改・数学③第７回小テスト　二次曲線　　1 / 4

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\boxed{2}$ 次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2) $4x^2-y^2=1$

$\boxed{3}$ 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2=-8x$　　(2) $x^2=2y$

$\boxed{4}$ 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$

(2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ $\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ $(-2\sqrt{5},\ 1)$

(4) $y^2=4x$ $(1,\ -2)$

$\boxed{5}$ x，y の方程式 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ はどのような図形を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

$\boxed{6}$ 方程式 $4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$ はどのような図形を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

$\boxed{7}$ 点 $(1,\ 3)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $x+2y=1$ の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

$\boxed{\text{実戦問題篇}}$

$\boxed{9}$ 【2011 慶應（医）】

方程式 $2x^2-y^2+8x+2y+11=0$ が表す曲線は，頂点が $\left({}^{ア}\boxed{},\ {}^{イ}\boxed{}\right)$ と $\left({}^{ウ}\boxed{},\ {}^{エ}\boxed{}\right)$，焦点が $\left({}^{オ}\boxed{},\ {}^{カ}\boxed{}\right)$ と $\left({}^{キ}\boxed{},\ {}^{ク}\boxed{}\right)$ の双曲線で，その漸近線の方程式は $y={}^{ケ}\boxed{}$ および $y={}^{コ}\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$ 【2011 日本医科（医）】　問2,3は略

xy 平面上に2点O$(0,0)$，A$(a,1)$ をとり，

$$\mathrm{OP}-\mathrm{AP}=1$$

を満たす点P(x,y) の描く軌跡を H_a とする。ただし，a は正の数であり，OP，APはそれぞれ線分の長さを表す。

問1　曲線 H_a の方程式を y について解いた形に表し，x の変域（点P(x,y) が H_a 上を動くとき，x の取り得る値の範囲）を求めよ。

1 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

2 次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2) $4x^2-y^2=1$

3 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2=-8x$　　(2) $x^2=2y$

4 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　$\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　$\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(-2\sqrt{5},\ 1)$　　(4) $y^2=4x$　$(1,\ -2)$

5 x，y の方程式 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ はどのような図形を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

6 方程式 $4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$ はどのような図形を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

7 点 $(1,\ 3)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

8 楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $x+2y=1$ の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

9 【2011 慶應（医）】

方程式 $2x^2-y^2+8x+2y+11=0$ が表す曲線は，頂点が $(^{ア}\boxed{},\ ^{イ}\boxed{})$ と $(^{ウ}\boxed{},\ ^{エ}\boxed{})$，焦点が $(^{オ}\boxed{},\ ^{カ}\boxed{})$ と $(^{キ}\boxed{},\ ^{ク}\boxed{})$ の双曲線で，その漸近線の方程式は $y=^{ケ}\boxed{}$ および $y=^{コ}\boxed{}$ である。

10 【2011 日本医科（医）】　問2,3は略

xy 平面上に2点O$(0,0)$，A$(a,1)$ をとり，

$$\mathrm{OP}-\mathrm{AP}=1$$

を満たす点P(x,y) の描く軌跡を H_a とする。ただし，a は正の数であり，OP，APはそれぞれ線分の長さを表す。

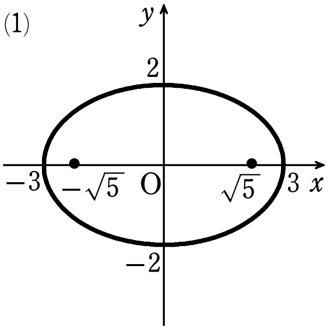
問1　曲線 H_a の方程式を y について解いた形に表し，x の変域（点P(x,y) が H_a 上を動くとき，x の取り得る値の範囲）を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さの順に

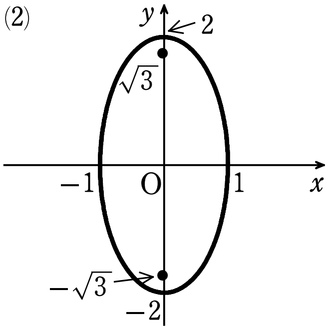
(1)　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$；6；4；〔図〕

(2)　$(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$；4；2；〔図〕

(1)



(2)



$\boxed{2}$ 解答　焦点，頂点，漸近線の順に

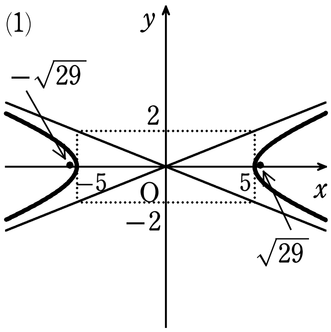
(1)　2 点 $(\sqrt{29},\ 0)$，$(-\sqrt{29},\ 0)$；2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$；

2 直線 $y=\dfrac{2}{5}x$，$y=-\dfrac{2}{5}x$；〔図〕

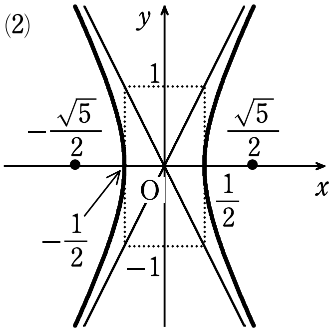
(2)　2 点 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$；2 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$；

2 直線 $y=2x$，$y=-2x$；〔図〕

(1)



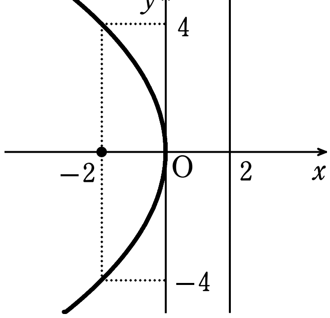
(2)



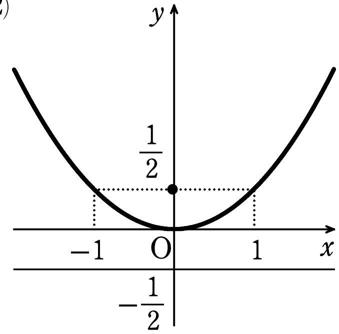
$\boxed{3}$ 解答　(1)　焦点は点 $(-2,\ 0)$，準線は直線 $x=2$，概形は〔図〕

(2)　焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，準線は直線 $y=-\dfrac{1}{2}$，概形は〔図〕

(1)



(2)



$\boxed{4}$ 解答 (1) $2x+3\sqrt{3}y-12=0$ (2) $\sqrt{3}x-2y-4=0$ (3) $\sqrt{5}x+2y+8=0$
(4) $x+y+1=0$

$\boxed{5}$ 解答 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した楕円

$\boxed{6}$ 解答 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した双曲線

$\boxed{7}$ 解答 $x+y=4$，$5x-11y=-28$

$\boxed{8}$ 解答 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$\boxed{9}$ 解答 (ア) -2 (イ) 3 (ウ) -2 (エ) -1 (オ) -2 (カ) $1+\sqrt{6}$
(キ) -2 (ク) $1-\sqrt{6}$ (ケ) $\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1$ (コ) $-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}+1$
((イ) と (エ)，(カ) と (ク)，(ケ) と (コ) は入れ替えてもよい)

$\boxed{10}$ 解答 問1 $y=\dfrac{4(a^2-1)x^2-4a^3x+a^4}{4a(a-2x)}$，$x>\dfrac{a}{2}$

$\boxed{1}$ (1)　$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ より，焦点の座標は　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

長軸の長さ　$2\times3=6$，短軸の長さ　$2\times2=4$

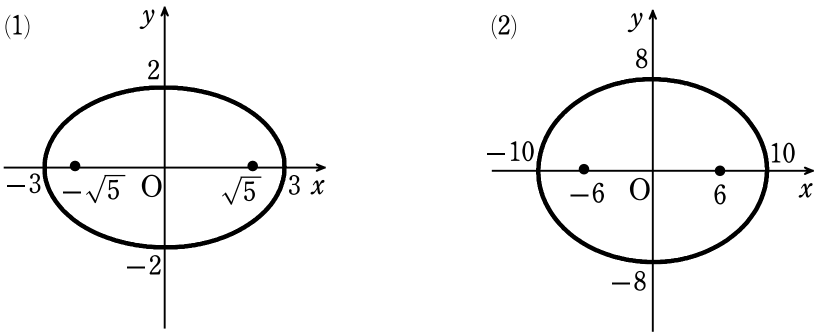
〔図〕

(2)　$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$$

$\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$ より，焦点の座標は　$(6,\ 0)$，$(-6,\ 0)$

長軸の長さ　$2\times10=20$，短軸の長さ　$2\times8=16$

〔図〕



(3)　$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より，焦点の座標は　$(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$

長軸の長さ　$2\times2=4$，短軸の長さ　$2\times1=2$

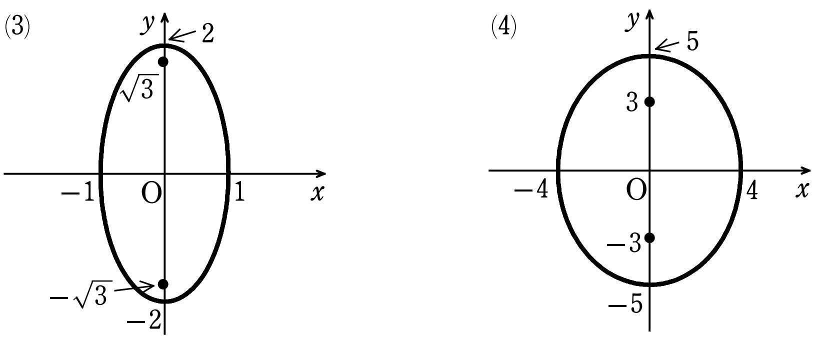
〔図〕

(4)　$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ より，焦点の座標は　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

長軸の長さ　$2\times5=10$，短軸の長さ　$2\times4=8$

〔図〕



$\boxed{2}$ (1)　$\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$ より，焦点は　2 点 $(\sqrt{29},\ 0)$，$(-\sqrt{29},\ 0)$

頂点は　2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線は　2 直線　$y=\dfrac{2}{5}x$，$y=-\dfrac{2}{5}x$

〔図〕

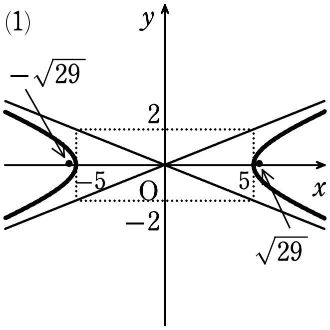
(2) $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}-y^2=1$

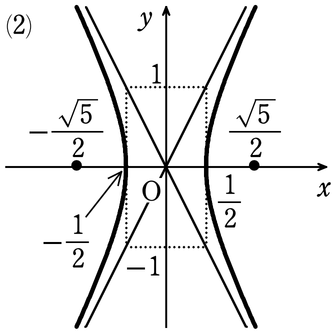
$\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より，焦点は　2 点 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$

頂点は　2 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

漸近線は　2 直線　$y=2x$，$y=-2x$

〔図〕



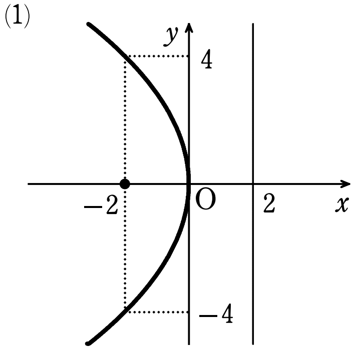


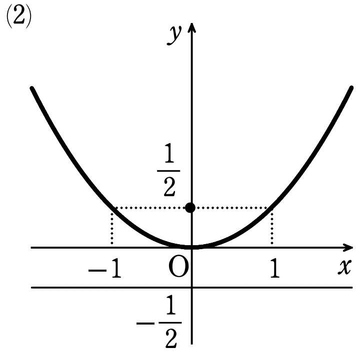
$\boxed{3}$ (1)　$y^2=-8x$ から　$y^2=4\cdot(-2)\cdot x$

焦点は　点 $(-2,\ 0)$　　準線は　直線 $x=2$

(2)　$x^2=2y$ から　$x^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot y$

焦点は　点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$　　準線は　直線 $y=-\dfrac{1}{2}$





$\boxed{4}$ (1)　接線の方程式は　$\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\,y=1$

よって　　$2x+3\sqrt{3}\,y-12=0$

(2)　接線の方程式は　$\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\,x+\left(-\dfrac{1}{2}\right)y=1$

よって　　$\sqrt{3}\,x-2y-4=0$

(3)　接線の方程式は　$\dfrac{1}{16}\cdot(-2\sqrt{5})x-\dfrac{1}{4}\cdot1\cdot y=1$

よって　　$\sqrt{5}x+2y+8=0$

(4)　接線の方程式は　$(-2)y=2(x+1)$

よって　　$x+y+1=0$

$\boxed{5}$ 方程式から　　$4(x^2-2x+1^2)-4\cdot1^2+9(y^2+4y+2^2)-9\cdot2^2+4=0$

よって，$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$ から　　$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$　……①

① は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ……② を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した楕円を表す。

参考　楕円 ② の焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，楕円 ① の焦点の座標は $(\sqrt{5}+1,\ 0-2)$，$(-\sqrt{5}+1,\ 0-2)$ すなわち，$(1+\sqrt{5},\ -2)$，$(1-\sqrt{5},\ -2)$ である。

$\boxed{6}$ この方程式を変形すると　　$4(x^2+4x+4)-9(y^2-2y+1)=16-9-43$

すなわち　　$4(x+2)^2-9(y-1)^2=-36$

したがって　　$\dfrac{(x+2)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=-1$

よって，この方程式は，双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した双曲線を表す。

$\boxed{7}$ 接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x+3y_1y=12$　……①

① が点 $(1,\ 3)$ を通るから　$x_1+3\cdot3y_1=12$

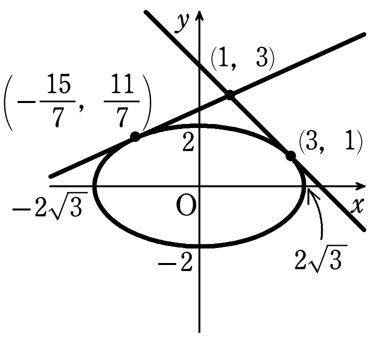
よって　　$x_1=12-9y_1$　　……②

また　　$x_1{}^2+3y_1{}^2=12$

② を代入して整理すると

$7y_1{}^2-18y_1+11=0$

ゆえに　　$(y_1-1)(7y_1-11)=0$



よって　　$y_1=1,\ \dfrac{11}{7}$　　② から，それぞれ　　$x_1=3,\ -\dfrac{15}{7}$

これらを ① に代入して　　$x+y=4$，$5x-11y=-28$

別解　接線は x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は　$y-3=m(x-1)$

すなわち　$y=mx-(m-3)$　……①　とおける。

これを楕円の方程式 $x^2+3y^2=12$ ……② に代入して整理すると

$(3m^2+1)x^2-6m(m-3)x+3(m-3)^2-12=0$　……③

① が ② に接するとき，③ の判別式 D について，$D=0$ であるから

$$\frac{D}{4}=\{-3m(m-3)\}^2-(3m^2+1)\cdot\{3(m-3)^2-12\}=0$$

整理すると　　$11m^2+6m-5=0$　　　ゆえに　　$(m+1)(11m-5)=0$

よって　　$m=-1,\ \dfrac{5}{11}$　　　① から　　$x+y=4$，$5x-11y=-28$

$\boxed{8}$ $x^2+4y^2=4$ ……①，$x+2y=1$ ……②

①，② から y を消去すると　$x^2+(1-x)^2=4$

整理すると　$2x^2-2x-3=0$ ……③

点 P，Q の x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は 2 次方程式 ③ の異なる 2 つの実数解である。

M は線分 PQ の中点であるから，その座標を $(x,\ y)$ とすると　$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

③ において，解と係数の関係により　$x_1+x_2=-\dfrac{-2}{2}=1$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$

② に代入して　$y=\dfrac{1}{4}$

したがって，M の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$\boxed{9}$ 方程式を変形すると　$2(x+2)^2-(y-1)^2+4=0$

よって　$\dfrac{(x+2)^2}{(\sqrt{2})^2}-\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=-1$ ……①

① は双曲線　$\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$ ……② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

② の頂点は $(0,\ \pm 2)$，焦点は $(0,\ \pm\sqrt{6})$，漸近線の方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{2}}\pm\frac{y}{2}=0 \quad すなわち \quad y=\pm\sqrt{2}\,x \quad である。$$

よって，① の頂点は $({}^{ア}-2,\ {}^{イ}3)$ と $({}^{ウ}-2,\ {}^{エ}-1)$

焦点は $({}^{オ}-2,\ {}^{カ}1+\sqrt{6})$ と $({}^{キ}-2,\ {}^{ク}1-\sqrt{6})$

漸近線の方程式は　$y=\pm\sqrt{2}(x+2)+1$

すなわち　$y={}^{ケ}\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}+1$

および　$y={}^{コ}-\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}+1$

((イ) と (エ)，(カ) と (ク)，(ケ) と (コ) は入れ替えてもよい)

$\boxed{10}$