改・数学②第６回小テスト　図形と式２　　1　/ 12

BASIC＋STANDARD問題篇

1　2点A$(6,\ 1)$，B$(0,\ 1)$からの距離の比が$2:1$である点Pの軌跡を求めよ。

2　x，yが4つの不等式$2x+y\leqq 6$，$x+2y\leqq 6$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$を同時に満たすとき，$2x+3y$の最大値，最小値を求めよ。

3　tがすべての実数値をとって変化するとき，$x=t-1$，$y=2t^2+3t$で表される点$(x,\ y)$は1つの曲線上を動く。その曲線を求めよ。

改・数学②第６回小テスト　図形と式２　　2　/ 12

STANDARD問題篇

$\boxed{4}$ 不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$ を満たす x，y に対して，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ m がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 $y=x^2+2mx+1$ の頂点はどんな図形上を動くか。

$\boxed{6}$ 中心が点 $(1,\ 2)$，半径が 3 の円がある。点 P がこの円上を動くとき，点 A $(-3,\ 6)$ と点 P を結ぶ線分 AP を $2:1$ に内分する点 Q の軌跡を求めよ。

改・数学②第６回小テスト　図形と式２

$\boxed{7}$ A $(-2,\ 0)$，B $(7,\ 0)$ とするとき，∠APB が直角となるような点 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{8}$ 放物線 $y=(x-3)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 点 A，B で交わっている。m の値が変化するとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

実戦問題篇

9 平面上の２点を A $(2,\ 2)$，B $(4,\ 3)$ とする。点 P が放物線 $y=-x^2+2x-3$ 上を動くとき，△PAB の面積の最小値を求めよ。

10 xy 平面上の２点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき，ℓ の通りうる範囲を図示せよ。

11 実数 x，y は $4x^2+4y^2+7xy+x+y-1=0$ を満たしているとする。このとき $u=x+y$ および $v=xy$ のとりうる値の範囲を求めよ。

改・数学②第６回小テスト　図形と式２

$\boxed{1}$ 解答　中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が 4 の円

$\boxed{2}$ 解答　$x=2,\ y=2$ のとき最大値 10；$x=0,\ y=0$ のとき最小値 0

$\boxed{3}$ 解答　放物線 $y=2x^2+7x+5$

$\boxed{4}$ 解答　$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{10}$，

$x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最小値 $-\sqrt{10}$

$\boxed{5}$ 解答　放物線 $y=-x^2+1$

$\boxed{6}$ 解答　中心 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$，半径 2 の円

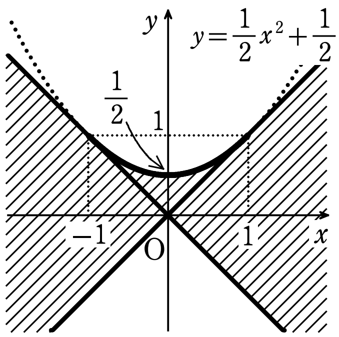
$\boxed{7}$ 解答　点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{9}{2}$ の円。ただし，2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(7,\ 0)$ を除く

$\boxed{8}$ 解答　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3,\ 3<x$ の部分

$\boxed{9}$ 解答　$\dfrac{55}{16}$

$\boxed{10}$ 解答　(1)　$y=(2t-1)x-2t^2+2t$

(2)



$\boxed{11}$ 解答　$-\dfrac{2}{3}\leqq u\leqq\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{17}{16}\leqq v\leqq\dfrac{1}{9}$

改・数学②第６回小テスト　図形と式２

$\boxed{1}$ 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP：BP＝2：1 から　　$AP=2BP$

両辺を 2 乗すると　　$AP^2=4BP^2$　…… ①

また　　$AP^2=(x-6)^2+(y-1)^2$

$BP^2=x^2+(y-1)^2$

これらを ① に代入すると　　$(x-6)^2+(y-1)^2=4\{x^2+(y-1)^2\}$

整理すると　　$3x^2+3y^2+12x-6y-33=0$

両辺を 3 で割って　　$x^2+y^2+4x-2y-11=0$

よって　　$(x+2)^2+(y-1)^2=4^2$　…… ②

逆に，円 ② 上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は，中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が 4 の円である。

$\boxed{2}$ 2 直線 $2x+y=6$，$x+2y=6$ の交点の座標は

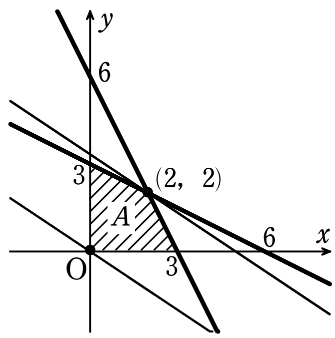
$(2,\ 2)$

与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は 4 点

$(0,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 2)$，$(0,\ 3)$

を頂点とする四角形の周および内部である。



$2x+3y=k$　…… ①

とおくと　　$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{k}{3}$

これは傾きが $-\dfrac{2}{3}$，y 切片が $\dfrac{k}{3}$ である直線を表す。

図から，直線 ① が

点 $(2,\ 2)$ を通るとき，k は最大で　$k=10$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k は最小で　$k=0$

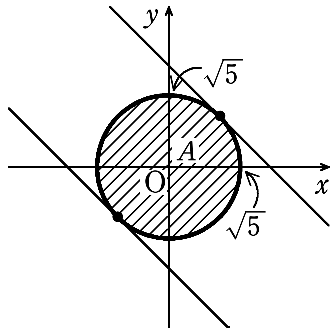
である。

よって，$2x+3y$ は $x=2$，$y=2$ のとき最大値 10 をとり，$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。

$\boxed{3}$ $x=t-1$ から　　$t=x+1$

これを $y=2t^2+3t$ に代入すると　　$y=2(x+1)^2+3(x+1)$

よって　　放物線 $y=2x^2+7x+5$



4　不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$ の表す領域を A とする。

領域 A は，円 $x^2+y^2=5$ およびその内部である。

$$x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，① は傾きが -1，y 切片が k である直線を表す。

図から，直線 ① が第 1 象限で円 $x^2+y^2=5$ に接するとき，k の値は最大となる。

また，直線 ① が第 3 象限で円 $x^2+y^2=5$ に接するとき，k の値は最小となる。

① から　$y=-x+k$

これを $x^2+y^2=5$ に代入して

$$x^2+(-x+k)^2=5$$

よって　$2x^2-2kx+k^2-5=0 \quad \cdots\cdots ②$

この 2 次方程式の判別式は　$D=(-2k)^2-4\cdot 2(k^2-5)=-4(k^2-10)$

直線 ① が円に接するのは $D=0$ のときであるから

$$k^2-10=0 \qquad \text{よって} \qquad k=\pm\sqrt{10}$$

ここで，①，② から

$k=\sqrt{10}$ のとき　$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$k=-\sqrt{10}$ のとき　$x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

したがって，$x+y$ は　$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{10}$，

$x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最小値 $-\sqrt{10}$　をとる。

5　$x^2+2mx+1=(x+m)^2+1-m^2$ より

$$y=(x+m)^2+1-m^2$$

よって，この放物線の頂点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=-m,\quad y=1-m^2$$

m を消去して　$y=-x^2+1$

よって，与えられた放物線の頂点は，放物線 $y=-x^2+1$ 上を動く。

$\boxed{6}$ 点 P の座標を $(s,\ t)$ とし，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

点 P は中心 $(1,\ 2)$，半径 3 の円周上にあるから

$$(s-1)^2+(t-2)^2=9 \quad \cdots\cdots ①$$

点 Q は線分 AP を 2：1 に内分するから

$$x=\frac{1\cdot(-3)+2\cdot s}{2+1},\quad y=\frac{1\cdot 6+2\cdot t}{2+1}$$

すなわち　$s=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2},\ t=\dfrac{3}{2}y-3$

これを ① に代入すると

$$\left\{\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)-1\right\}^2+\left\{\left(\frac{3}{2}y-3\right)-2\right\}^2=9$$

整理すると　$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=4 \quad \cdots\cdots ②$

よって，点 Q は円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上にある任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ を中心とする半径 2 の円である。

$\boxed{7}$ $\angle$APB が直角であるから，$\triangle$APB は辺AB を斜辺とする直角三角形である。

よって　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=\mathrm{AB}^2$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると　$(x+2)^2+y^2+(x-7)^2+y^2=9^2$

整理すると　$x^2+y^2-5x-14=0$

よって，点 P は円 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{4}$ 上にある。

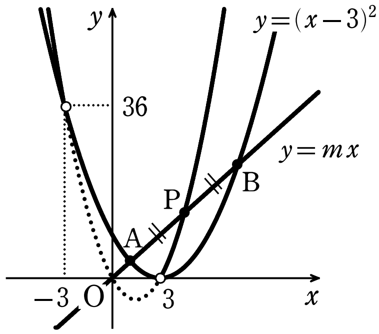
ただし，P が A，B に一致したときを除く。

逆に，この円上の，2 点 A $(-2,\ 0)$，B $(7,\ 0)$ を除く点 P $(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は，点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{9}{2}$ の円である。

ただし，2 点 A $(-2,\ 0)$，B $(7,\ 0)$ を除く。

改・数学②第６回小テスト　図形と式２



$\boxed{8}$ $y=(x-3)^2$ と $y=mx$ から y を消去して整理すると

$$x^2-(m+6)x+9=0 \quad \cdots\cdots ①$$

判別式を D とすると

$$D=(m+6)^2-4\cdot1\cdot9$$
$$=m^2+12m=m(m+12)$$

放物線と直線が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときであるから　　$m(m+12)>0$

ゆえに　　$m<-12$，$0<m$　$\cdots\cdots ②$

2 つの交点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とする。

α，β は ① の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+6$$

よって，中点 P の座標を (x, y) とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+6}{2} \quad \cdots\cdots ③ \qquad また \qquad y=mx \quad \cdots\cdots ④$$

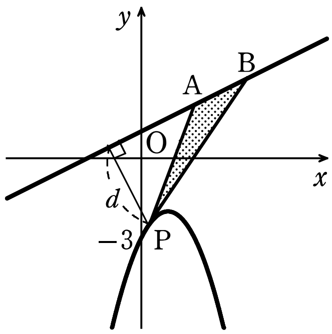
③ から　　$m=2x-6$　$\cdots\cdots ⑤$

⑤ を ④ に代入して　　$y=(2x-6)x$　　すなわち　　$y=2x^2-6x$

⑤ を ② に代入して　　$2x-6<-12$，$0<2x-6$　　すなわち　　$x<-3$，$3<x$

よって，求める軌跡は　　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3$，$3<x$ の部分

$\boxed{9}$ P$(t,\ -t^2+2t-3)$ とおく。



直線 AB の方程式は

$$y-2=\frac{3-2}{4-2}(x-2)\quad すなわち\quad x-2y+2=0$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

点 P と直線 AB の距離 d は

$$d=\frac{|t-2(-t^2+2t-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|2t^2-3t+8|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{8}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{8\sqrt{5}}$$

よって，d は $t=\dfrac{3}{4}$ で最小値 $\dfrac{55}{8\sqrt{5}}$ をとる。

このとき，△PAB の面積 S は最小で　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{55}{8\sqrt{5}}=\dfrac{55}{16}$

参考　面積が最小になるときの P の座標は　$\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{33}{16}\right)$

10 (1)　ℓ_t の方程式は　$y-t=\dfrac{(1-t)-t}{(t-1)-t}(x-t)$

すなわち　$y=(2t-1)x-2t^2+2t$

(2)　ℓ_t の方程式を t について整理すると

$$2t^2-2(x+1)t+x+y=0 \quad \cdots\cdots ①$$

左辺を $f(t)$ とすると　$f(t)=2\left(t-\dfrac{x+1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}+y$

① が $0\leqq t\leqq 1$ である解をもつのは，次の 2 つの場合である。

[1]　2 つの解がともに $0\leqq t\leqq 1$ の場合

$$\frac{D}{4}=(x+1)^2-2(x+y)\geqq 0,\quad f(0)=x+y\geqq 0,$$

$$f(1)=2-2(x+1)+x+y\geqq 0,\quad 0\leqq\frac{x+1}{2}\leqq 1$$

よって　$y\leqq\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$,

$-1\leqq x\leqq 1$，$y\geqq -x$，$y\geqq x$

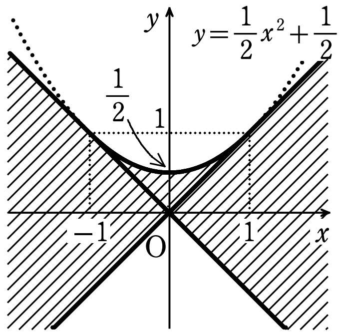
[2]　1 つの解が $0\leqq t\leqq 1$ の場合

$$f(0)f(1)=(x+y)(-x+y)\leqq 0$$

したがって　$(x+y)(-x+y)\leqq 0$

[1]，[2] の場合を合わせると，求める領域は図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



別解　$g(x)=(2t-1)x-2t^2+2t$ とおく。

$$g(x)=-2t^2+2(x+1)t-x=-\frac{1}{2}\{x-(2t-1)\}^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

よって　$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}-g(x)=\dfrac{1}{2}\{x-(2t-1)\}^2$

この式は放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ と 直線 $y=g(x)$ (直線 ℓ_t) の接点の x 座標が $2t-1$ であることを表す。

t を $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で動かすと，直線 ℓ_t の通りうる範囲は上の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。

11

$$4x^2+4y^2+7xy+x+y-1=4(x+y)^2-xy+x+y-1$$
$$=4u^2-v+u-1$$

であるから　$4u^2-v+u-1=0$

ゆえに　$v=4u^2+u-1$　…… ①

$u=x+y$，$v=xy$ から，x，y は 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の解である。

x，y は実数であるから，この方程式の判別式 D について

$$D=u^2-4v \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

① を ② に代入して　$u^2-4(4u^2+u-1) \geqq 0$

よって　$15u^2+4u-4 \leqq 0$　すなわち　$(3u+2)(5u-2) \leqq 0$

したがって　$-\dfrac{2}{3} \leqq u \leqq \dfrac{2}{5}$　…… ③

また，① から　$v=4\left(u+\dfrac{1}{8}\right)^2-\dfrac{17}{16}$

③ の範囲において，v のとりうる値の範囲は，

グラフより　$-\dfrac{17}{16} \leqq v \leqq \dfrac{1}{9}$