改・数学①第８回小テスト　二項定理　　　１　/　６

$\boxed{1}$ $\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$ の展開式において，x^3 の係数と定数項を求めよ。

$\boxed{2}$ $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^4$ を展開したときの定数項を求めよ。

$\boxed{3}$ 一般に ${}_{n}\mathrm{C}_0+{}_{n}\mathrm{C}_1x+{}_{n}\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_nx^n$ という和の結果を利用すれば，

$${}_{n}\mathrm{C}_0+{}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_n={}^{ア}\boxed{}$$ であることがわかる．

また，前式の各項に，交互に正負をつけた次のような場合も簡単になる．

$${}_{n}\mathrm{C}_0-{}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2-{}_{n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_{n}\mathrm{C}_n={}^{イ}\boxed{}$$

$\boxed{4}$ $(2x+y)^{10}$ の展開式における $x^{10-k}y^k$ の係数を $f(k)$ で表す．ただし，$k=0$，1，2，……，10 とする．

(1) $f(k)<f(k+1)$ を満たす k をすべて求めよ．

(2) $f(k)$ の最大値はいくらか．

$\boxed{5}$ $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

$\boxed{6}$ $(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

$\boxed{7}$ $(x+y+z)^3$ を展開した式には同類項の種類が x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, xyz の10種類ある。では，$(x+y+z)^{88}$ の展開式の同類項は何種類あるか。

$\boxed{1}$ 解答 順に $-\dfrac{55}{2}$，$\dfrac{495}{16}$

$\boxed{2}$ 解答 19

$\boxed{3}$ 解答 (ア) 2^n (イ) 0

$\boxed{4}$ 解答 (1) $k=0,\ 1,\ 2$ (2) $f(3)=15360$

$\boxed{5}$ 解答 -160

$\boxed{6}$ 解答 270

$\boxed{7}$ 解答 4005 種類

解説

$\boxed{1}$ 二項定理により

$$\left(x-\frac{1}{2x^2}\right)^{12}=\sum_{r=0}^{12}{}_{12}C_r\,x^{12-r}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^r=\sum_{r=0}^{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^r{}_{12}C_r\,x^{12-3r}$$

$12-3r=3$ とすると　$r=3$

よって，x^3 の係数は　$\left(-\frac{1}{2}\right)^3{}_{12}C_3=-\frac{1}{8}\times\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=-\frac{55}{2}$

また，$12-3r=0$ とすると　$r=4$

よって，定数項は　$\left(-\frac{1}{2}\right)^4{}_{12}C_4=\frac{1}{16}\times\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{495}{16}$

解説

$\boxed{2}$ 展開式の一般項は

$$\frac{4!}{p!q!r!}x^{p-r}\qquad ただし\quad p+q+r=4,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0$$

$p-r=0$ から　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 4,\ 0),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 0,\ 2)$

したがって，定数項は　$\frac{4!}{0!4!0!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!0!2!}=19$

解説

$\boxed{3}$ ${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$

(ア)　${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=(1+1)^n=2^n$

(イ)　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=(1-1)^n=0$

解説

$\boxed{4}$ (1)　$f(k)={}_{10}C_k\cdot2^{10-k}=\frac{10!\cdot2^{10-k}}{k!(10-k)!}$　$(0\leqq k\leqq10,\ k$ は整数$)$

$f(k+1)={}_{10}C_{k+1}\cdot2^{9-k}=\frac{10!\cdot2^{9-k}}{(k+1)!(9-k)!}$　$(0\leqq k\leqq9,\ k$ は整数$)$

ゆえに，$f(k)<f(k+1)$ であるとき

$f(k)-f(k+1)<0$　$(0\leqq k\leqq9,\ k$ は整数$)$

よって　$\frac{10!\cdot2^{10-k}}{k!(10-k)!}-\frac{10!\cdot2^{9-k}}{(k+1)!(9-k)!}$

$=\frac{10!\cdot2^{9-k}}{(k+1)!(10-k)!}\{2(k+1)-(10-k)\}$

$=\frac{10!\cdot2^{9-k}}{(k+1)!(10-k)!}(3k-8)<0$

$\frac{10!\cdot2^{9-k}}{(k+1)!(10-k)!}>0$ であるから　$k<\frac{8}{3}$

ゆえに，$f(k)<f(k+1)$ を満たす k は　$k=0,\ 1,\ 2$

(2)　(1) から $k\leqq2$ のとき　$f(k)<f(k+1)$

また，$k>\frac{8}{3}$ すなわち $k\geqq3$ のとき　$f(k)>f(k+1)$

よって，最大値は

$$f(3)={}_{10}C_3\cdot2^7=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\cdot2^7=120\cdot128=15360$$

(解説)

5 展開式の一般項は　${}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}=x^3$ とすると　$x^{12-2r}=x^3x^r$　よって　$x^{12-2r}=x^{3+r}$

両辺の x の指数を比較して　$12-2r=3+r$　よって　$r=3$

したがって，求める係数は　${}_6C_3\cdot 2^3\cdot(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=-160$

(解説)

6 $\{(x-y)+3z\}^5$ の展開式において，z^2 を含む項は　${}_5C_2(x-y)^3(3z)^2$

$(x-y)^3$ の展開式において，xy^2 の項は　${}_3C_2x(-y)^2$

よって，求める係数は　${}_5C_2\cdot 3^2\cdot{}_3C_2\cdot(-1)^2=10\times 9\times 3\times 1=270$

別解　$(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項は　$\dfrac{5!}{1!2!2!}x(-y)^2(3z)^2$

よって，求める係数は　$\dfrac{5!}{1!2!2!}\cdot(-1)^2\cdot 3^2=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\times 2\cdot 1}\cdot 1\cdot 9=270$

(解説)

7 $(x+y+z)^{88}$ の展開式における同類項は　$x^py^qz^r$ $(p+q+r=88,\ p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0)$

よって，同類項の種類の数は，方程式 $p+q+r=88$ の負でない整数解の個数と同じである。

負でない整数解は，88 個の○と 2 つの仕切り｜の順列を考え，仕切りで分けられた 3 つの部分の○の個数を，左から順に p，q，r とすると得られる。

ゆえに，負でない整数解の個数は，○ 88 個と｜ 2 個を 1 列に並べる順列の総数と同じで　$\dfrac{90!}{88!2!}=4005$ (個)　したがって，$(x+y+z)^{88}$ の展開式の同類項は　4005 種類

別解　$(x+y+z)^{88}=(x+y+z)(x+y+z)\cdots\cdots(x+y+z)$

$(x+y+z)^{88}$ の展開式の同類項は，x，y，z の 3 つの文字から，重複を許して 88 個取る組合せの数と同じである。

よって　${}_3H_{88}={}_{3+88-1}C_{88}={}_{90}C_{88}={}_{90}C_2=4005$ (種類)