BASIC問題

1 次の関数のグラフをかけ。また，(2) はその値域を求めよ。

(1) $y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$　(2) $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ $(-1 \leqq x < 0)$

2 次の関数のグラフをかけ。また，その値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+4}-1$　(2) $y=-\sqrt{1-2x}+2$

3 関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}$ について，$f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

4 $f(x)=2x-1$，$g(x)=ax+b$ について，$(g \circ f)(x)=8x-3$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ。

5 関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f^{-1}(1)=2$，$f^{-1}(5)=4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

6 関数 $y=\log_4 x$ ……① のグラフを ア$\boxed{}$ 軸方向に イ$\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4 16x$ である。また，関数 ① のグラフを x 軸方向に ウ$\boxed{}$，y 軸方向に エ$\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4 \dfrac{x+2}{64}$ である。

関数 $y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称な位置に移動したグラフの方程式は $y=$ オ$\boxed{}$ ……② である。② のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき，$a=$ カ$\boxed{}$，$b=$ キ$\boxed{}$ である。

7 $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x$ は，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に ア$\boxed{}$ だけ平行移動したグラフであり，更に，$x=2$ を軸に線対称に移すと，$y=$ イ$\boxed{}$ となる.

8 関数 $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ の周期は，$\boxed{\text{ア}}\pi$ である。

また，この関数のグラフは，$y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動したものである。

9 関数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ の逆関数を求めよ。

10 ＊　関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える。

合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

11 不等式 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ を解け.

12 不等式 $\sqrt{4x-x^2}>3-x$ を解け。

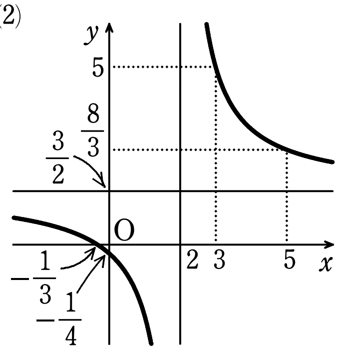
実戦問題

13 関数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$ の周期のうち，正で最小のものを求めよ。

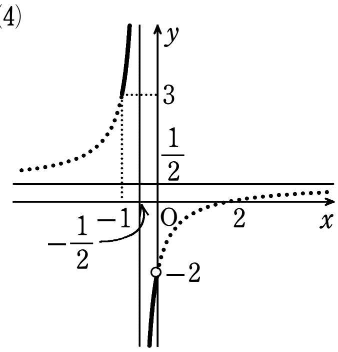
14 関数 $f(x)=\log_2(x+3)$ に対し，その逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。また，$g(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，不等式 $g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(2)〔図〕実線部分，$y<-2$，$3\leqq y$

(2)



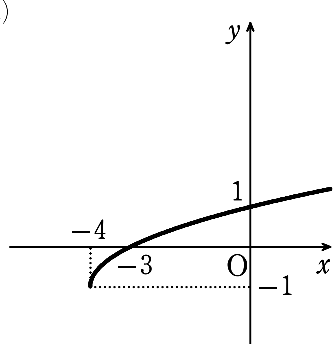
(4)



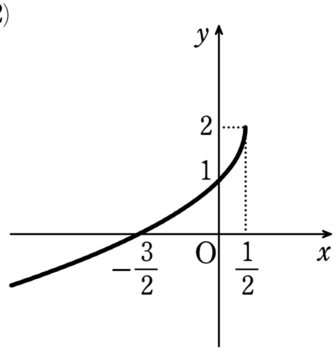
(

$\boxed{2}$ 解答　(1)〔図〕，値域　$y\geqq-1$　　(2)〔図〕，値域　$y\leqq2$

(1)



(2)



$\boxed{3}$ 解答　$a=-2$

$\boxed{4}$ 解答　$a=4$，$b=1$

$\boxed{5}$ 解答　$a=2$，$b=-3$

$\boxed{6}$ 解答　(ア)　y　　(イ)　2　　(ウ)　-2　　(エ)　-3　　(オ)　$\log_2 x$　　(カ)　-4

(キ)　-3

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　3　　(イ)　2^{-x+1}

$\boxed{8}$ 解答　(ア)　4　　$\dfrac{(イ)}{(ウ)}$　$\dfrac{2}{3}$　　(エ)　1

$\boxed{9}$ 解答　$y=x+\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{10}$ 解答　$a=3$，$b=1$，$c=2$

$\boxed{11}$ 解答　$-3\leqq x<-2$，$0<x\leqq1$

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leqq4$

$\boxed{13}$ 解答　12π

14 解答　$f^{-1}(x)=2^x-3$，$x\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{1}$ (1)　$\dfrac{3x+1}{2x-4}=\dfrac{\frac{3}{2}(2x-4)+7}{2x-4}=\dfrac{7}{2x-4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}}{x-2}+\dfrac{3}{2}$

よって，$y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$ のグラフは，$y=\dfrac{7}{2x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動したものである。

漸近線は 2 直線 $x=2$，$y=\dfrac{3}{2}$ 〔図〕

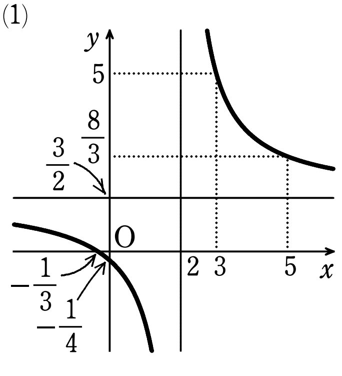
(2)　$\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{5}{2}}{2x+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{5}{2}}{2x+1}=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$x=-1$ のとき　$y=3$，$x=0$ のとき　$y=-2$

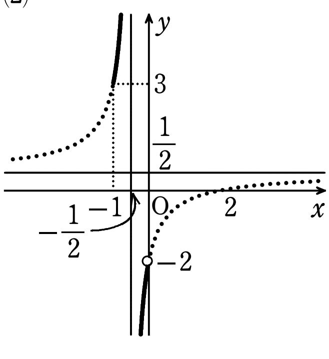
よって，この関数のグラフは，図の実線部分のようになる。

また，値域は　　$y<-2$，$3\leqq y$

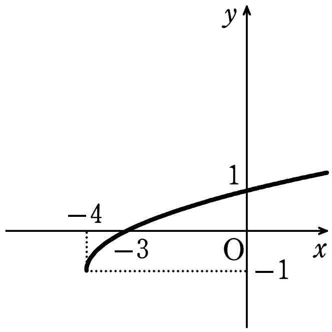
(1)



(2)

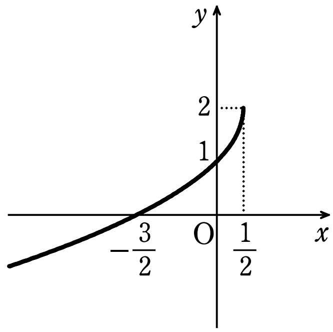


$\boxed{2}$ (1)　$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -4，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。
グラフから，値域は　$y \geqq -1$



(2)　$-\sqrt{1-2x}+2=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+2$

よって，$y=-\sqrt{1-2x}+2$ のグラフは，
$y=-\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。
グラフから，値域は　$y \leqq 2$



$\boxed{3}$ $y=\dfrac{2x+1}{x+a}$ とする。

$\dfrac{2x+1}{x+a}=\dfrac{2(x+a)-2a+1}{x+a}=\dfrac{1-2a}{x+a}+2$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，y は定数関数となるから　$a \neq \dfrac{1}{2}$　　　　このとき　$y \neq 2$

$y(x+a)=2x+1$ より　　$(y-2)x=1-ay$

$y \neq 2$ であるから　　　$x=\dfrac{1-ay}{y-2}$

よって，逆関数は　　　$f^{-1}(x)=\dfrac{1-ax}{x-2}$

$\dfrac{2x+1}{x+a}=\dfrac{1-ax}{x-2}$ が x についての恒等式である。

両辺に $(x+a)(x-2)$ を掛けて，x について整理すると

$$(a+2)x^2+(a^2-4)x-a-2=0$$

よって　　$a+2=0$，$a^2-4=0$，$-a-2=0$

したがって　　$a=-2$

$\boxed{4}$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(2x-1)+b=2ax-a+b$

$(g\circ f)(x)=8x-3$ が成り立つから，$2ax-a+b=8x-3$ は x の恒等式である。

両辺の係数を比較すると　　$2a=8$，$-a+b=-3$

これを解いて　　$a=4$，$b=1$

$\boxed{5}$ $f^{-1}(1)=2$　から　　$f(2)=1$

よって　　$2a+b=1$　…… ①

$f^{-1}(5)=4$　から　　$f(4)=5$

よって　　$4a+b=5$　…… ②

①，② を解くと　　$a=2$，$b=-3$

$\boxed{6}$ 　　$y=\log_4 16x=\log_4 x+2$

よって，① のグラフを ${}^{ア}y$ 軸方向に ${}^{イ}2$ だけ平行移動すると，$y=\log_4 16x$ のグラフになる。

$$y=\log_4\frac{x+2}{64}=\log_4(x+2)-3$$

よって，① のグラフを x 軸方向に ${}^{ウ}-2$，y 軸方向に ${}^{エ}-3$ だけ平行移動すると，

$y=\log_4\dfrac{x+2}{64}$ のグラフになる。

$y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$y={}^{オ}\log_2 x$ のグラフになる。

このグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動すると

$$y=\log_2(x-a)+b$$

のグラフになる。

これが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき

$\log_2(-a)+b=-1$　…… ③

$\log_2(4-a)+b=0$　…… ④

ここで，真数は正であるから　　$-a>0$ かつ $4-a>0$　　　よって　$a<0$　…… ⑤

③－④ から　　$\log_2(-a)-\log_2(4-a)=-1$

$\log_2(-a)+1=\log_2(4-a)$

$\log_2(-2a)=\log_2(4-a)$

よって　　$-2a=4-a$　　　ゆえに　$a={}^{カ}-4$　　　これは ⑤ を満たす。

④ から　　$b=-\log_2(4-a)=-\log_2 8={}^{キ}-3$

$\boxed{7}$ $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x=2^{x-3}$　よって，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に ${}^{ア}3$ だけ平行移動.

$x=3$ を $x=2$ を軸に線対称に移すと $x=1$

よって，$y=2^{x-3}$ を $x=2$ を軸に線対称に移すと　$y=2^{-(x-1)}$　すなわち　$y={}^{イ}2^{-x+1}$

$\boxed{8}$ $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)+1$

よって，周期は　$2\pi\div\dfrac{1}{2}={}^{ア}4\pi$

また，$y-1=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるから，この関数のグラフは $y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを

θ 軸方向に $\dfrac{{}^{イ}2}{{}^{ウ}3}\pi$，$y$ 軸方向に ${}^{エ}1$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{9}$ $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ の両辺に $2x$ を掛けて　$2xy=x^2-1$

変形すると　$(x-y)^2=y^2+1$　……①

ここで，$x>0$ から

$$x-y=x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$$

よって，①から　$x-y=\sqrt{y^2+1}$

ゆえに　$x=y+\sqrt{y^2+1}$

したがって，求める逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=x+\sqrt{x^2+1}$

10 $f(g(x))=f\left(\dfrac{3x+b}{x+c}\right)=\dfrac{2\cdot\dfrac{3x+b}{x+c}+a}{\dfrac{3x+b}{x+c}+1}=\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}$

$f(g(x))=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ から　$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$

分母を払って整理すると

$(12-4a)x^2+(14-3a+b+9c-4ac)x+(2b+8c-3ac)=0$

これが x について恒等式であるから

$12-4a=0$　…… ①，$14-3a+b+9c-4ac=0$　…… ②，

$2b+8c-3ac=0$　…… ③

①，②，③ から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

(別解)　$f(g(x))=\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}$ から　$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$

これが x についての恒等式である。分母の x の係数は 4 で等しいから他の係数も等しい。よって

$a+6=9$ …… ④，$2b+ac=8$ …… ⑤，$b+c=3$ …… ⑥

④，⑤，⑥ から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

11 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ から　$x\neq 0$，$x\neq -2$，$\dfrac{3x}{x+2}\geqq x^2$

ゆえに　$\dfrac{x(x-1)(x+3)}{x+2}\leqq 0$

よって　$-3\leqq x<-2$，$0<x\leqq 1$

12 $4x-x^2 \geqq 0$ から　$0 \leqq x \leqq 4$　…… ①

[1]　$3-x<0$ すなわち $x>3$ のとき

① から　　$3<x \leqq 4$

このとき，$\sqrt{4x-x^2} \geqq 0$ であるから与えられた不等式は成り立つ。

[2]　$3-x \geqq 0$ すなわち $x \leqq 3$ のとき

① から　　$0 \leqq x \leqq 3$　…… ②

このとき，$\sqrt{4x-x^2} \geqq 0$，$3-x \geqq 0$ であるから与えられた不等式の両辺を 2 乗して

$$4x-x^2>(3-x)^2$$

整理すると　　$2x^2-10x+9<0$

これを解くと　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$

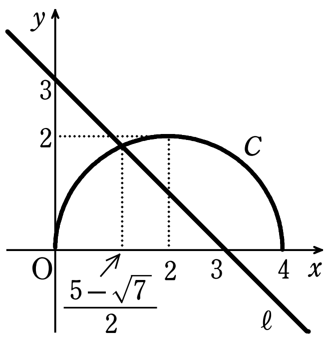
$2<\sqrt{7}<3$ であるから，② より　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 3$

[1]，[2] より　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 4$

別解　曲線 $C：y=\sqrt{4x-x^2}$ とすると　　$y \geqq 0$，$(x-2)^2+y^2=2^2$

から C は点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円の $y \geqq 0$ の部分である。

また，直線 $\ell：y=3-x$ とすると，C と ℓ は右の図のようになる。



C と ℓ の交点の x 座標は $\sqrt{4x-x^2}=3-x$　…… ③

の実数解である。

両辺を 2 乗して　$4x-x^2=(3-x)^2$

これを解くと　　$x=\dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$

③ に適するのは　$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$

図から，不等式の解は　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 4$

13　$\sin\dfrac{x}{2}$ の周期は　$2 \times 2\pi=4\pi$，$\sin\dfrac{x}{3}$ の周期は　$3 \times 2\pi=6\pi$

4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，求める周期は　12π

14 $y=\log_2(x+3)$ の値域はすべての実数で，これを x について解くと　$x+3=2^y$

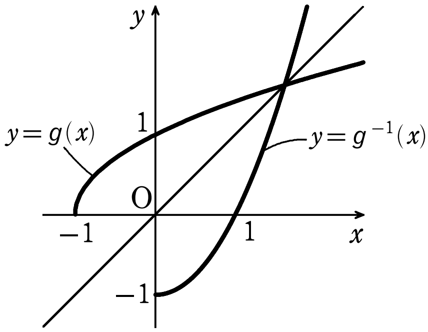
すなわち　$x=2^y-3$　　ゆえに　$f^{-1}(x)=2^x-3$

また，$y=\sqrt{x+1}$ の値域は $y\geqq 0$ で，これを x について解くと　$y^2=x+1$

すなわち　$x=y^2-1\ (y\geqq 0)$

ゆえに　$g^{-1}(x)=x^2-1\ (x\geqq 0)$

$y=g^{-1}(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称で，位置関係は右の図のようになる。



よって，$g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲は

$g^{-1}(x)\geqq x$ を満たす x の範囲に等しい。

ゆえに，$x^2-1\geqq x$ から

$$x\leqq\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq x$$

$x\geqq 0$ であるから，$g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲は　$x\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

数学③　第３回試練　数III数列の極限

BASIC問題

1　次の循環小数の積を１つの既約分数で表せ.　　$0.\dot{1}\dot{2}\times 0.\dot{2}\dot{7}$

2　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

3　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

4　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}$ の和を求めよ。

STANDARD問題

5　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ を求めよ。

6　関数 $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

7　次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。　　$(3-x)+x(3-x)+x^2(3-x)+\cdots\cdots$

8　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\left(\frac{3}{2}-5\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{5}{27}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{16}+\cdots\cdots$

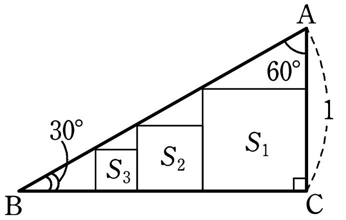
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

実戦問題

9　数列 $\displaystyle\left\{\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ の極限を求めよ。

10　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ の和を求めよ。

11 $A=60°$，$B=30°$，AC$=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように正方形 S_1，S_2，S_3，…… が限りなく並んでいるとき，これらの正方形の面積の総和を求めよ。



12 $\angle\mathrm{A}=2\theta$ の二等辺三角形 ABC の内接円 O_1 の半径を r とする。等辺 AB，AC と円 O_1 に接する円を O_2 とし，AB，AC と円 O_2 に接する円を O_3 とし，このように，次々に円 O_1，O_2，O_3，O_4，…… が並んでいる。このとき，すべての円の面積の和 S を求めよ。

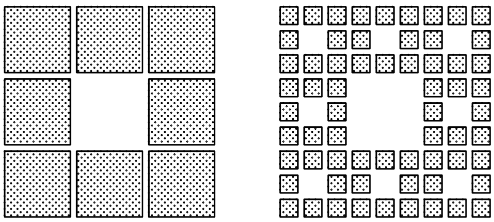
13 二項定理を用いて，数列 $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$ の極限を求めよ。

14 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $|a_{n+1}-3|\leqq\dfrac{2}{3}|a_n-3|$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

15 図のように正方形を 9 等分して，中央の正方形を取り除いた図形を S_1 とする．残された 8 個の正方形を 9 等分し，それぞれの中央の正方形を取り除いた図形を S_2 とする．このような操作を n 回繰り返して構成される図形を S_n とする．



各々の図形における最小の正方形をセルと呼び， S_n のセルの総数を a_n とし，さらに S_n における隣接したセルが共有する辺の総数を b_n とする．例えば，$a_1=8$，$b_1=8$ である．次の問いに答えよ．

(1) a_n を求めよ．

(2) b_2 および b_3 を求めよ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) b_n を求めよ．

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

$\boxed{1}$ 解答　$\dfrac{4}{121}$

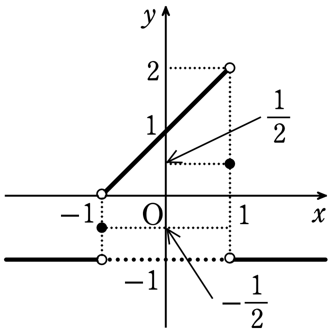
$\boxed{2}$ 解答　(1)　1　　(2)　∞　　(3)　2

$\boxed{3}$ 解答　(1)　-1　　(2)　1　　(3)　$-\infty$　　(4)　∞

$\boxed{4}$ 解答　$-\dfrac{2}{3}$

$\boxed{5}$ 解答　0

$\boxed{6}$ 解答



$\boxed{7}$ 解答　$x=3$，$-1<x<1$；和は $\dfrac{3-x}{1-x}$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　収束，和 $-\dfrac{9}{2}$　　(2)　発散　　(3)　収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 解答　$|r|<1$ のとき 0，　$r=1$ のとき $\dfrac{2}{3}$，　$|r|>1$ のとき 1

$\boxed{10}$ 解答　2

$\boxed{11}$ 解答　$\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}$

$\boxed{13}$ 解答　∞

$\boxed{14}$ 解答　(1)　略　　(2)　3

$\boxed{15}$ 解答　(1)　$a_n=8^n$　　(2)　$b_2=88$，$b_3=776$　　(3)　$b_{n+1}=3b_n+8^{n+1}$

(4)　$b_n=\dfrac{8}{5}(8^n-3^n)$　　(5)　$\dfrac{8}{5}$

$\boxed{1}$ $0.\dot{1}\dot{2}\times 0.\dot{2}\dot{7}=0.12(1+0.01+0.0001+\cdots\cdots)\times 0.27(1+0.01+0.0001+\cdots\cdots)$

$$=\frac{0.12}{1-0.01}\times\frac{0.27}{1-0.01}=\frac{12}{99}\times\frac{27}{99}$$

$$=\frac{4}{33}\times\frac{3}{11}=\frac{4}{11}\times\frac{1}{11}=\frac{4}{121}$$

$\boxed{2}$ (1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=\frac{2}{2}=1$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2})^2-(\sqrt{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}=\infty$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n)-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

$\boxed{3}$ (1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+1}{1+0}=1$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}=\infty$$

$\boxed{4}$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{4^n}\right\}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}$ は初項 $\frac{5}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに１より小さいから，この２つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$

$\boxed{5}$　$-1\leqq\cos\dfrac{n\pi}{2}\leqq 1$ から　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\leqq\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

$\boxed{6}$　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

[1]　$|x|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+x-0}{1+0}=x+1$

[2]　$x=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

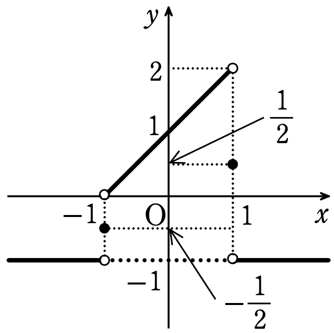
[3]　$x=-1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

[4]　$|x|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$ であるから

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n-1}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$

$$=\frac{0+0-1}{0+1}=-1$$

以上から，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{7}$　初項が $3-x$，公比が x であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$3-x=0$　または　$|x|<1$

よって，求める x の値の範囲は　　$x=3$，$-1<x<1$

$x=3$ のとき，各項はすべて 0 になるから収束し，その和は　0

$-1<x<1$ のとき，和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$　　これは，$x=3$ のときも成り立つ。

よって，求める和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$

$\boxed{8}$　(1)　第 n 項は　$\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{5}{3^{n-1}}$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{5}{3^{n-1}}\right)$ は収束し，その和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=3-\frac{15}{2}=-\frac{9}{2}$$

(2)　第 n 項を a_n とすると　　$a_n=\dfrac{2n-1}{4n}$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないから，この無限級数は発散する。

(3)　$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

よって　　$S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$ である。

$\boxed{9}$　[1]　$|r|<1$のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$

[2]　$r=1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$

[3]　$|r|>1$　のとき

$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{2}{r^{2n}}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

10

$$\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{3}{n}-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k(k+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{2^k}{3^{k-1}}-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{2^{k+1}}{3^k}\right)$

$$=\left(1\cdot\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{3^2}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$$

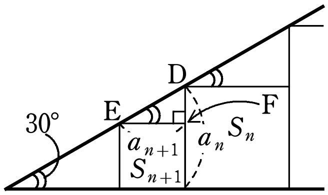
$$=2-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

したがって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 2\right\}=2$

11　正方形 S_n の１辺の長さを a_n，面積を T_n とする。

図の直角三角形 DEF において

$$\mathrm{EF}=\sqrt{3}\,\mathrm{DF}$$



よって　$a_{n+1}=\sqrt{3}(a_n-a_{n+1})$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$　　また　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

よって　$a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$　　ゆえに　$T_n={a_n}^2=\left\{\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}\right\}^n$

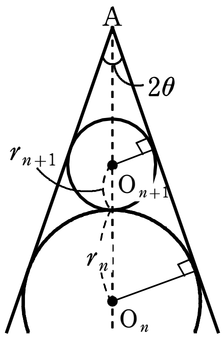
したがって，正方形の面積の総和は，初項，公比 r がともに $\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}$ の無限等比級数

で表され，公比について $|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する。

よって，その和は　$\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2-3(2-\sqrt{3})}=\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

12　円 O_n の半径を r_n，中心を点 O_n とすると

$$\mathrm{AO}_n-\mathrm{AO}_{n+1}=r_n+r_{n+1}\quad\cdots\cdots ①$$



また，$\mathrm{AO}_n\sin\theta=r_n$，$\mathrm{AO}_{n+1}\sin\theta=r_{n+1}$ であるから

$$\mathrm{AO}_n=\frac{r_n}{\sin\theta},\quad \mathrm{AO}_{n+1}=\frac{r_{n+1}}{\sin\theta}$$

これらを ① に代入して　$\dfrac{r_n}{\sin\theta}-\dfrac{r_{n+1}}{\sin\theta}=r_n+r_{n+1}$

よって　$(1+\sin\theta)r_{n+1}=(1-\sin\theta)r_n$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$1+\sin\theta\neq 0$ で　$r_{n+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$

よって，円 O_n の面積を S_n とすると　$S_{n+1}=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2S_n$

また　　$S_1=\pi r^2$

ゆえに，すべての円の面積の和 S は，初項 πr^2，公比 $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ の無限等比級数の和で表される。

ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin\theta<1$ であるから　　$0<\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}<1$

したがって，無限等比級数は収束して

$$S=\frac{\pi r^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\frac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}=\frac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}$$

13　$3^n=(1+2)^n\geqq 1+2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2^2=2n^2+1$

よって　　$\dfrac{3^n}{n}\geqq\dfrac{2n^2+1}{n}=2n+\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{n}\right)=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n}=\infty$

14　(1)　$a_{n+1}-3=\sqrt{2a_n+3}-3=\dfrac{(\sqrt{2a_n+3}-3)(\sqrt{2a_n+3}+3)}{\sqrt{2a_n+3}+3}$

$$=\frac{(2a_n+3)-9}{\sqrt{2a_n+3}+3}=\frac{2(a_n-3)}{\sqrt{2a_n+3}+3}$$

よって　　$|a_{n+1}-3|=\dfrac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}|a_n-3|$

$\sqrt{2a_n+3}+3\geqq 3$ であるから　　$|a_{n+1}-3|\leqq\dfrac{2}{3}|a_n-3|$

(2)　(1) で示した不等式から

$$|a_n-3|\leqq\frac{2}{3}|a_{n-1}-3|\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^2|a_{n-2}-3|\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|$$

よって　　$0\leqq|a_n-3|\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}|1-3|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|1-3|=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

15　(1)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=8a_{n-1}$

また，$a_1=8$ であるから　$a_n=8^n$

(2)　$b_2=8\cdot 8+8\cdot 3=88$，$b_3=a_2\cdot 8+b_2\cdot 3=8^3+88\cdot 3=776$

(3)　$a_n=8^n$ から　$b_{n+1}=8a_n+3b_n=3b_n+8^{n+1}$

(4) $$\begin{aligned} b_n &= 3b_{n-1}+8^n = 3(3b_{n-2}+8^{n-1})+8^n \\ &= 3^2(3b_{n-3}+8^{n-2})+3\cdot 8^{n-1}+8^n = \cdots\cdots \\ &= 3^{n-1}b_1+3^{n-2}\cdot 8^2+3^{n-3}\cdot 8^3+\ \cdots\cdots\ +3\cdot 8^{n-1}+8^n \\ &= 3^{n-1}\cdot 8\left\{1+\frac{8}{3}+\left(\frac{8}{3}\right)^2+\ \cdots\cdots\ +\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= 3^{n-1}\cdot 8\left\{\frac{1-\left(\frac{8}{3}\right)^n}{1-\frac{8}{3}}\right\} = \frac{8}{5}(8^n-3^n) \end{aligned}$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{5}\left\{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right\} = \frac{8}{5}$$

BASIC問題

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

3 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}$

4 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

5 $x\leqq0$ のとき　$f(x)=1$，　$0<x<\pi$ のとき　$f(x)=\dfrac{ax^2}{1-\cos x}$，　$x\geqq\pi$ のとき　$f(x)=b$ である関数 $f(x)$ が，すべての区間で連続になるように，定数 a，b の値を定めよ。

STANDARD問題

6 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

7 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

8 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-2}{x^2-x}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

10 次の極限を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

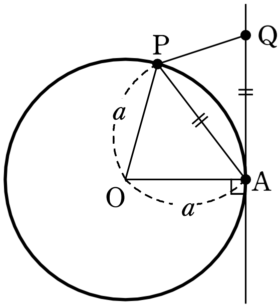
(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{|x|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])$

11 次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

実戦問題

12 半径 a の円 O の周上に動点 P と定点 A がある。A における接線上に AQ＝AP であるような点 Q をOA に関して P と同じ側にとる。P が A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^{\,2}}$ の極限値を求めよ。



13 次の極限値を計算して，n の単項式で表せ。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}$$

14 次の 2 つの条件をともに満たす多項式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$$

15 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3 x+a\cos^2 x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ.

$\boxed{1}$ 解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) 1

$\boxed{2}$ 解答　(1) $\dfrac{5}{3}$　(2) 2

$\boxed{3}$ 解答　(1) -2　(2) $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$ 解答　(1) e^2　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{e^2}$　(4) $\dfrac{1}{e}$

$\boxed{5}$ 解答　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi^2}{4}$

$\boxed{6}$ 解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) 1

$\boxed{7}$ 解答　(1) 1　(2) $-\pi$

$\boxed{8}$ 解答　(1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) 0　(3) 極限はない

$\boxed{9}$ 解答　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

$\boxed{10}$ 解答　(1) 存在しない　(2) 2

$\boxed{11}$ 解答　(1) 3　(2) 5

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{1}{2a}$

$\boxed{13}$ 解答　$-n^2$

$\boxed{14}$ 解答　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

$\boxed{15}$ 解答　$a=\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{2}{3}, c=1$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-\sqrt{2x+3})(x+\sqrt{2x+3})}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-(2x+3)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+\sqrt{2x+3}}=\frac{4}{3+\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\frac{2}{1+1}=1$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sin3x}{3x}}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot1\cdot1=\frac{5}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1=2$

$\boxed{3}$ (1) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2-4t}-t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$

(2) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}\,t}{\sqrt{2t^2-t}+\sqrt{2t^2+t}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{t}}+\sqrt{2+\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$

注意　別解 では，$x<0$ のとき　$x=-\sqrt{x^2}$ であることに注意する。

$\boxed{4}$ (1) $2x=h$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^2=e^2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

(3) $\displaystyle -\frac{2}{x}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to 0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$

(4) $\displaystyle\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x}$

$\displaystyle -\frac{1}{x+1}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim_{h\to 0}(1+h)^{-1-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}}{1+h}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\boxed{5}$ $f(x)$ がすべての区間で連続となるための必要十分条件は，$f(x)$ が $x=0$，$x=\pi$ で連続となることである。

$x=0$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)$　　　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{ax^{2}}{1-\cos x}=1$　……①

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{ax^{2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to +0}\frac{ax^{2}(1+\cos x)}{1-\cos^{2}x}=\lim_{x\to +0}a\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2}(1+\cos x)=2a$

よって，① から　$2a=1$　　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$　……②

また，$x=\pi$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to \pi-0}f(x)=f(\pi)$　　　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to \pi-0}\frac{ax^{2}}{1-\cos x}=b$

よって　$\dfrac{\pi^{2}}{2}a=b$　　　② を代入して　$b=\dfrac{\pi^{2}}{4}$

以上から　　　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi^{2}}{4}$

$\boxed{6}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{(1+x)^{2}}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^{2}}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^{2}}+\sqrt[3]{1-x^{2}}+\sqrt[3]{(1-x)^{2}}}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^{2}}}{\sqrt{1-x^{2}}-\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^{2}})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^{2}})}{(\sqrt{1-x^{2}}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^{2}}+\sqrt{1-x})}\cdot\frac{\sqrt{1-x^{2}}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^{2}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1+x^2)}{(1-x^2)-(1-x)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

$\boxed{7}$ (1)　$x-\pi=t$ とおくと　$x\longrightarrow\pi$ のとき $t\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2)　$x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow 1$ のとき $t\longrightarrow 0$

$\sin\pi x=\sin\pi(t+1)=\sin(\pi+\pi t)=-\sin\pi t$

よって　$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to 0}\pi\cdot\left(-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)=-\pi$$

$\boxed{8}$ (1)　$x<-3$ のとき　$|2x+6|=|2(x+3)|=-2(x+3)$

したがって　$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}=\lim_{x\to -3-0}\frac{x+3}{-2(x+3)}=\lim_{x\to -3-0}\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

(2)　$x=2$ の近くで　$x>2$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$,

$x<2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

ゆえに　$$\lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)^2}{-(x^2-4)}=\lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{x-2}{x+2}\right)=0$$

よって　$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=0$$

(3)　$$\lim_{x\to +0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\infty$$

また　$$\lim_{x\to -0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=-\infty$$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの極限はない。

$\boxed{9}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ ……① において，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}(ax\sin x+b)=0\qquad\text{すなわち}\quad b=0$$

このとき　$$\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$

$$=\frac{-ax(\cos x+1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)$$

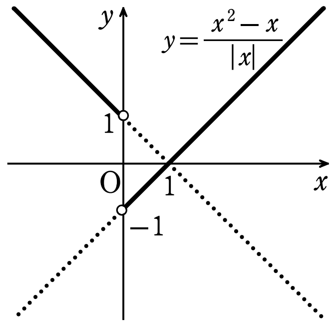
であるから　$$\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)\right\}=1\cdot(-a)\cdot 2=-2a$$

① より $-2a=1$ であるから　　$a=-\dfrac{1}{2}$

したがって　　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

$\boxed{10}$ (1)　$x \longrightarrow +0$ のとき $x>0$ で　　$|x|=x$

$x \longrightarrow -0$ のとき $x<0$ で　　$|x|=-x$



$y=\dfrac{x^2-x}{|x|}$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to+0}(x-1)=-1$

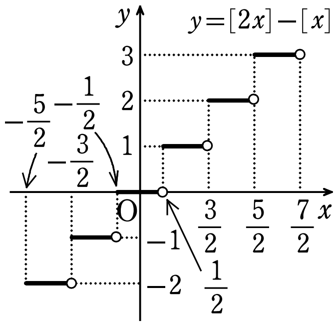
$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to-0}(1-x)=1$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}\neq\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{|x|}$ は存在しない。

(2)　$2\leqq x<\dfrac{5}{2}$ では　　$[2x]=4$，$[x]=2$

$\dfrac{3}{2}\leqq x<2$ では　　$[2x]=3$，$[x]=1$



$y=[2x]-[x]$

$-\dfrac{5}{2}$　$-\dfrac{1}{2}$　$-\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{5}{2}$　$\dfrac{7}{2}$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2+0}(4-2)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2-0}(3-1)=2$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2-0}([2x]-[x])=2$

したがって　　$\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])=2$

$\boxed{11}$ (1)　不等式 $[3x]\leqq 3x<[3x]+1$ が成り立つ。

よって，$x>0$ のとき

$\dfrac{[3x]}{x}\leqq 3<\dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$ となるから　　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}\leqq 3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2)　$(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\left[5^x\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=5\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$x \longrightarrow \infty$ であるから，$x>1$，$0<\dfrac{1}{x}<1$ と考えてよい。

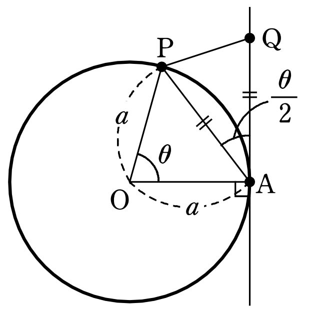
$\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1>1$ であるから　　$1=\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^0<\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=5$

12　$\theta=\angle\mathrm{AOP}$，$0<\theta<\pi$ とおくと

$$\mathrm{AP}=2a\sin\frac{\theta}{2}，\ \overset{\frown}{\mathrm{AP}}=a\theta$$



また，接線と弦の作る角の性質から

$$\angle\mathrm{PAQ}=(\overset{\frown}{\mathrm{AP}}\text{の円周角})=\frac{\theta}{2}$$

$\triangle\mathrm{APQ}$ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AP}\sin\frac{\theta}{4}=4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}$$

P が A に限りなく近づくとき，$\theta\longrightarrow+0$ であるから，求める極限値は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}}{(a\theta)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}=\frac{1}{2a}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2a}$$

13　$x-\pi=t$ とおくと，$x\to\pi$ のとき　$t\to0$

また，$x=t+\pi$ であるから，$k=1$，2，3，……，n に対して

$$\sin(2k-1)x=\sin\{(2k-1)(t+\pi)\}=\sin\{(2k-1)t+2k\pi-\pi\}$$
$$=\sin\{(2k-1)t-\pi\}=-\sin(2k-1)t$$

さらに　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin(2k-1)t}{t}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin(2k-1)t}{(2k-1)t}\cdot(2k-1)\right\}=2k-1$

したがって，求める極限値は

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin3x+\sin5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-\sin3t-\sin5t-\cdots\cdots-\sin(2n-1)t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)t}{t}\right\}=-\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{t\to0}\frac{\sin(2k-1)t}{t}\right\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=-\left\{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$=-n^2$$

14　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}$ が存在するから $f(x)-2x^3$ は 2 次以下の多項式である。

よって，$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ とおける。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ より　　$a=1$

また　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x^2+ax+b+\frac{c}{x}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$ より　　$c=0$，$b=-3$

したがって　　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

15　分母について $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin^3 x+a\cos^2 x-a)=0$ であるから，分子について

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1\}=0$ でなければならない．

よって　$a+0-2a+b+1=0$　　ゆえに　$b=a-1$ ……①

このとき　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\sin^2 x)+(3a-1)\sin x-a}{\sin^3 x+a(1-\sin^2 x)-a}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin^2 x+(3a-1)\sin x}{\sin^3 x-a\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x+3a-1}{\sin x(\sin x-a)}\ \cdots\cdots ②$$

分母について $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x(\sin x-a)=0$ であるから，上と同様に

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-a\sin x+3a-1)=0$　　よって　$3a-1=0$

ゆえに　　$a=\dfrac{1}{3}$　　① から　$b=-\dfrac{2}{3}$

② から　　$\displaystyle c=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x}{\sin x(\sin x-a)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\sin x-1}=1$

BASIC問題

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\cos 2x$　　(2) $y=\sin 3x\cos x$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{3+\sin x}$　　(2) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$

$\boxed{4}$ 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\neq1$ とする。

(1) $y=\tan 3x$　　(2) $y=\sin x^3$　　(3) $y=\cos^3 x$

(4) $y=\log(\sin x)$　　(5) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$　　(6) $y=e^{-2x}\cos 2x$

(7) $y=a^{-x^2}$

$\boxed{5}$ 媒介変数で表された次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\dfrac{e^{3t}}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$　　(2) $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$

$\boxed{6}$ 関数 $y=x^{2x}\ (x>0)$ を微分せよ。

$\boxed{7}$ 次の x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x，y で表せ。

(1) $x^2-xy-y^2=1$　　(2) $x^3-xy^2+y^3=1$

STANDARD問題

8 関数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & (x\leqq 2\text{ のとき})\\ x^2+ax+b & (2<x\text{ のとき})\end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような定数 a，b の値を求めよ。

9 ＊　関数 $y=\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right\}$ を微分せよ。

10 ＊　曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

11 $f(x)=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。

12 関数 $x=3\cos t$，$y=2\sin t$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。

13 2 曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。また，その共有点における接線の方程式を求めよ。

14 2 つの曲線 $y=e^x$，$y=-e^{-x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

実戦問題

15 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。

16 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，

(1)　$g'(2)$ の値を求めよ。

(2)　$g''(2)$ の値を求めよ。

17 a，b は定数で $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}$ が $x>0$ で微分可能である条件を求めよ。

1 解答 (1) $5f'(a)$ (2) $2f(a)f'(a)$

2 解答 (1) $y'=\cos 2x-2x\sin 2x$ (2) $y'=3\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$

3 解答 (1) $y'=-\dfrac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$ (2) $y'=\dfrac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

4 解答 (1) $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$ (2) $y'=3x^2\cos x^3$ (3) $y'=-3\sin x\cos^2 x$

(4) $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ (5) $y'=\dfrac{4}{4x^2-1}$ (6) $y'=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(7) $y'=-2xa^{-x^2}\log a$

5 解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-t^2}{(3t^2-2t+3)e^{3t}}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\tan t$

6 解答 $y'=2x^{2x}(\log x+1)$

7 解答 (1) $\dfrac{2x-y}{x+2y}$ (2) $\dfrac{3x^2-y^2}{y(2x-3y)}$

8 解答 $a=-6$，$b=9$

9 解答 $y'=\sqrt{x^2+4}$

10 解答 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

11 解答 $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12 解答 $-\dfrac{2}{9\sin^3 t}$

13 解答 $a=\dfrac{1}{e}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$

14 解答 $y=ex$

15 解答 1

16 解答 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{3}{8}$

17 解答 $a=1$，$b=2$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\cdot\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\right\}$

$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\{f(x)+f(a)\}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=2f(a)f'(a)$

$\boxed{2}$ (1) $y'=\cos 2x+x(-\sin 2x)\cdot 2=\cos 2x-2x\sin 2x$

(2) $y'=(\cos 3x)\cdot 3\cos x+\sin 3x\cdot(-\sin x)=3\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle y'=-\frac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$　　(2) $\displaystyle y'=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle y'=\frac{(3x)'}{\cos^2 3x}=\frac{3}{\cos^2 3x}$

(2) $y'=\cos x^3\cdot(x^3)'=3x^2\cos x^3$

(3) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\sin x\cos^2 x$

(4) $\displaystyle y'=\frac{\cos x}{\sin x}$

(5) $\displaystyle y=\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|=\log|2x-1|-\log|2x+1|$

$\displaystyle y'=\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4}{4x^2-1}$

(6) $y'=(e^{-2x})'\cos 2x+e^{-2x}(\cos 2x)'=-2e^{-2x}\cos 2x-2e^{-2x}\sin 2x$

$=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(7) $y'=a^{-x^2}\log a\cdot(-x^2)'=-2xa^{-x^2}\log a$

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle \frac{dx}{dt}=\frac{3e^{3t}(1+t^2)-e^{3t}\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{e^{3t}(3t^2-2t+3)}{(1+t^2)^2}$,

$\displaystyle \frac{dy}{dt}=\frac{1\cdot(1+t^2)-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

したがって　$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-t^2}{(3t^2-2t+3)e^{3t}}$

(2) $\displaystyle \frac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

$\displaystyle \frac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

したがって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$

$\boxed{6}$ $x>0$ であるから　$x^{2x}>0$

両辺の対数をとると　$\log y=2x\log x$

この両辺を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2(\log x+1)$

よって　$y'=2(\log x+1)\cdot x^{2x}=2x^{2x}(\log x+1)$

$\boxed{7}$ (1)　両辺を x で微分すると　$2x-\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=2x-y$

よって，$x+2y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+2y}$

(2)　両辺を x で微分すると　$3x^2-\left(y^2+x\cdot 2y\dfrac{dy}{dx}\right)+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$y(2x-3y)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-y^2$

よって，$y(2x-3y)\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-y^2}{y(2x-3y)}$

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$　　すなわち　$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$

よって　$2^2+a\cdot 2+b=-2^2+2\cdot 2+1=1$

すなわち　$2a+b+4=1$　　ゆえに　$b=-2a-3$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to+0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)+b-1}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)-2a-4}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{h^2+(a+4)h}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\{h+(a+4)\}=a+4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to-0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to-0}\frac{-(2+h)^2+2(2+h)+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to-0}\frac{-h^2-2h}{h}\\&=\lim_{h\to-0}(-h-2)=-2\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるための条件は　$a+4=-2$

ゆえに　$a=-6$　　このとき　$b=9$

9 $y'=\dfrac{1}{2}\left\{(x)'\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}\right)'\right\}+2\cdot\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)'}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$$=\frac{1}{2}\left[1\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'\right]+2\cdot\frac{\left\{x+(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'}{x+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}\right]$$

$$+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{x^2+4+x^2+4}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}$$

10 $2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると　$4x-2(y+xy')+2yy'=0$

ゆえに　$y'(y-x)+2x-y=0$

$x=1$，$y=3$ のとき　$y'=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は　$y-3=\dfrac{1}{2}(x-1)$　　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

11 $y=g(x)$ とすると　$x=g^{-1}(y)=f(y)=\cos y$ $(\pi<y<2\pi)$

$x=\cos y$ の両辺を x で微分すると　$1=-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$\pi<y<2\pi$ のとき，$\sin y<0$ であるから

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12 $\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$　　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\tan t}\right)\cdot\dfrac{1}{-3\sin t}$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\frac{1}{-3\sin t}=-\frac{2}{9\sin^3 t}$$

13 $f(x)=ax^3$，$g(x)=3\log x$ とすると　$f'(x)=3ax^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{x}$

2 曲線の共有点の x 座標を p とすると，$f(p)=g(p)$ から　$ap^3=3\log p$　…… ①
また，2 曲線の共有点における接線が一致するから，$f'(p)=g'(p)$ により

$$3ap^2=\frac{3}{p}\qquad \text{すなわち}\qquad ap^3=1\quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$3\log p=1$　　よって　$p=e^{\frac{1}{3}}$

これを ② に代入して　$ae=1$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{e}$

共有点の座標は $\left(e^{\frac{1}{3}},\ 1\right)$ であるから，接線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$$

14 $y=e^x$ から　$y'=e^x$　　　$y=-e^{-x}$ から　$y'=e^{-x}$
曲線 $y=e^x$ 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$$y-e^p=e^p(x-p)\qquad \text{すなわち}\quad y=e^px+(1-p)e^p\qquad \cdots\cdots ①$$

曲線 $y=-e^{-x}$ 上の点 $(q,\ -e^{-q})$ における接線の方程式は

$$y+e^{-q}=e^{-q}(x-q)\quad \text{すなわち}\quad y=e^{-q}x-(1+q)e^{-q}\quad \cdots\cdots ②$$

① と ② が一致するとき

$$e^p=e^{-q}\quad \cdots\cdots ③,\qquad (1-p)e^p=-(1+q)e^{-q}\quad \cdots\cdots ④$$

③ から　　$q=-p$
これを ④ に代入して　　$(1-p)e^p=-(1-p)e^p$
ゆえに　　$p=1$　　　したがって，求める方程式は　$y=ex$

15 $f(x)=\log x$ とすると　　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\log x-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=f'(1)$　　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから　(与式)$=1$

16 (1)　$y=g(x)=f^{-1}(x)$ とおくと　　$x=f(y)$

したがって　　$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$

ゆえに　　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{f'(y)}$

$f(1)=2$ から　　$f^{-1}(2)=1$　　　すなわち　　$g(2)=1$
よって　　$x=2$ のとき　$y=1$

ゆえに　　$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) より　　$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

よって　　$g''(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}=\dfrac{d}{dy}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

また，(1) より　$x=2$ のとき　$y=1$

ゆえに　　$g''(2)=-\dfrac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\dfrac{3}{2^3}=-\dfrac{3}{8}$

17　$0<x<1$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}=\frac{bx+a-b}{a}$

$1<x$ のとき　　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{b}{x^{2n-1}}+\dfrac{a-b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1-a}{x^n}+\dfrac{a}{x^{2n}}}=x^2$

また　　$f(1)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+b+a-b}{1+(1-a)\cdot1+a}=\frac{a+1}{2}$

$f(x)$ は $0<x<1$，$1<x$ で微分可能である。$x=1$ で微分可能となるためには，$x=1$ で連続であることが必要。その条件は

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$$

すなわち　　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{bx+a-b}{a}=\lim_{x\to1+0}x^2=\frac{a+1}{2}$

よって　$\dfrac{a+1}{2}=1$　　　　ゆえに　$a=1$　…… ①

① から　　$0<x<1$ のとき　$f(x)=bx+1-b$，$f(1)=1$

よって，$x=1$ における右側微分係数と左側微分係数は

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to+0}(2+h)=2$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\{b(1+h)+1-b\}-1}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{bh}{h}=\lim_{h\to-0}b=b$$

ゆえに，$f'(1)$ が存在するためには $b=2$ でなければならない。

逆に，$a=1$，$b=2$ のとき $f'(1)$ が存在して，$f(x)$ は $x>0$ で微分可能となる。

　　答　$a=1$，$b=2$

BASIC＋STANDARD問題

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{6}{t^4}dt$　(2) $\displaystyle\int \frac{2-y}{y^2}dy$　(3) $\displaystyle\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x+3)^3 dx$　(2) $\displaystyle\int (2-5x)^4 dx$　(3) $\displaystyle\int \left(\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$　(5) $\displaystyle\int e^{-3x}dx$　(6) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}dx$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (1-\tan x)\cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x+\cos x)^2 dx$

5 不定積分$\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$を求めよ。

6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{6}{x(x+3)}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

7 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)(2x^2+4x-1)^2 dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin x\,dx$

8 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)e^x dx$

(3) $\displaystyle\int \log(2x+1)\,dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\log x\,dx$

9 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

11 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{9+x^2}$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

12 ＊　定積分 $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

実戦問題

13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\int x^2 \sin x\,dx$

14 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$$

15 不定積分 $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2}dx$ を求めよ。

16 $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換して，$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を 求めよ。

17 $x \geqq 0$ で定義された関数 $y=e^x+e^{-x}$ の逆関数を $y=f(x)$ とするとき，$\int_2^4 f(x)\,dx$ を求めよ。

1 解答 (1) $-\dfrac{2}{t^3}+C$　(2) $-\dfrac{2}{y}-\log|y|+C$　(3) $2\sqrt{t}+\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

2 解答 (1) $\dfrac{1}{8}(2x+3)^4+C$　(2) $-\dfrac{1}{25}(2-5x)^5+C$　(3) $\dfrac{1}{2}\sin 2x-3\cos\dfrac{x}{3}+C$

(4) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}\sin 4x+C$　(5) $-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$　(6) $2e^{\frac{x}{2}}+C$

3 解答 (1) $\sin x+\cos x+C$　(2) $\tan x-x+C$

4 解答 (1) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{13}{4}-\dfrac{\pi}{8}-\sqrt{2}$

5 解答 $-\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

6 解答 (1) $2\log\left|\dfrac{x}{x+3}\right|+C$　(2) $\log|x-1|(x+1)^2+C$

7 解答 (1) $\log(e^x+2)+C$　(2) $\dfrac{1}{12}(2x^2+4x-1)^3+C$　(3) $-\dfrac{1}{4}\cos^4 x+C$

8 解答 (1) $\dfrac{1}{3}x\sin 3x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+C$　(2) xe^x+C

(3) $\dfrac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-x+C$　(4) $-\dfrac{1}{x}(\log x+1)+C$

9 解答 (1) $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$　(2) $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

10 解答 (1) $\dfrac{\pi}{2}+1$　(2) $\dfrac{\pi}{6}$

11 解答 (1) $\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\dfrac{5}{36}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{4}$

12 解答 $\dfrac{32}{15}\sqrt{2}$

13 解答 (1) $x\tan x+\log|\cos x|+C$　(2) $(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

14 解答 $\dfrac{\pi}{4}$

15 解答 $3\log\left|\dfrac{x}{x-1}\right|-\dfrac{4}{x-1}+C$　(C は積分定数)

16 解答 $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

17 解答 $4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\int \frac{6}{t^4}dt=\int 6t^{-4}dt=\frac{6}{-4+1}t^{-4+1}+C=-2t^{-3}+C=-\frac{2}{t^3}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{2-y}{y^2}dy=\int\left(\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=\int\left(2y^{-2}-\frac{1}{y}\right)dy=\frac{2}{-2+1}y^{-2+1}-\log|y|+C$

$\displaystyle=-2y^{-1}-\log|y|+C=-\frac{2}{y}-\log|y|+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt=\int\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C$

$\displaystyle=2t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=2\sqrt{t}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\int(2x+3)^3dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{3+1}}{3+1}+C=\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$

(2) $\displaystyle\int(2-5x)^4dx=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(2-5x)^{4+1}}{4+1}+C=-\frac{1}{25}(2-5x)^5+C$

(3) $\displaystyle\int\left(\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\sin 2x-3\cos\frac{x}{3}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

(6) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}+C$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\int(1-\tan x)\cos x\,dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$　　Cは積分定数

(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C$　　Cは積分定数

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cos x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+2\sin x+\cos^2 x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$\displaystyle=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$=1-\frac{\pi}{4}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}-\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}$$

5　$\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$　であるから

$$\int \sin 3x\cos x\,dx=\int \frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$　C は積分定数

6　C は積分定数である。

(1)　$\int \frac{6}{x(x+3)}dx=\int 2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=2(\log|x|-\log|x+3|)+C=2\log\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$

(2)　$\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx=\int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$=\log|x-1|+2\log|x+1|+C=\log|x-1|+\log(x+1)^2+C=\log|x-1|(x+1)^2+C$$

7　(1)　$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx=\int \frac{(e^x+2)'}{e^x+2}dx=\log|e^x+2|+C=\log(e^x+2)+C$

(2)　$\int (x+1)(2x^2+4x-1)^2dx=\frac{1}{4}\int (2x^2+4x-1)^2(2x^2+4x-1)'dx$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(2x^2+4x-1)^3+C=\frac{1}{12}(2x^2+4x-1)^3+C$$

(3)　$\int \cos^3 x\sin x\,dx=-\int \cos^3 x(\cos x)'dx=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

8　(1)　$\int x\cos 3x\,dx=\int x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'dx=x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\int x'\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\,dx$

$$=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$$

(2)　$\int (x+1)e^x dx=\int (x+1)(e^x)'dx=(x+1)e^x-\int (x+1)'e^x dx=(x+1)e^x-\int e^x dx$

$$=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

(3)　$\int \log(2x+1)\,dx=\int\left(\frac{2x+1}{2}\right)'\log(2x+1)\,dx$

$$=\frac{2x+1}{2}\log(2x+1)-\int \frac{2x+1}{2}\{\log(2x+1)\}'dx$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-\int \frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}dx=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-\int dx$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-x+C$$

(4)　$\int \frac{1}{x^2}\log x\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx=-\frac{1}{x}\log x-\int\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'dx$

$$=-\frac{1}{x}\log x+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x}\log x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\log x-\frac{1}{x}+C$$

$$=-\frac{1}{x}(\log x+1)+C$$

$\boxed{9}$ (1) $\int\sin^5 x\,dx=\int\sin^4 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

よって　　$\int\sin^5 x\,dx=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(t^4-2t^2+1)dt$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+C$$

$$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

(2) $\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int\cos^2 x\cos x\sin^2 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\sin^2 x\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと　　$\cos x\,dx=dt$

よって　　$\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int(1-t^2)t^2dt=\int(t^2-t^4)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

$\boxed{10}$ (1) $\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$$2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

$\boxed{11}$ (1)　$x=3\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$

x	$-\sqrt{3}$	$\to$	3
θ	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$$\int_{-\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{9+x^2}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9+9\tan^2\theta}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{36}\pi$$

(2)　$x+1=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	-1	$\to$	0
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+(x+1)^2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{12}$ $t=2-\sqrt{x}$ とおくと $dt=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}dx$　ゆえに　$dx=-2\sqrt{x}\,dt=-2(2-t)dt$ となる.

したがって　$\displaystyle\int_0^4\sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx=-2\int_2^0\sqrt{t}\,(2-t)dt=2\int_0^2\sqrt{t}\,(2-t)dt$

$$=4\int_0^2\sqrt{t}\,dt-2\int_0^2 t^{\frac{3}{2}}dt=4\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2-2\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right)-\frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-0\right)=\frac{16\sqrt{2}}{3}-\frac{16\sqrt{2}}{5}$$

$$=16\sqrt{2}\left(\frac{5-3}{15}\right)=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

別解　$\sqrt{2-\sqrt{x}}=t$ とおくと $2-\sqrt{x}=t^2$　よって　$x=(2-t^2)^2$

また $dx=2(2-t^2)(-2t)dt=4(t^2-2)tdt$

したがって　(与式)$\displaystyle=\int_{\sqrt{2}}^{0}t\times4(t^2-2)tdt=-4\int_0^{\sqrt{2}}(t^4-2t^2)dt=-4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}$

$$=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

13 (1) $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x(\tan x)'dx=x\tan x-\int x'\tan x\,dx=x\tan x-\int\tan x\,dx$

$\displaystyle=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$

(2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'dx=-x^2\cos x-\int(x^2)'(-\cos x)dx$

$\displaystyle=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx$

$\displaystyle=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int x'\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx$

$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C=(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

14 $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$x-1=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ では $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

したがって　　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi}{4}$$

15 $\dfrac{x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ とおき，

この両辺に $x(x-1)^2$ を掛けて　　$x+3=a(x-1)^2+bx(x-1)+cx$

右辺を整理すると　　$x+3=(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a$

これが x についての恒等式であるから

$$a+b=0,\quad 2a+b-c=-1,\quad a=3$$

これを解いて　　$a=3$，$b=-3$，$c=4$

$\displaystyle\int\frac{x+3}{x(x-1)^2}dx=\int\left\{\frac{3}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right\}dx=3\log|x|-3\log|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

$\displaystyle=3\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$　(C は積分定数)

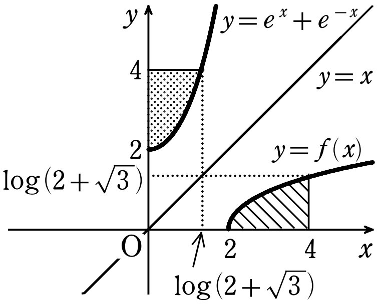
16 $x+\sqrt{x^2+1}=t$ から　$x^2+1=(t-x)^2$　　　よって　$x=\dfrac{t^2-1}{2t}=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$

したがって　　$dx=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt=\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$，$\sqrt{x^2+1}=t-x=\dfrac{t^2+1}{2t}$

よって　　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$

$$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

17 $I=\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$ において



$x=e^y+e^{-y}$ とすると　　$dx=(e^y-e^{-y})dy$

$2=e^y+e^{-y}$ とすると　　$e^{2y}-2e^y+1=0$

よって　$(e^y-1)^2=0$　　　ゆえに　$y=0$

$4=e^y+e^{-y}$ とすると　　$e^{2y}-4e^y+1=0$

よって　$e^y=2+\sqrt{3}$　　　ゆえに　$y=\log(2+\sqrt{3})$

したがって　$I=\displaystyle\int_0^{\log(2+\sqrt{3})} y(e^y-e^{-y})dy$

$$=\Big[y(e^y+e^{-y})\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})}-\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}(e^y+e^{-y})dy$$

$$=\log(2+\sqrt{3})\cdot\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-\Big[e^y-e^{-y}\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})-\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$