改・数学①第６回小テスト　平面図形　7 / 5

BASIC＋STANDARD問題篇

1 AB＝2，BC＝x，AC＝4－x であるような △ABC がある。

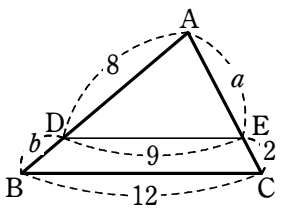
(1) x の値の範囲を求めよ。

(2) △ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

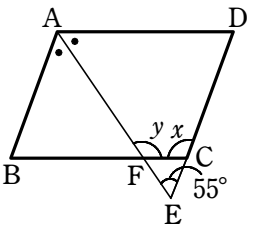
2 △ABC において，BC＝5，CA＝3，AB＝7 とする．∠A およびその外角の 2 等分線が直線 BC と交わる点をそれぞれ D，E とするとき，線分 DE の長さを求めよ．

3 右の図において，長さ a，b または角の大きさ x，y を求めよ。
ただし，(1) では DE∥BC，
(2) では AD∥BC，AD＝BC，
AE は ∠A の二等分線とする。

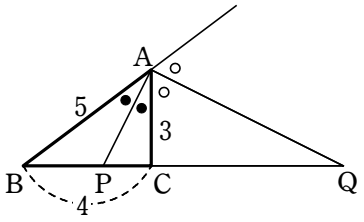
(1)



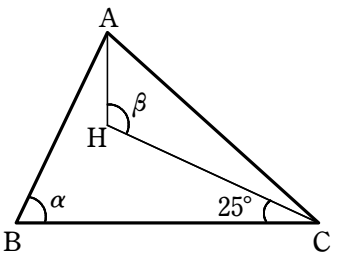
(2)



4 △ABC において，AB＝5，BC＝4，CA＝3 とし，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とする。また，頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とする。このとき，線分 BP，PC，CQ の長さを求めよ。

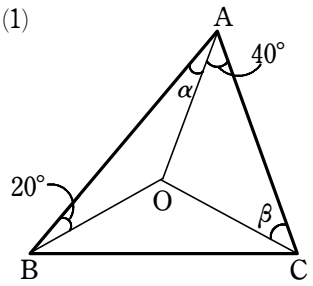


5 右の図で，H を△ABC の垂心とするとき，角 α，β を求めよ。

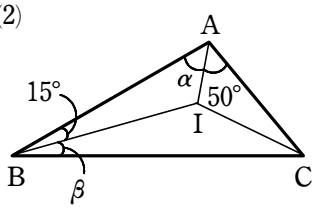


6 △ABC の外心を O，内心を I，重心を G とする。下の図の角 α，β と線分の長さ x，y を求めよ。

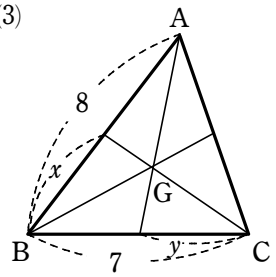
(1)



(2)

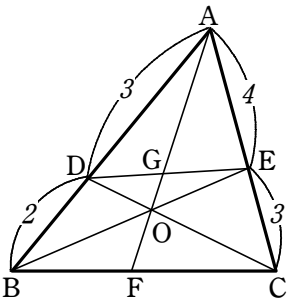


(3)



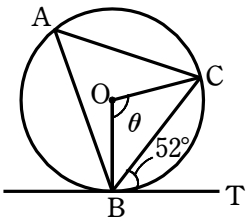
7 △ABCの辺ABを3：2に内分する点をD，辺ACを4：3に内分する点をEとし，BEとCDの交点をOとする。また，AOとBCの交点をF，AOとDEの交点をGとする。このとき，次の比を求めよ。

(1) BF：FC　　(2) DG：GE

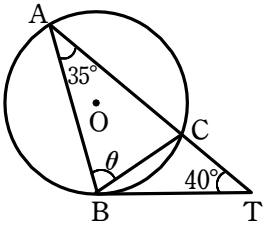


8 下の図で，BTは円Oの接線，Bはその接点である。角θを求めよ。

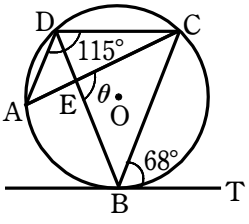
(1)



(2)



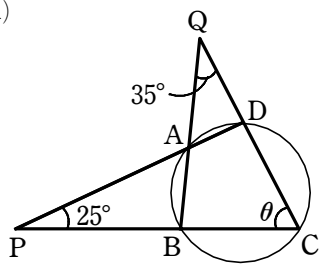
(3)



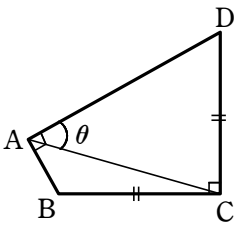
（BC＝BD）

9 右の図の角θを求めよ。
ただし，図(1)で四角形ABCDは円に内接し，
図(2)でBC＝CD，
∠DAB＝∠BCD＝90°である。

(1)

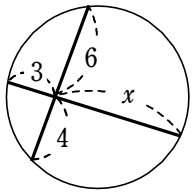


(2)

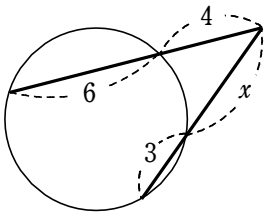


10 (1) 次の図の x の値を求めよ。ただし，(ウ) の点 O は円の中心である。

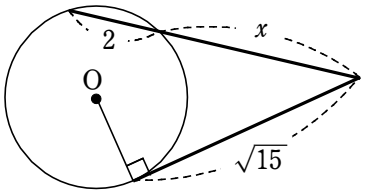
(ア)



(イ)

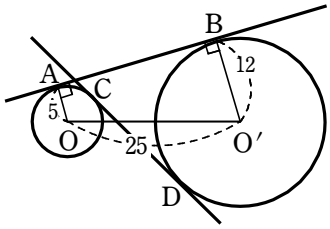


(ウ)



(2) O を中心とする半径 2 の円の内部の点 P を通る弦 AB について，PA・PB＝1 であるとき，線分 OP の長さを求めよ。

11 右の図のように，半径 5 の円 O と半径 12 の円 O′ があり，OO′＝25 である。このとき，共通外接線 AB の長さと共通内接線 CD の長さを求めよ。



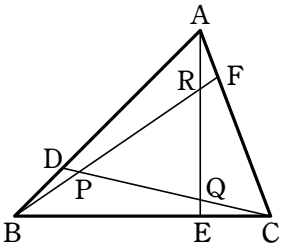
12 (1) △ABC の内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする。AB＝9，BC＝10，CA＝7 のとき AF＋BD＋CE の長さを求めよ。

(2) AB＝13，BC＝5，CA＝12 である △ABC の内接円の半径を求めよ。

実戦問題篇

13 半径 6 の円 C と直線 l は 2 点で交わり，2 交点の距離は 6 である．C と l で囲まれる 2 つの部分のうち小さい方の面積を求めよ．

14 △ABC の 3 辺 AB，BC，CA を 3：1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とし，CD と BF，AE と CD，BF と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とするとき，△PQR と △ABC の面積の比を求めよ．



15 半径 2，中心角 60° の扇形に内接する円の半径を求めよ。

BASIC+STANDARD問題篇

1 AB＝2，BC＝x，AC＝4－x であるような △ABC がある。

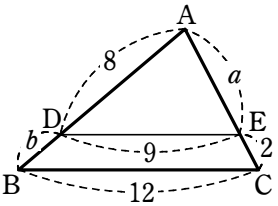
(1)　x の値の範囲を求めよ。

(2)　△ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

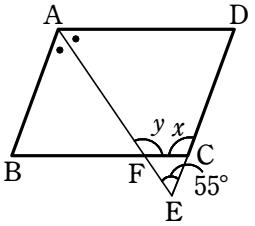
2 △ABC において，BC＝5，CA＝3，AB＝7 とする．∠A およびその外角の 2 等分線が直線 BC と交わる点をそれぞれ D，E とするとき，線分 DE の長さを求めよ．

3 右の図において，長さ a，b または角の大きさ x，y を求めよ。
ただし，(1) では DE∥BC，
(2) では AD∥BC，AD＝BC，
AE は ∠A の二等分線とする。

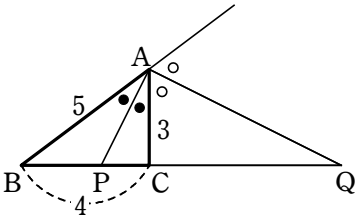
(1)



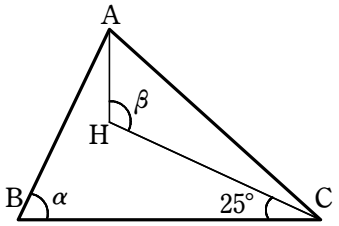
(2)



4 △ABC において，AB＝5，BC＝4，CA＝3 とし，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とする。また，頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とする。このとき，線分 BP，PC，CQ の長さを求めよ。

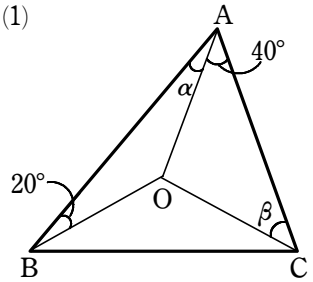


5 右の図で，H を△ABC の垂心とするとき，角 α，β を求めよ。

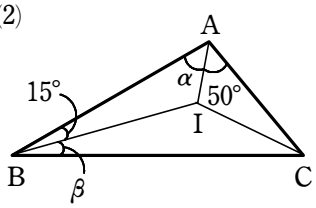


6 △ABC の外心を O，内心を I，重心を G とする。下の図の角 α，β と線分の長さ x，y を求めよ。

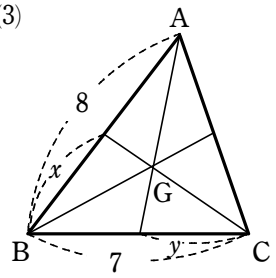
(1)



(2)

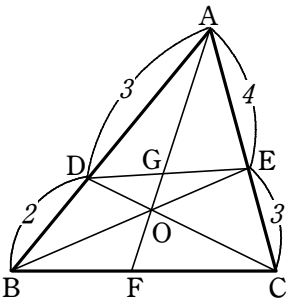


(3)



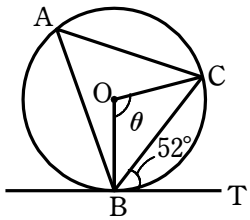
7 △ABCの辺ABを3：2に内分する点をD，辺ACを4：3に内分する点をEとし，BEとCDの交点をOとする。また，AOとBCの交点をF，AOとDEの交点をGとする。このとき，次の比を求めよ。

(1) BF：FC　　(2) DG：GE

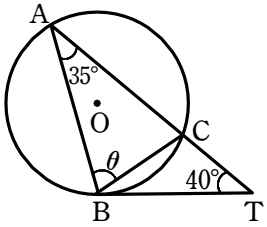


8 下の図で，BTは円Oの接線，Bはその接点である。角θを求めよ。

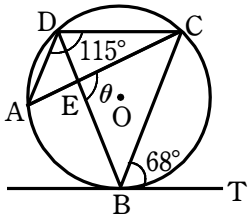
(1)



(2)



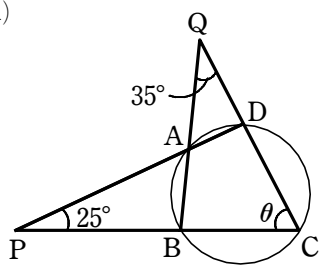
(3)



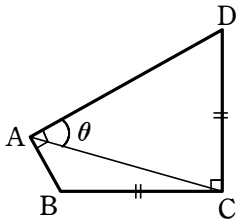
(BC＝BD)

9 右の図の角θを求めよ。
ただし，図(1)で四角形ABCDは円に内接し，
図(2)でBC＝CD，
∠DAB＝∠BCD＝90°である。

(1)

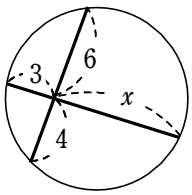


(2)

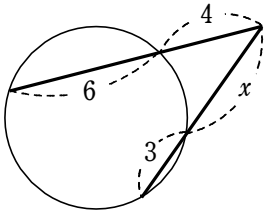


10 (1) 次の図のxの値を求めよ。ただし，(ウ)の点Oは円の中心である。

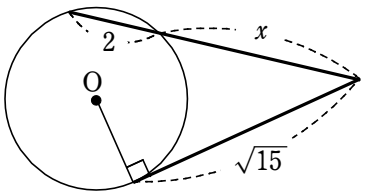
(ア)



(イ)

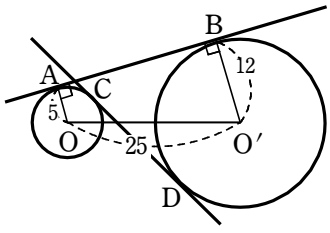


(ウ)



(2) Oを中心とする半径2の円の内部の点Pを通る弦ABについて，PA・PB＝1であるとき，線分OPの長さを求めよ。

11 右の図のように，半径5の円Oと半径12の円O′があり，OO′＝25である。このとき，共通外接線ABの長さと共通内接線CDの長さを求めよ。

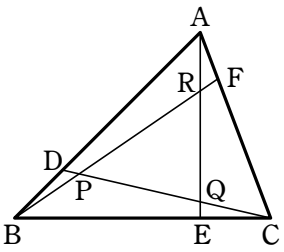


12 (1) △ABCの内接円が辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれD，E，Fとする。
AB＝9，BC＝10，CA＝7のとき AF＋BD＋CEの長さを求めよ。
(2) AB＝13，BC＝5，CA＝12である△ABCの内接円の半径を求めよ。

実戦問題篇

13 半径6の円 C と直線 l は2点で交わり，2交点の距離は6である．C と l で囲まれる2つの部分のうち小さい方の面積を求めよ．

14 △ABCの3辺AB，BC，CAを3：1に内分する点をそれぞれD，E，Fとし，CDとBF，AEとCD，BFとAEの交点をそれぞれP，Q，Rとするとき，△PQRと△ABCの面積の比を求めよ．



15 半径2，中心角60°の扇形に内接する円の半径を求めよ。

1 解答 (1) $1<x<3$ (2) $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

2 解答 $\frac{21}{4}$

3 解答 (1) $a=6$，$b=\frac{8}{3}$ (2) $x=110°$，$y=125°$

4 解答 $BP=\frac{5}{2}$，$PC=\frac{3}{2}$，$CQ=6$

5 解答 $\alpha=65°$，$\beta=115°$

6 解答 (1) $\alpha=20°$，$\beta=40°$ (2) $\alpha=50°$，$\beta=15°$ (3) $x=4$，$y=\frac{7}{2}$

7 解答 (1) 8：9 (2) 14：15

8 解答 (1) $\theta=104°$ (2) $\theta=70°$ (3) $\theta=89°$

9 解答 (1) $\theta=60°$ (2) $\theta=45°$

10 解答 (1) (ア) $x=8$ (イ) $x=5$ (ウ) $x=3$ (2) $\sqrt{3}$

11 解答 $AB=24$，$CD=4\sqrt{21}$

12 解答 (1) 13 (2) 2

13 解答 $6\pi-9\sqrt{3}$

14 解答 4：13

15 解答 $\frac{2}{3}$

1 (1) 2，x，$4-x$ が三角形の3辺の長さとなるための条件は，次の3つの不等式が同時に成り立つことである。

$2+x>4-x$ ……①

$x+(4-x)>2$ ……②

$(4-x)+2>x$ ……③

① を解くと　$x>1$

② は，$4>2$ となり常に成り立つ。

③ を解くと　$x<3$

よって，求める x の値の範囲は　$1<x<3$ ……④

(2) △ABC が鋭角三角形となるための条件は，④ および次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2^2<x^2+(4-x)^2$ ……⑤

$x^2<(4-x)^2+2^2$ ……⑥

$(4-x)^2<x^2+2^2$ ……⑦

⑤ から　$2(x^2-4x+6)>0$

$x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ であるから，⑤ は常に成り立つ。

⑥ から　$8x-20<0$　　よって　$x<\frac{5}{2}$ ……⑥′

⑦ から　$8x-12>0$　　よって　$x>\frac{3}{2}$ ……⑦′

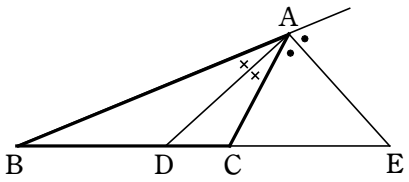
④，⑥′，⑦′ の共通範囲を求めて　$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

2 BD：DC＝AB：AC＝7：3,

BE：EC＝AB：AC＝7：3 であるから

$DC=\frac{3}{7+3}\times 5=\frac{3}{2}$

$CE=\frac{3}{7-3}\times 5=\frac{15}{4}$



したがって　$DE=DC+CE=\frac{3}{2}+\frac{15}{4}=\frac{21}{4}$

3 (1) DE∥BC から　AE：AC＝DE：BC

よって　$a:(a+2)=9:12$　　ゆえに　$12a=9(a+2)$

したがって　$a=6$

また，AD：DB＝AE：EC から　$8:b=6:2$

ゆえに　$16=6b$　　よって　$b=\frac{8}{3}$

(2) AD∥BC，AD＝BC であるから，四角形 ABCD は平行四辺形である。

このことと AB∥DE から

$x=\angle BCD=\angle BAD=2\angle BAF=2\angle FEC=110^\circ$

また　$y=\angle AFC=\angle FEC+\angle FCE=\angle FEC+(180^\circ-x)$

$=55^\circ+180^\circ-110^\circ=125^\circ$

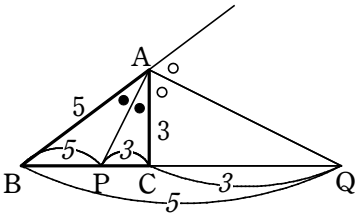
4 APは ∠A の二等分線であるから

$BP : PC = AB : AC$

すなわち　$BP : (4-BP) = 5 : 3$

よって　$5(4-BP) = 3BP$

ゆえに　$BP = \frac{5}{2}$



また　$PC = 4 - BP = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

AQ は頂点 A における外角の二等分線であるから　$BQ : CQ = AB : AC$

すなわち　$(4+CQ) : CQ = 5 : 3$

よって　$5CQ = 3(4+CQ)$　　ゆえに　$CQ = 6$

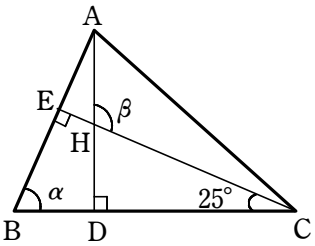
5 AH の延長と辺 BC との交点を D，CH の延長と辺 AB との交点を E とすると　$\angle ADC = \angle CEB = 90°$

△BCE の内角の和は 180° であるから

$\alpha + 25° + 90° = 180°$　　よって　$\alpha = 65°$

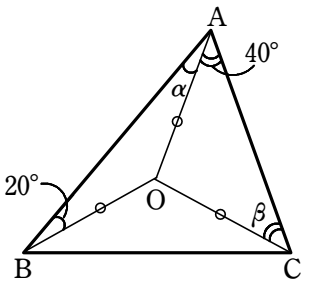
また，△CHD の内角と外角の関係から

$\beta = 25° + 90° = 115°$

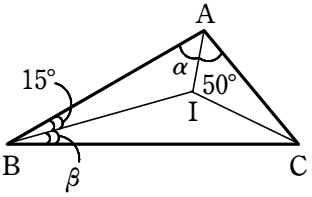


6 (1)　点 O は △ABC の 3 つの頂点からの距離が等しいから　$OA = OB = OC$

よって　$\alpha = 20°$，$\beta = 40°$

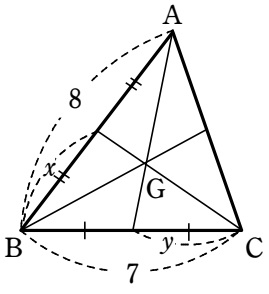


(2)　点 I は △ABC の 3 つの内角の二等分線上にあるから　$\alpha = 50°$，$\beta = 15°$



(3)　点 G は △ABC の 3 つの中線の交点であるから

$x = 4$，$y = \frac{7}{2}$



7 (1)　△ABC において，チェバの定理から

$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$　すなわち　$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = 1$

ゆえに　$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{8}{9}$　　よって　　BF：FC＝8：9

(2)　△ADE において，チェバの定理から

$\dfrac{DG}{GE}\cdot\dfrac{EC}{CA}\cdot\dfrac{AB}{BD}=1$　すなわち　　$\dfrac{DG}{GE}\cdot\dfrac{3}{3+4}\cdot\dfrac{3+2}{2}=1$

ゆえに　$\dfrac{DG}{GE}=\dfrac{14}{15}$　　よって　　DG：GE＝14：15

8　(1)　接弦定理から　　∠BAC＝∠CBT＝52°

よって　　$\theta=2\times\angle BAC=2\times52°=104°$

(2)　接弦定理から　　∠CBT＝∠BAC＝35°

よって，△ABT において　　$35°+(\theta+35°)+40°=180°$

したがって　　$\theta=70°$

(3)　接弦定理と BC＝BD から　∠CBT＝∠BDC＝∠BCD＝68°

また　　∠DBC＝180°−(68°＋68°)＝44°

∠ACB＝∠ADB＝115°−68°＝47°

よって　　$\theta=180°-(44°+47°)=89°$

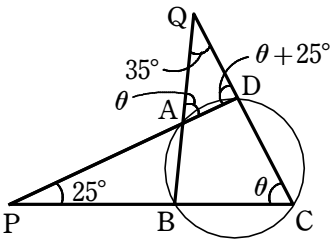
9　(1)　$\angle PDQ=\theta+25°$，$\angle QAD=\angle C=\theta$

ゆえに，△QAD において

$35°+\theta+(\theta+25°)=180°$

整理すると　　$2\theta=120°$

よって　　$\theta=60°$



(2)　B と D を線分で結ぶ。

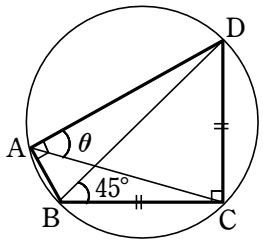
△BCD は直角二等辺三角形であるから　　∠DBC＝45°

また，∠A＋∠C＝180° であるから，四角形 ABCD は円に内接する。

この円の弧 DC に対する円周角について

∠DAC＝∠DBC

すなわち　　$\theta=45°$



10　(1)　(ア)　方べきの定理により　　$3x=4\cdot6$　　これを解いて　　$x=8$

(イ)　方べきの定理により　　$x(x+3)=4(4+6)$

ゆえに　　$x^2+3x-40=0$　　よって　　$(x-5)(x+8)=0$

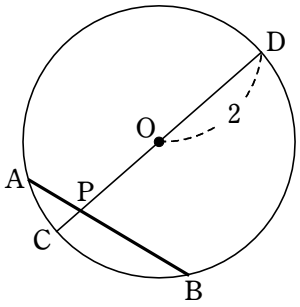
$x>0$ であるから　　$x=5$

(ウ)　方べきの定理により　　$x(x+2)=(\sqrt{15})^2$

ゆえに　　$x^2+2x-15=0$　　よって　　$(x-3)(x+5)=0$

$x>0$ であるから　　$x=3$

(2) 点Pを通るこの円の直径をCDとする。



方べきの定理により

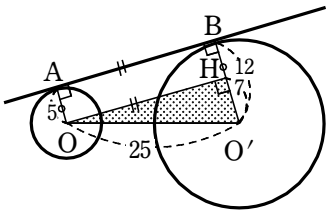
$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$
$$=(OC-OP)(OD+OP)$$
$$=OD^2-OP^2$$
$$=4-OP^2$$

よって，$PA\cdot PB=1$ であるとき　$4-OP^2=1$

ゆえに　$OP^2=3$

$OP>0$ であるから　$OP=\sqrt{3}$

11 (共通外接線ABの長さ)



Oから O′B に垂線OHを下ろすと，$\angle A=\angle B=90°$

であるから　$AB=OH$，$BH=AO=5$

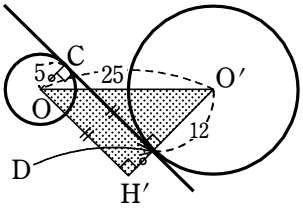
△OO′H において，$\angle H=90°$ であるから

$$OH^2=OO'^2-O'H^2=25^2-(12-5)^2$$
$$=25^2-7^2=(25+7)(25-7)$$
$$=32\cdot 18=8^2\cdot 3^2$$

$OH>0$ であるから　$OH=8\cdot 3=24$

したがって　$AB=OH=24$

(共通内接線CDの長さ)



Oから線分 O′D の延長に垂線 OH′ を下ろすと，

$\angle C=\angle D=90°$ であるから

$CD=OH'$，$DH'=CO=5$

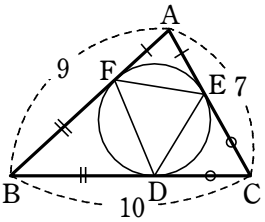
△OO′H′ において，$\angle H'=90°$ であるから

$$OH'^2=OO'^2-O'H'^2$$
$$=25^2-(12+5)^2=25^2-17^2$$
$$=(25+17)(25-17)=42\cdot 8$$

$OH'>0$ であるから　$OH'=4\sqrt{21}$

したがって　$CD=OH'=4\sqrt{21}$

12 (1) $AE=AF$，$BF=BD$，$CD=CE$ であるから



$$AB+BC+CA$$
$$=AF+FB+BD+DC+CE+EA$$
$$=2AF+2BD+2CE$$
$$=2(AF+BD+CE)$$

ここで，$AB=9$，$BC=10$，$CA=7$ であるから

$$AB+BC+CA=9+10+7=26$$

よって　$2(AF+BD+CE)=26$

ゆえに　$AF+BD+CE=13$

(2)　$AB^2=169$，$BC^2=25$，$CA^2=144$ であるから

$$AB^2=BC^2+CA^2$$

よって，△ABC は $\angle C=90^\circ$ の直角三角形である。

内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ P，Q，R とする。

内接円の半径を r とすると

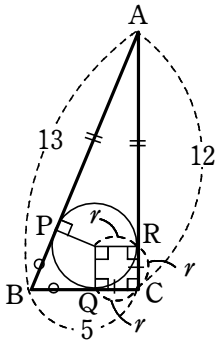
$AP=AR=12-r$，$BP=BQ=5-r$

$AP+BP=AB$ であるから

$$(12-r)+(5-r)=13$$

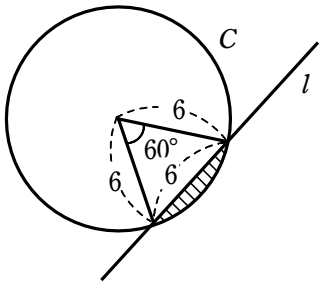
ゆえに　$r=2$

よって，△ABC の内接円の半径は　2



13　右の図から，求める面積は

$$6^2\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=6\pi-9\sqrt{3}$$



14　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用すると　$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EQ}{QA}=1$

ゆえに　$\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{EQ}{QA}=1$　　よって　$AQ:QE=12:1$

ゆえに　$\triangle AQC=\frac{12}{13}\triangle ACE=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{3}{13}\triangle ABC$

同様にして　$\triangle ABR=\triangle BCP=\frac{3}{13}\triangle ABC$

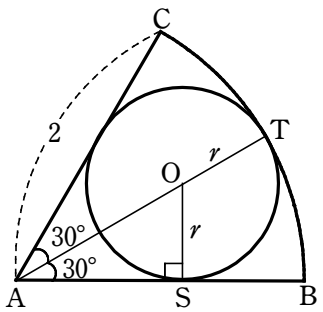
よって　$\triangle PQR=\triangle ABC-(\triangle AQC+\triangle ABR+\triangle BCP)=\frac{4}{13}\triangle ABC$

したがって　$\triangle PQR:\triangle ABC=4:13$

15　右の図のように点 A，B，C をとり，内接円の中心を O，半径を r とする。

内接円と線分 AB との接点を S，弧 BC との接点を T とすると　　$OS=OT=r$，$OS\perp AB$

△OAS は $\angle O=60^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$\angle S=90^\circ$ の直角三角形であるから

$$OA=2OS=2r$$

$AT=2$ であるから　$2r+r=2$　　よって　$r=\frac{2}{3}$