° + \tan 60°}{1 - \tan 45° \tan 60°}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$

$\boxed{4}$ (1) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{7}{25}$

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より，$\cos\alpha < 0$ であるから

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$$

よって　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

(3) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right\} = \dfrac{9}{10}$

$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{5}$ (1) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より，$\cos\alpha < 0$ であるから　　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{4}{5}$

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\sin\beta > 0$ であるから　　$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \left(-\dfrac{4}{5}\right) \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$$

(4) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{4}{5} \times \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \dfrac{3}{5} \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{6}$ $$2\sin x-\sqrt{5}\cos x=\sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2}\sin(x+\alpha)=3\sin(x+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$

よって　　$y=3\sin(x+\alpha)$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq1$ であるから，y の最大値は 3，最小値は -3

$\boxed{7}$ $2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta>0$ から　$\sin\theta(2\cos\theta+1)>0$

よって

$\sin\theta>0$　かつ　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

または

$\sin\theta<0$　かつ　$\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$

したがって　$0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$，$\pi<\theta<\dfrac{4}{3}\pi$

$\boxed{8}$ $$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)<\sqrt{2}$ より　　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi<x+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$$

よって　　$0\leqq x<\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi<x<2\pi$

$\boxed{9}$ $$y=5\cdot\frac{1+\cos2x}{2}+6\cdot\frac{\sin2x}{2}-3\cdot\frac{1-\cos2x}{2}$$

$$=3\sin2x+4\cos2x+1$$

$$=5\sin(2x+\alpha)+1$$　　ただし　$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

$-1\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq1$ であるから　　$-5+1\leqq y\leqq5+1$　すなわち　$-4\leqq y\leqq6$

したがって　　最大値は 6，最小値は -4

10 方程式を変形すると　$2(2\cos^2\theta-1)+4\cos\theta+5-a=0$

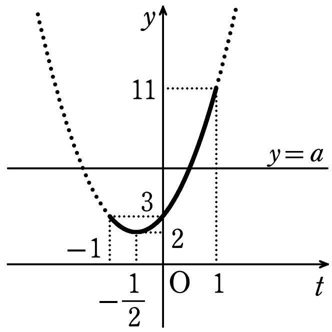
よって　$4\cos^2\theta+4\cos\theta+3=a$

$y=4\cos^2\theta+4\cos\theta+3$，$\cos\theta=t$ とおくと

$$y=4t^2+4t+3=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+2 \quad \cdots\cdots ①$$

また　$-1\leqq t\leqq 1$

$-1\leqq t\leqq 1$ における，関数 ① のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べると，図から



$a<2$，$11<a$ のとき　0 個

$a=2$，$3<a<11$ のとき　$-1<t<1$ の範囲に 1 個

$2<a<3$ のとき　$-1<t<1$ の範囲に 2 個

$a=3$ のとき　$-1<t<1$ の範囲に 1 個と，$t=-1$ のときの 1 個

$a=11$ のとき　$t=1$ のときの 1 個

$\cos\theta=t$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解の個数は，

$t=\pm1$ のとき 1 個，$-1<t<1$ のとき 2 個

であるから，求める解の個数は

$a<2$，$11<a$ のとき 0 個；　$a=2$，$3<a<11$ のとき 2 個；

$2<a<3$ のとき 4 個；　$a=3$ のとき 3 個；

$a=11$ のとき 1 個

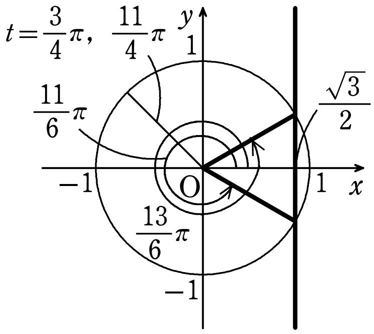
11 (1)　$\theta+\frac{3}{4}\pi=t$ $\cdots\cdots$ ① とおくと　$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta+\frac{3}{4}\pi<2\pi+\frac{3}{4}\pi$

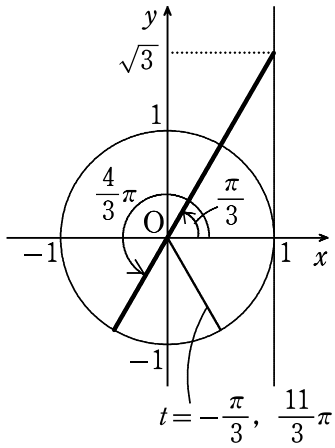
すなわち　$\frac{3}{4}\pi\leqq t<\frac{11}{4}\pi$ $\cdots\cdots$ ②

② の範囲で $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の解は　$t=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

① より，$\theta=t-\frac{3}{4}\pi$ であるから　$\theta=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$



(2)　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ ……① とおくと　$\tan t=\sqrt{3}$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{3}<4\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{11}{3}\pi$ ……②

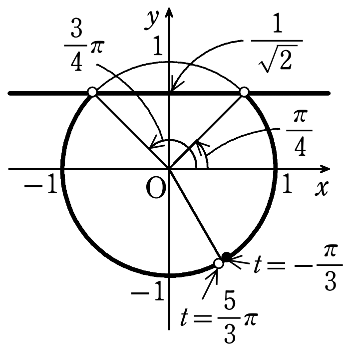
② の範囲で $\tan t=\sqrt{3}$ の解は

$$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi$$

① より，$\theta=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

(3)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ ……① とおくと　$\sin t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{5}{3}\pi$　……②

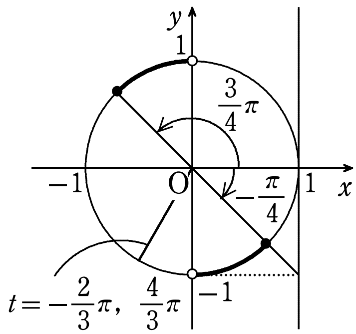
② の範囲で $\sin t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解は

$$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi<t<\frac{5}{3}\pi$$

① より，$\theta=t+\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi<\theta<2\pi$$

(4)　$\theta-\dfrac{2}{3}\pi=t$ ……① とおくと　$\tan t\leqq -1$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta-\dfrac{2}{3}\pi<2\pi-\dfrac{2}{3}\pi$

すなわち　　$-\dfrac{2}{3}\pi\leqq t<\dfrac{4}{3}\pi$　……②

② の範囲で $\tan t\leqq -1$ の解は

$$-\frac{\pi}{2}<t\leqq-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}<t\leqq\frac{3}{4}\pi$$

① より，$\theta=t+\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6}<\theta\leqq\frac{5}{12}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta\leqq\frac{17}{12}\pi$$

$\boxed{12}$ （前半）

$y=5\sin x+12\cos x=13\sin(x+\alpha)$　　　ただし　$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$

$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\pi+\alpha$ より，$x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値　13

$x+\alpha=\pi+\alpha$　つまり $x=\pi$ のとき　最小値　-12

（後半）

$\tan x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{5}{12}$

$\boxed{13}$ (1)　$f(60^\circ)=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{^{ア}6}$

(2)　$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+60^\circ)$, $60^\circ\leqq\theta+60^\circ\leqq150^\circ$ であるから $\theta={}^{イウ}90^\circ$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{^{エ}2}$ をとる．

(3)　$g(\theta)={}^{オ}2\sqrt{^{カ}2}\cos(\theta+{}^{キク}60^\circ)$ と表される．

特に $g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば　$\cos(\theta+60^\circ)=-\dfrac{4}{5}$

よって　$\sin(\theta+60^\circ)=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　$f(\theta)=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{^{ケ}6\sqrt{^{コ}2}}{^{サ}5}$

また，連立方程式 $\sin(\theta+60^\circ)=\dfrac{3}{5}$, $\cos(\theta+60^\circ)=-\dfrac{4}{5}$

すなわち　$\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ を解いて

$$\sin\theta=\dfrac{^{シ}3+{}^{ス}4\sqrt{^{セ}3}}{10}$$

$\boxed{14}$ (1) $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\tan\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}=2\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(2) $\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}-1=\dfrac{2}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3) (1)，(2) から $\quad y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}=\dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}-1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\dfrac{2t-(1+t^2)}{1-t^2+1+t^2}=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2$

(4) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ から $\quad 0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{3}$ $\qquad$ ゆえに，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ から $\quad 0\leqq t\leqq\sqrt{3}$

よって，(3) から，$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 0,

$t=0$ すなわち $\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

別解 $\quad y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta-(-1)}$

よって，y は 2 点 $(-1,\ 1)$，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通る直線の傾きを表す。

点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi\right)$ は円 $X^2+Y^2=1$ 上にある。

右の図から，直線の傾きは，2 点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を通るとき最大，2 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 0)$ を通るとき最小となる。

したがって

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 0，$\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$