

BASIC問題

- [1] 次の2次方程式を解け。
- (1) $6x^2 - 5x - 6 = 0$ (2) $2x^2 - 6x + 3 = 0$
- [2] 次の不等式を解け。
- (1) $\begin{cases} 4x + 1 < 3x - 1 \\ 2x - 1 \geq 5x + 6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3 > x + 2 \\ 3x > 4x + 2 \end{cases}$
- (3) $2(x - 3) + 5 < 5x - 6 \leq \frac{3x + 4}{3}$
- [3] 次の方程式，不等式を解け。
- (1) $|x - 1| = 2$ (2) $|x + 4| < 5$ (3) $|2x - 3| \geq 4$
- [4] 次の式を計算せよ。
- (1) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{27}} - \frac{1}{\sqrt{12}}$
- [5] 実数 x, y が $x + y = 3$, $xy = -2$ を満たすとき， $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^5 + y^5$ の値を求めよ
- [6] 次の式を簡単にせよ。
- (1) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ (2) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}}$ (3) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

STANDARD問題

- [7] a を定数とするととき，次の不等式を解け。
- (1) $ax \leq 1$ (2) $ax + 6 > 3x + 2a$
- [8] 次の式を因数分解せよ。
- (1) $a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c$ (2) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3$
- [9] 次の方程式，不等式を解け。
- (1) $|x - 3| = 2x$ (2) $|x - 3| < 2x$ (3) $|x| + |x - 2| = 6$
- [10] $\frac{1}{1 + \sqrt{6} + \sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。
- [11] $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ のとき， $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$, $x^6 + \frac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

実戦問題篇

- [12] a を定数とするととき，次の方程式を解け。
- (1) $ax^2 + (a^2 - 1)x - a = 0$ (2) $a^2x + 1 = a(x + 1)$
- [13] * $2^{18} - 1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものを求めよ。
- [14] * 相異なる実数 α, β が $\begin{cases} \alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6} \\ \beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6} \end{cases}$ を満たすとき， $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

15 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a ，小数の部分を b とする。

(1) a と b を求めよ。

(2) $a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

16 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x+2|-|x-1|>x$

(2) $||x-1|-2|-3=0$

17 x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a\geq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど5個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

BASIC問題

- [1] 次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。
- (1) $y = 2x^2 + 8x + 9$
 (2) $y = x^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq 3$)
 (3) $y = -3x^2 - 2x + 4$ ($-1 < x < 2$)
- [2] 次の不等式を解け。
- (1) $5 < x^2 + 4x \leq 21$ (2) $2x + 3 < x^2 < 5$
- [3] 2次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフを y 軸方向に2だけ平行移動したあと， y 軸に関して対称移動させ，更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ， $y = x^2$ のグラフと一致した。 a ， b の値を求めよ。
- [4] グラフが3点 $(1, 3)$ ， $(2, 5)$ ， $(3, 9)$ を通るような2次関数を求めよ。

STANDARD問題

- [5] 2次不等式 $4x^2 + ax + b < 0$ の解が $1 < x < \frac{5}{4}$ であるとき，2次不等式 $bx^2 + ax + 4 \geq 0$ の解を求めよ。
- [6] a は定数とする。関数 $y = 2x^2 - 4ax - a$ ($0 \leq x \leq 2$) について，次の問いに答えよ。
 (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。
- [7] 次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
 (1) 2次不等式 $x^2 - (m-1)x + 3 > 0$ の解がすべての実数となる。
 (2) 2次不等式 $-x^2 + 2mx + m \geq 0$ が解をもつ。
- [8] 2次方程式 $x^2 - (a+2)x + a(2a+1) = 0$ の異なる2つの実数解を α ， β とするとき，
 $1 < \alpha < \frac{3}{2} < \beta$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。
- [9] 2次方程式 $x^2 - 2mx + 9 = 0$ が $2 < x < 4$ の範囲で異なる2つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
- [10] 2次方程式 $x^2 + 2ax + 2a^2 + 2ab + 4 = 0$ は，定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという。実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ。
- [11] $f(x) = -x^2 + ax + a - 2$ ， $g(x) = x^2 - (a-2)x + 3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。
 (1) どんな x の値に対しても $f(x) < g(x)$ が成り立つ。
 (2) どんな x_1 ， x_2 の値に対しても， $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

- [12] x についての次の2つの不等式

$$2x^2 - 3x - 5 > 0$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0$$

を同時に満たす整数 x がただ1つ存在するとき、定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

- [13] 2次不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で常に成り立つとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

- [14] $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、 x の関数 $y = \sum_{k=1}^{2n+1} |x - k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ。

BASIC問題篇

- [1] $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。次の三角比の値を求めよ。
- (1) $\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\cos \theta$, $\sin \theta$
- (2) $\tan \theta = -3$ のとき, $\cos \theta$, $\sin \theta$
- [2] $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, 次のような θ を求めよ。
- (1) $2\sin \theta - 1 = 0$ (2) $\sqrt{2}\cos \theta + 1 = 0$
- (3) $3\tan \theta = \sqrt{3}$ (4) $(\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) = 0$
- [3] $\triangle ABC$ において, $a = \sqrt{6}$, $A = 60^\circ$, $C = 45^\circ$ のとき, c と外接円の半径 R を求めよ。
- [4] $\triangle ABC$ において, 次のものを求めよ。
- (1) $c = 4$, $a = 6$, $B = 60^\circ$ のとき b
- (2) $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{17}$ のとき C
- [5] $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 3$ とする。 $\triangle ABC$ の外接円の半径 R と, 内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

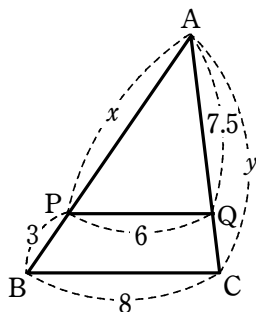
- [6] θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ かつ $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たすとき, $\cos \theta + \sin \theta$, $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ の値を求めよ。
- [7] 円に内接する四角形 $ABCD$ において, $AB = 2$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 4$ とする。次の値を求めよ。
- (1) AC の長さ (2) 四角形 $ABCD$ の面積
- (3) 2つの対角線 AC と BD の交点を E とすると $BE : ED$ の比
- [8] $a = 5$, $b = 6$, $c = 4$ の $\triangle ABC$ がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D , 辺 BC の中点を M とするとき, 線分 AD , AM の長さを求めよ。
- [9] $\triangle ABC$ が次の条件を満たすとすれば, どんな三角形か。
- (1) $\sin A = \sin B$
- (2) $\sin A \cos A = \sin B \cos B$

BASIC+STANDARD問題

- [1] 3 辺の長さが a , $a-1$, $50-a$ の三角形がある。このとき, a の値の範囲を求めよ。
また, この三角形が直角三角形となるとき, a の値を求めよ。

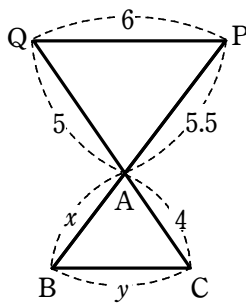
- [2] 次の図において, x , y の値を求めよ。

(1)



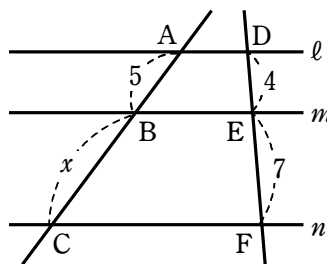
$PQ \parallel BC$

(2)



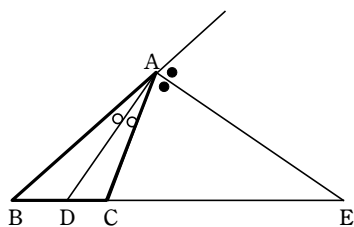
$PQ \parallel BC$

(3)



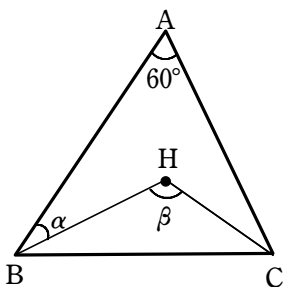
$l \parallel m \parallel n$

- [3] 下の図で, $AB=6$, $BC=3$, $CA=4$ であり, AD は $\angle BAC$ の二等分線, AE は $\angle BAC$ の外角の二等分線である。
 BD の長さ と BE の長さをそれぞれ求めよ。

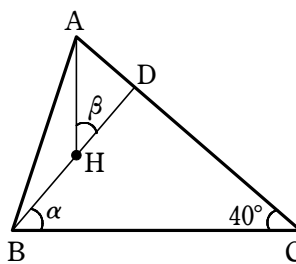


- [4] 下の図において, 点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。角 α , β を求めよ。

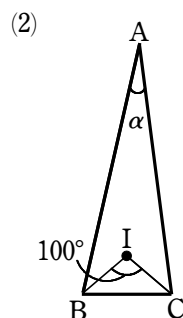
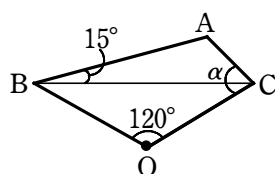
(1)



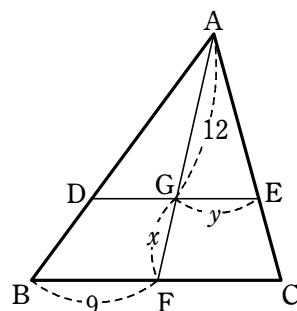
(2)



- [5] 右の図で、点 O は $\triangle ABC$ の外心、
点 I は $\triangle ABC$ の内心である。 α を求
めよ。



- [6] 右の図において、点 G は $\triangle ABC$ の重心であり、
 $DE \parallel BC$ である。このとき、 x 、 y の値を求めよ。



- [7] $\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC 上にそれぞれ点 R 、 Q があり、 $AR : RB = 5 : 1$ 、
 $AQ : QC = 2 : 3$ である。線分 BQ と CR の交点を O 、直線 AO と辺 BC の交点を P と
するとき、次の比を求めよ。

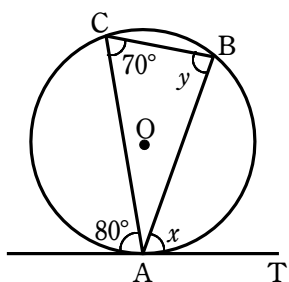
(1) $BP : PC$

(2) $AO : OP$

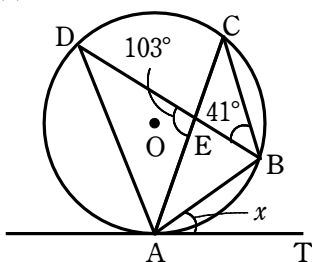
(3) $\triangle ABC : \triangle OBC$

- [8] 次の図において、直線 AT は点 A で円 O に接している。 x と y を求めよ。

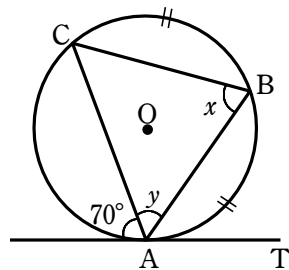
(1)



(2)

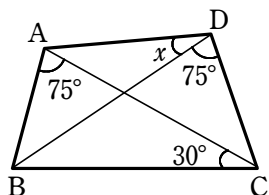


(3)

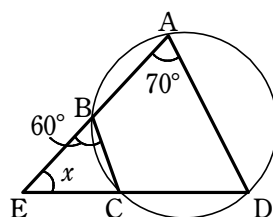


- [9] 次の図において、角 x の大きさを求めよ。

(1)

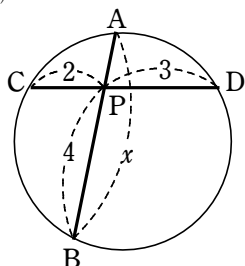


(2)

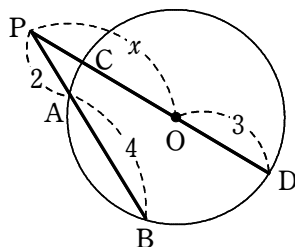


10 下の図において、 x の値を求めよ。O は円の中心とする。

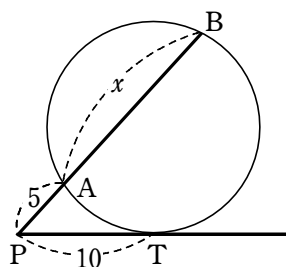
(1)



(2)

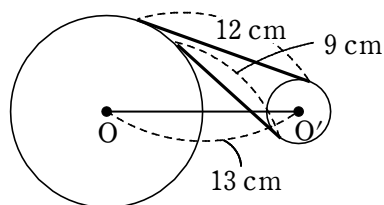


(3)



PT は円の接線

11 右の図のように、中心間の距離が 13 cm，共通外接線の長さが 12 cm，共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O，O' がある。
この 2 つの円の半径を，それぞれ求めよ。



12 3 辺の長さが a ， b ， c の直角三角形の外接円の半径が $\frac{3}{2}$ ，内接円の半径が $\frac{1}{2}$ のとき，

次の問いに答えよ。ただし， $a \geq b \geq c$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) b と c の値を求めよ。

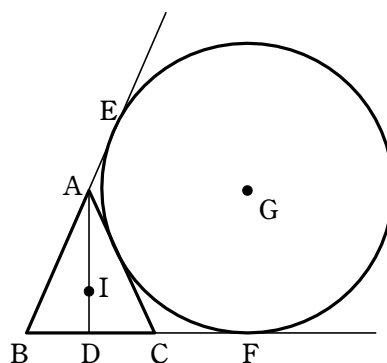
実戦問題

- 13 AB=2, BC=x, AC=4-x であるような $\triangle ABC$ がある。

- (1) x の値の範囲を求めよ。
 (2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

- 14 鋭角三角形 ABC において, AB=8 とする。辺 AC を 1:2 に内分する点を D とし, 辺 BC を 3:2 に内分する点を E とする。このとき, 2 点 D, E を通る直線 ℓ と 2 点 A, B を通る直線の交点を P とすると, $AP = \frac{7}{\square}$ である。また, 直線 ℓ と三角形 ABC の外接円との 2 つの交点のうち P に近い方の交点を Q とし, 他の交点を R とする。このとき, $PQ=3$ ならば, $QR = \frac{1}{\square}$ である。

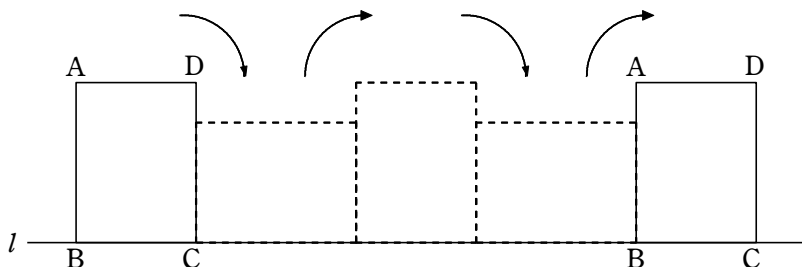
- 15 AB=AC である二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし, 内接円と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で, 辺 BC の延長と点 F で接し, 辺 AC と接する $\angle B$ 内の円の中心を G とする。
 (1) $AD=GF$ となることを証明せよ。
 (2) $AB=7, BD=3$ のとき, IG の長さを求めよ。



- 16 C_1, C_2, C_3 は, 半径がそれぞれ $a, a, 2a$ の円とする。いま, 半径 1 の円 C にこれらが内接していて, C_1, C_2, C_3 は互いに外接しているとき, a の値を求めよ。

- 17 (出典・2009 常総学院高)

図のように, $AB=4\text{ cm}, BC=3\text{ cm}, CA=5\text{ cm}$ である長方形 ABCD を直線 l に沿って, 滑ることなくちょうど 1 回転するまで転がす。



頂点 B が動いた跡の線の長さは $\frac{7}{\square}\pi\text{ cm}$ であり, 頂点 B が動いた跡の線と直線 l とで囲まれた部分の面積は $\frac{1}{\square}\text{ cm}^2$ である。ただし, π は円周率とする。

BASIC+Standard問題

- [1] 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。
- [2] 次の方程式の整数解をすべて求めよ。
(1) $28x + 95y = 3$ (2) $103x - 75y = 7$
- [3] (1) 方程式 $xy - 2x + 5y = 1$ の整数解をすべて求めよ。
(2) 方程式 $3xy + 3x + y = 5$ を満たす 2 つの整数 x, y の組をすべて求めよ。
- [4] n は自然数とする。 $n^2 - 28n + 160$ が素数となるような n をすべて求めよ。
- [5] (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。
(2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。
- [6] n を正の整数とする。 $N = 1890n$ とすると、 $\sqrt{N}$ が整数になるような最小の n の値を求めよ。
- [7] $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。
- [8] 次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。
(1) $xyz = x + y + z \quad (x < y < z)$
(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{4}{3} \quad (x \leq y \leq z)$

實踐問題

- 9 $\frac{40}{21}, \frac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち、最も小さいものを求めよ。
- 10 方程式 $48x + 539y = 77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ。
- 11 次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。
- $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$
- 12 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ になり、7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。 a, b, c を求めよ。また、 N を 10 進法で表せ。
- 13 $100!$ を素因数分解すると、 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^{16} \cdot 11^9 \cdot 13^7 \cdots$ となる。 a, b, c の値を求めよ。
- 14 素数 p, q, r に対して $2p^3qr + 19p^2q^2r - 10pq^3r = 111111$ が成り立つとき、 p, q, r の値を求めよ。

- [1] 解答 173
- [2] 解答 k は整数とする。
 (1) $x = 95k + 51, y = -28k - 15$ (2) $x = 75k - 56, y = 103k - 77$
- [3] 解答 $(x, y) = (-4, -7), (-2, -1), (4, 1), (-6, 11), (-8, 5), (-14, 3)$
 解答 $(x, y) = (-1, -4), (0, 5)$
- [4] 解答 $n = 7, 21$
- [5] 解答 (1) 24 (2) 5130
- [6] 解答 210
- [7] 解答 $(x, y) = (1, -2), (1, -4)$
- [8] 解答 (1) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ (2) $(x, y, z) = (1, 2, 4)$
- [9] 解答 $\frac{273}{8}$
- [10] 解答 $x = -77 + 539t, y = 7 - 48t$ (t は整数)
- [11] 解答 $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2),$
 $(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 3)$
- [12] 解答 $a = 2, b = 3, c = 1; N = 66$
- [13] 解答 $a = 97, b = 48, c = 24$
- [14] 解答 (ア) 7 (イ) 3 (ウ) 13