

9 関数 $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) の逆関数を求めよ。

10 * 関数 $f(x) = \frac{2x+a}{x+1}$, $g(x) = \frac{3x+b}{x+c}$ を考える。

合成関数 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ が $(f \circ g)(x) = \frac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

11 不等式 $\frac{3}{1+\frac{2}{x}} \geq x^2$ を解け。

12 不等式 $\sqrt{4x-x^2} > 3-x$ を解け。

実戦問題

13 関数 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$ の周期のうち、正で最小のものを求めよ。

14 関数 $f(x) = \log_2(x+3)$ に対し、その逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。また、 $g(x) = \sqrt{x+1}$ のとき、不等式 $g^{-1}(x) \geq g(x)$ を満たす x の範囲を求めよ。

BASIC問題

1 次の循環小数の積を1つの既約分数で表せ。 $0.\dot{1}\dot{2} \times 0.\dot{2}\dot{7}$

2 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2} + n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$

3 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n + 2^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + (-3)^n}{(-3)^n + 2^{n+1}}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (8^n - 9^n)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(-2)^n + 2^{2n}\}$

4 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5}{4^n}$ の和を求めよ。

STANDARD問題

5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$ を求めよ。

6 関数 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ のグラフをかけ。

7 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの和を求めよ。
 $(3-x) + x(3-x) + x^2(3-x) + \dots$

8 次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1) $\left(\frac{3}{2} - 5\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{5}{27}\right) + \dots$

(2) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{16} + \dots$

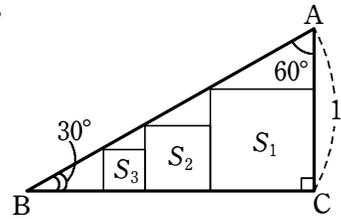
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

実戦問題

9 数列 $\left\{ \frac{r^{2n} + r^n}{r^{2n} + 2} \right\}$ の極限を求めよ。

10 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ の和を求めよ。

- 11 $A=60^\circ, B=30^\circ, AC=1$ である直角三角形 ABC 内に、右の図のように正方形 S_1, S_2, S_3, \dots が限りなく並んでいるとき、これらの正方形の面積の総和を求めよ。



- 12 $\angle A = 2\theta$ の二等辺三角形 ABC の内接円 O_1 の半径を r とする。等辺 AB, AC と円 O_1 に接する円を O_2 とし、 AB, AC と円 O_2 に接する円を O_3 とし、このように、次々に円 $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots$ が並んでいる。このとき、すべての円の面積の和 S を求めよ。

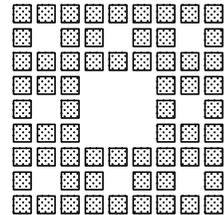
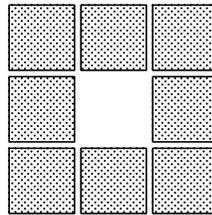
- 13 二項定理を用いて、数列 $\left\{ \frac{3^n}{n} \right\}$ の極限を求めよ。

- 14 $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $|a_{n+1}-3| \leq \frac{2}{3}|a_n-3|$ を証明せよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

- 15 図のように正方形を9等分して、中央の正方形を取り除いた図形を S_1 とする。残された8個の正方形を9等分し、それぞれの中央の正方形を取り除いた図形を S_2 とする。このような操作を n 回繰り返して構成される図形を S_n とする。



各々の図形における最小の正方形をセルと呼び、 S_n のセルの総数を a_n とし、さらに S_n における隣接したセルが共有する辺の総数を b_n とする。例えば、 $a_1=8, b_1=8$ である。次の問いに答えよ。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) b_2 および b_3 を求めよ。
- (3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (4) b_n を求めよ。
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

BASIC問題

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x-3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

3 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x} + x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x}}$

4 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

5 $x \leq 0$ のとき $f(x) = 1$, $0 < x < \pi$ のとき $f(x) = \frac{ax^2}{1 - \cos x}$, $x \geq \pi$ のとき $f(x) = b$

である関数 $f(x)$ が, すべての区間で連続になるように, 定数 a, b の値を定めよ。

STANDARD問題

6 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x}}$

7 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

8 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x+3}{|2x+6|}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2-x}$

9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = 1$ が成り立つように, 定数 a, b の値を定めよ。

10 次の極限を求めよ。ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x|}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} ([2x] - [x])$

11 次の極限値を求めよ。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

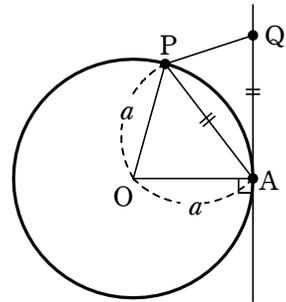
(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[3x]}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}$

実戦問題

12 半径 a の円 O の周上に動点 P と定点 A がある。 A における接線上に $AQ = AP$ であるような点 Q を OA に関して P と同じ側にとる。 P が A に限りなく近づくとき、

$\frac{PQ}{\widehat{AP}^2}$ の極限値を求めよ。



13 次の極限値を計算して、 n の単項式で表せ。

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n-1)x}{x - \pi}$$

14 次の2つの条件をともに満たす多項式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$$

15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos^2 x + (3b+2) \sin x - 2a + b + 1}{\sin^3 x + a \cos^2 x - a} = c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ。

BASIC問題

- 1 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、次の極限値を a , $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-3h)}{h}$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(a)\}^2}{x - a}$

- 2 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x \cos 2x$

(2) $y = \sin 3x \cos x$

- 3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{3 + \sin x}$

(2) $y = \frac{x^2}{\cos x}$

- 4 次の関数を微分せよ。ただし、 $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

(1) $y = \tan 3x$

(2) $y = \sin x^3$

(3) $y = \cos^3 x$

(4) $y = \log(\sin x)$

(5) $y = \log \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right|$

(6) $y = e^{-2x} \cos 2x$

(7) $y = a^{-x^2}$

- 5 媒介変数で表された次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x = \frac{e^{3t}}{1+t^2}$, $y = \frac{t}{1+t^2}$

(2) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$

- 6 関数 $y = x^{2x}$ ($x > 0$) を微分せよ。

- 7 次の x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を x , y で表せ。

(1) $x^2 - xy - y^2 = 1$

(2) $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$

STANDARD問題

- 8 関数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & (x \leq 2 \text{ のとき}) \\ x^2 + ax + b & (2 < x \text{ のとき}) \end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような定数 a, b の値を求めよ。
- 9 * 関数 $y = \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x+\sqrt{x^2+4}) \}$ を微分せよ。
- 10 * 曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$ 上の点 $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ。
- 11 $f(x) = \cos x$ ($\pi < x < 2\pi$) の逆関数を $g(x)$ とする。このとき、 $g(x)$ の導関数を求めよ。
- 12 関数 $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ について、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。
- 13 2曲線 $y = ax^3$ と $y = 3\log x$ が共有点をもち、その点における2曲線の接線が一致しているとき、定数 a の値を求めよ。また、その共有点における接線の方程式を求めよ。
- 14 2つの曲線 $y = e^x, y = -e^{-x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

実戦問題

- 15 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。
- 16 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。 $f(1) = 2, f'(1) = 2, f''(1) = 3$ のとき、
 (1) $g'(2)$ の値を求めよ。 (2) $g''(2)$ の値を求めよ。
- 17 a, b は定数で $a \neq 0$ とする。関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} + bx + a - b}{x^{2n} + (1-a)x^n + a}$ が $x > 0$ で微分可能である条件を求めよ。

BASIC+STANDARD問題

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{6}{t^4} dt$ (2) $\int \frac{2-y}{y^2} dy$ (3) $\int \frac{1+t}{\sqrt{t}} dt$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (2x+3)^3 dx$ (2) $\int (2-5x)^4 dx$ (3) $\int \left(\cos 2x + \sin \frac{x}{3} \right) dx$
 (4) $\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx$ (5) $\int e^{-3x} dx$ (6) $\int e^{\frac{x}{2}} dx$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (1-\tan x)\cos x dx$ (2) $\int \tan^2 x dx$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cos x)^2 dx$

5 不定積分 $\int \sin 3x \cos x dx$ を求めよ。

6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{6}{x(x+3)} dx$ (2) $\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$

7 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+2} dx$ (2) $\int (x+1)(2x^2+4x-1)^2 dx$ (3) $\int \cos^3 x \sin x dx$

8 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x \cos 3x dx$ (2) $\int (x+1)e^x dx$
 (3) $\int \log(2x+1) dx$ (4) $\int \frac{1}{x^2} \log x dx$

9 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^5 x dx$ (2) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx$ (2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

11 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{9+x^2}$ (2) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

- 12 * 定積分 $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}} dx$ を求めよ。

実戦問題

- 13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

(2) $\int x^2 \sin x dx$

- 14 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$$

- 15 不定積分 $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2} dx$ を求めよ。

- 16 $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置換して、 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ を求めよ。

- 17 $x \geq 0$ で定義された関数 $y = e^x + e^{-x}$ の逆関数を $y = f(x)$ とするとき、 $\int_2^4 f(x) dx$ を求めよ。