数学②　第１回試練　三角関数　

$\boxed{1}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。(1)　$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2)　$\tan\theta=-1$

$\boxed{2}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。(1)　$\sin\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2)　$\cos\theta\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\theta<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(4)　$2\sin\theta+\sqrt{3}\leqq0$　(5)　$2\cos\theta>\sqrt{3}$　(6)　$\tan\theta+1\geqq0$

$\boxed{3}$ 次の値を求めよ。(1)　$\sin15^\circ$　(2)$\tan105^\circ$

$\boxed{4}$ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。(1)$\cos2\alpha$　(2)$\sin2\alpha$　(3)$\sin\dfrac{\alpha}{2}$

$\boxed{5}$ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$とする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　(2)　$\sin\beta$　(3)　$\sin(\alpha-\beta)$　(4)　$\cos(\alpha+\beta)$

$\boxed{6}$ 関数 $y=2\sin x-\sqrt{5}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。$\sin2\theta+\sin\theta>0$

$\boxed{8}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。$\sqrt{3}\sin x+\cos x<\sqrt{2}$

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。$y=5\cos^2x+6\sin x\cos x-3\sin^2x$

$\boxed{10}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $2\cos2\theta+4\cos\theta+5-a=0$ の異なる解の個数を，定数 a の値の範囲によって調べよ。

$\boxed{11}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。(1)　$\cos\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\tan\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$　(3)　$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4)　$\tan\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)\leqq-1$

$\boxed{12}$ $0\leqq x\leqq\pi$ における 関数 $y=12\sin x+5\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。
また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

$\boxed{13}$ $0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ の範囲で，関数 $f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$，$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$ を考える．(1)　$f(60^\circ)=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である．

(2)　$\theta=\boxed{\text{イウ}}^\circ$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ をとる．

(3)　$g(\theta)=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\cos\left(\theta+\boxed{\text{キク}}^\circ\right)$ と表せる．とくに，$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，$f(\theta)$

$=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{10}$ となる．

$\boxed{14}$ $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，次の問いに答えよ。(1)　$\sin\theta$，$\cos\theta$ を t の式で表せ。

(2)　関数 $y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}$ について，y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ とする。

BASIC問題

1 (1) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\frac{\sqrt{2^3}\times2^2\times(2^2\times3^2)^3}{6^5\times4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times2}{2^3}$ を簡単にせよ。

2 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

3 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

4 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

5 (1) $\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

6 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

7

Standard問題篇

8 $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ の値を求めよ。

9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x-24\cdot2^{-x}=5$　　(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}>\frac{2}{81}$

10 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq0$　　(2) $2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq2$

(3) $2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

11 ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

12 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})-10$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x\neq 1$ とする。

BASIC問題

$\boxed{1}$ 2 点 A(-3)，B(5) について，次のものを求めよ。

(1)　2 点 A，B 間の距離

(2)　線分 AB を 3：1 に内分，外分する点の座標

(3)　線分 AB の中点

$\boxed{2}$ 次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(6,\ -1)$ を通り，直線 $2x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線

(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $5x+2y-3=0$ に平行な直線，垂直な直線

(3)　点 $(1,\ -1)$ を通り，2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に平行な直線，垂直な直線

$\boxed{3}$ (1)　2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ k を定数とする。点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ。

STANDARD問題

$\boxed{5}$ 直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A$(2,\ 5)$ と対称な点を B，点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき，次のものを求めよ。

(1)　点 B の座標　　　(2)　点 H の座標

$\boxed{6}$ 3 直線 $x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ と直線 $ax+y+a=0$ が異なる 2 点 A，B で交わる。

(1)　$a=-1$ のとき，弦 AB の長さを求めよ。

(2)　弦 AB の長さが最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 2 つの円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 つの円 ①，② の 2 つの交点と点 $(4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に 2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点 P が放物線上の $1 \leqq x \leqq 7$ の範囲を動くとき，△PAB の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

11 点 P$(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた 2 本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

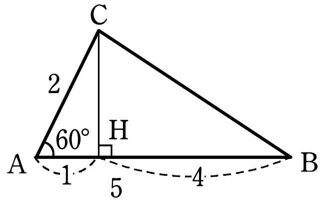
12 円 $x^2+y^2=4$　…… ① と円 $(x-5)^2+y^2=1$　…… ② の共通接線の方程式を求めよ。

BASIC問題

1 △ABCにおいて，辺BCを2：1に内分する点をD，外分する点をEとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{BD}$　(5) $\overrightarrow{GD}$

2 右の図は，AB＝5，AC＝2，∠BAC＝60° の△ABCの頂点Cから，底辺ABに垂線CHを下ろしたものである。次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CH}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$　(4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

3 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるとき，p，q の値を求めよ。

4 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3\sqrt{2}$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

5 $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。ただし，tは実数とする。

6 平行四辺形ABCDの辺ABを3：2に内分する点をE，辺ADを2：1に内分する点をF，線分BFと線分CEの交点をKとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{AK}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

STANDARD問題

7 三角形ABCの内心をIとし，辺BC，CA，ABの長さを，それぞれ a，b，c とする。$\overrightarrow{AI}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ となる実数 r，s を，a，b，c を用いて表せ。

8 三角形ABCの3辺の長さをAB＝4，BC＝3，CA＝2とする。この三角形の外心をOとおく。$\overrightarrow{CO}$を $\overrightarrow{CA}$と $\overrightarrow{CB}$で表せ。

9 △ABCと点Pがあり，$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) △PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

(2) 直線AP上に点Qをとり，△QABと△QBCの面積比が3：1になるようにする。このとき，$\overrightarrow{QA}$，$\overrightarrow{QB}$，$\overrightarrow{QC}$ が満たす関係式を求めよ。

10 △OABにおいて，OA＝3，OB＝4，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=8$ とする。$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で，s，t が $3s+t\leqq3$，$s+t\geqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たしながら動くとき，点Pが描く図形の面積を求めよ。

11 A $(-1,\ 5)$，B $(2,\ 4)$，$\vec{d}=(1,\ -2)$ とする。次の直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

(1) A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線　　(2) 2 点 A，B を通る直線

12 次のような直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) 点 A $(5,\ 3)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ -2)$ に垂直な直線

(2) O は原点とする。点 A $(3,\ -1)$ を通り，OA に垂直な直線

13 平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $\left|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

実戦問題

14 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ。

15 △ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に引いた垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする．$0<t<1$ の範囲で関係式 $(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-t(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

16 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A, B, C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\leqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

BASIC問題

1 (1) 極限値 $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}$ を求めよ。

(2) $f(x)=x^4-2x^3+1$ のとき，$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ を求めよ。

2 関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

3 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C(0，4) から引いた接線の方程式を求めよ。

4 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-3x^4+16x^3-18x^2$

(2) $y=x^4-6x^2-8x+10$

5 曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

STANDARD問題

6 次の関数を，変数 t で微分せよ。ただし，t 以外の文字 V_0，β，h，v_0，g は定数である。

(1) $V=V_0(1+\beta t)$　　(2) $s=h+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

7 曲線 $y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ $[t \fallingdotseq 0]$ における接線が x 軸，y 軸およびこの曲線と再び交わる点を，それぞれ Q，R，S とする。

(1) S の x 座標を t で表せ。　　(2) QR：RS を求めよ。

8 関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 つの曲線 $y=x^3+ax^2$ と $y=x^2+bx+c$ が点 (2，4) において，共通の接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

10 2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

11 $x^2+2y^2=4$ のとき，$x(x+4y^2)$ の最大値，最小値を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。曲線 C に点 A $(-2,\ k)$ から異なる 3 本の接線が引けるような定数 k の値の範囲を求めよ。

13 k を定数とする。3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ が異なる 3 つの実数解 α，β，γ（ただし $\alpha<\beta<\gamma$）をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α，β，γ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $\alpha\gamma$ が最小となるときの k の値と，そのときの $\alpha\gamma$ の最小値を求めよ。

実戦問題

14 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$ (a，b は定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるとき，a の値を求めよ。

(3)　(2) で求めた a の値に対し，$f(x)$ の区間 $-4\leqq x\leqq 4$ における最大値が 5 であるとする。このとき，b の値とこの区間での $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

15 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

16 a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

BASIC問題

1 (1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$ を求めよ。

2 等式 $f(x)=1+2\displaystyle\int_{0}^{1}(xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

3 等式 $\displaystyle\int_{a}^{x}f(u)\,du=5x^2-ax-7a-2$ を満たす関数 $f(x)$ と正の定数 a の値を求めよ.

4 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2+3x-4|dx$ を求めよ。

5 曲線 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

STANDARD問題

6 xy 平面において，連立不等式 $y \geqq |x^2-1|$，$y \leqq -x^2+2x+3$ の表す領域を Dの面積を求めよ。

7 2つの放物線 $y=-x^2+2x+3$ と $y=-x^2+6x-3$ に共通して接する直線の方程式を求めよ．また，この直線と2つの放物線とで囲まれた部分の面積を求めよ.

8 a，b，c を定数とする。2つの曲線 $y=x^3+ax+b$ と $y=ax^2+bx+c$ が共有点 P(2，19) をもち，点 P において共通の接線をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b，c の値を求めよ。

(2) 2つの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

9 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，点 (2，0) を通る直線 g で2等分するとき，g の傾きを求めよ。

実戦問題

10 次の関係式を満たす定数 a および関数 $g(x)$ を求めよ。

$$\int_a^x \{g(t)+tg(a)\}dt = x^2-2x-3$$

11 放物線 L：$y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1)　2 つの接点の座標を求めよ。

(2)　円 C の方程式を求めよ。

(3)　2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ とで囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするように，定数 m $(0<m<4)$ の値を定めよ。

13 関数 $f(x)$ は $\begin{cases} x \leqq 0 \text{ では } f(x)=x(x+1) \\ x \geqq 0 \text{ では } f(x)=x(1-x) \end{cases}$ で与えられるとする.

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフを描け.

(2)　積分 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ を求め，曲線 $y=F(x)$ をグラフに示せ.

BASIC問題

1 第 5 項が 10，第 10 項が 25 である等差数列 $\{a_n\}$ の，第 20 項から第 29 項までの和 S を求めよ。

2 ある等比数列の初項から第 n 項までの和が 54，初項から第 $2n$ 項までの和が 63 であるとき，この等比数列の初項から第 $3n$ 項までの和を求めよ.

3 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1\cdot 3$，$3\cdot 5$，$5\cdot 7$，……，$(2n-1)(2n+1)$

4 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\dfrac{1}{1\cdot 5}$，$\dfrac{1}{5\cdot 9}$，$\dfrac{1}{9\cdot 13}$，……

5 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+5n+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

6 3 つの数 -5，a，b がこの順に等差数列をなし，a，b，45 がこの順に等比数列をなす。このとき，a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

7 初項 70 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項から第 20 項までの和が 0 であるとする。このとき，初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

8 数列 1，11，111，1111，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

9 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

(2)　1^2，1^2+2^2，$1^2+2^2+3^2$，$1^2+2^2+3^2+4^2$，……

10 次の和 S を求めよ。

(1)　$S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

(2)　$S=2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2+n$

実戦問題

11 p は素数，m，n は正の整数で $m<n$ とする。m と n の間にあって，p を分母とする既約分数の総和を求めよ。

12 2 以上の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$ を求めよ。

13 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{76}\frac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}$ を求めよ。

BASIC問題

1　$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$一般項を求めよ。

4　$a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

STANDARD問題

6　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=16{a_n}^5$$

7　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(2)　$a_1=3$，$a_2=8$，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

8　$a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

9　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

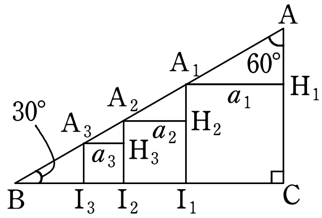
10　漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ のおき換えを利用して求めよ。

実戦問題

11 $a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12 ＊ $a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

13 $A=60°$，$B=30°$，$\mathrm{AC}=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように，1 辺の長さが a_1，a_2，a_3，$\cdots$ の正方形が並んでいる。

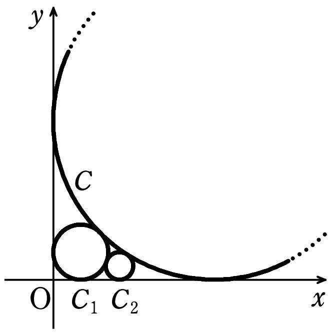


(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) 右の図の $\triangle \mathrm{A_1A_2H_2}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ が相似であることに着目して，一般に a_n，a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3) a_n の値を n を用いて表せ。

14 右図のように，xy 平面上の点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。x 軸，y 軸の正の部分，円 C と接する円で C より小さいものを C_1 とする。更に，x 軸の正の部分，円 C，円 C_1 と接する円を C_2 とする。以下，順に x 軸の正の部分，円 C，円 C_n と接する円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とする。ただし，円 C_{n+1} は円 C_n の右側にあるとする。



(1) a_1，b_1 をそれぞれ求めよ。

(2) a_n，a_{n+1} の関係式を求めよ。

(3) $c_n=\dfrac{1}{1-a_n}$ とおくことにより，数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

BASIC問題

$\boxed{1}$ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える．
OA，OB の中点をそれぞれ P，Q とし OC を $m:n$ に内分する点を R とする．また，△PQR の重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，m，n を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OG}$ の長さ $|\overrightarrow{OG}|$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\vec{a}=(3,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ -1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\boxed{3}$ 原点 O から，2 点 A$(5,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

$\boxed{4}$ 点 A$(3,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ 2,\ 1)$ と xy 平面上に動点 P がある。

(1) AP＋PB の最小値を求めよ。

(2) AP＋PB が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体 ABCD がある．点 P が $10\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}$ を満たしているとき

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ．

(2) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ．

$\boxed{6}$ 平行六面体 OADB−CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM＝2DG となる点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点をNとする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分比 ON：OMを求めよ。

$\boxed{7}$ 3 点 A$(3,\ 6,\ 0)$，B$(1,\ 4,\ 0)$，C$(0,\ 5,\ 4)$ がある。

(1) △ABC の面積を求めよ。

(2) 点 P$(3,\ 4,\ 5)$ から平面 ABC に垂線 PH を下ろす。このとき，線分 PH の長さを求めよ。

(3) 四面体 PABC の体積を求めよ。

実戦問題

8 xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に $x^2+y^2=25$ により定まる円 C があり，平面 $z=4$ の上に $x=1$ により定まる y 軸に平行な直線 ℓ がある。C 上の点 P で，ℓ 上の点との距離の最小値が 5 であるような P の座標をすべて求めよ。

9 点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{d_1}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線 ℓ_1 と，点 $(-1,\ 1,\ -2)$ を通り $\overrightarrow{d_2}=(0,\ -2,\ 1)$ に平行な直線 ℓ_2 がある。ℓ_1，ℓ_2 上にそれぞれ点 P，Q をとるとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

10 四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

11 すべての辺の長さが 1 の四角錐がある。この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

BASIC問題

1　2点A $(2, 5)$，B $(3, 1)$ からの距離の比が $1:2$ である点Pの軌跡を求めよ。

2　連立不等式 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2>25\\4x-3y>12\end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

3　x，y が3つの不等式 $x-3y\geqq-6$，$x+2y\geqq4$，$3x+y\leqq12$ を同時に満たすとき，$2x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

STANDARD問題

4　放物線 $y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ について，次の問いに答えよ。

(1)　頂点Pの座標を (x, y) とするとき，x，y をそれぞれ a で表せ。

(2)　a がすべての実数値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ。

5　2点A $(3, 0)$，B $(0, -3)$ と放物線 $y=x^2$ 上の動点Qとでできる△ABQの重心Gの軌跡を求めよ。

6　m の値が変化するとき，次の2直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$mx-y+5m=0,\quad x+my-5=0$$

7　放物線 $y=(x-3)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる2点A，Bで交わっている。m の値が変化するとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

8　2直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。ただし，2直線のなす角の二等分線は，2直線から等距離にある点の軌跡であるものとする。

9　方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの異なる解が $-1<x<2$ の範囲にある。a，b の満たす関係式を求めよ。また，点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

実戦問題

10 点 $(x,\ y)$ が，不等式 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leqq 1$ の表す領域上を動くとき，次の式の最大値，最小値を求めよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$

(2) x^2+y^2

11 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ を満たして動くとき，点 $\mathrm{Q}(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ.

12 a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $y=2ax-a^2+1$ ……① が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

13 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \leqq 0 \\ x+2y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最大値を a を用いて表せ。

STANDARD問題

1 数列 1，2，3，……，n において，異なる 2 つの項の積の和 を求めよ。($n \geqq 2$)

2 年始めに 10 万円ずつ毎年積み立てることにした．年利率 8 % の複利計算の場合，元利合計が 240 万円を初めて超えるのは何年後か．$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として計算せよ．

3 分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列において，$\dfrac{7}{15}$ は第何項か。また，第 99 項を求めよ。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

4 放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点の個数を求めよ。

5 $a_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ とする。

(1)　$n=1$，2，3，4 に対して，a_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

6 袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率を p_n とする。ただし，$n=1$ のとき，p_1 は取り出した 1 個の球に書かれている数が偶数である確率とみなす。

(1)　p_{n+1} を p_n で表せ。　　(2)　p_n を求めよ。

実戦問題

7 数列 1，2，3，……，n において，互いに隣り合わない 2 つの項の積の和を求めよ。($n \geqq 3$)

8 次のような分数の列がある。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\dfrac{5}{9}$ は第何項か。　　(2)　第 800 項を求めよ。

9 自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

$\boxed{10}$ (1)　$3x+2y \leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

$\boxed{11}$ 3 文字 a，b，c を横に n 個書き並べたものを長さ n の単語と呼ぶことにする。ただし，$n=1$，2，3，…… とする。例えば，$abba$，$baca$，$caab$ はどれも長さ 4 の異なる単語である。

(1)　長さ 1，2 および 3 の単語を，それぞれ列挙せよ。

(2)　長さ n の単語のうち，a を奇数個含むものの数を x_n で，残りのものの数を y_n で表す。このとき，x_n，y_n を求めよ。

実戦問題（記述式）

$\boxed{12}$ x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める.

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n \geqq 2) \end{cases}$$

このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ とする．

$\boxed{13}$ 整数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の式によって定義する．

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　数学的帰納法を用いて $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ であることを示せ．

(2)　a_n，b_n を順次計算して，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の n を求めよ．

(3)　$b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n とそのときの b_n の値を求めよ．

$\boxed{14}$ $a_1=1$，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ。