BASIC問題

1　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$6x^2-5x-6=0$　　(2)　$2x^2-6x+3=0$

2　次の不等式を解け。

(1)　$\begin{cases}4x+1<3x-1\\2x-1\geqq 5x+6\end{cases}$　　(2)　$\begin{cases}2x+3>x+2\\3x>4x+2\end{cases}$

(3)　$2(x-3)+5<5x-6\leqq\dfrac{3x+4}{3}$

3　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x-1|=2$　　(2)　$|x+4|<5$　　(3)　$|2x-3|\geqq 4$

4　次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

5　実数 x，y が $x+y=3$，$xy=-2$ を満たすとき，x^2+y^2，x^3+y^3，x^5+y^5 の値を求めよ

6　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　　(2)　$\sqrt{15-6\sqrt{6}}$　　(3)　$\sqrt{3-\sqrt{5}}$

STANDARD問題

7　a を定数とするとき，次の不等式を解け。

(1)　$ax\leqq 1$　　(2)　$ax+6>3x+2a$

8　次の式を因数分解せよ。

(1)　$a^3-a^2c-ab^2+b^2c$　　(2)　$2x^2+3xy-2y^2+x+7y-3$

9　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x-3|=2x$　　(2)　$|x-3|<2x$　　(3)　$|x|+|x-2|=6$

10　$\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

11　$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^4+\dfrac{1}{x^4}$，$x^6+\dfrac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

実戦問題篇

12　a を定数とするとき，次の方程式を解け。

(1)　$ax^2+(a^2-1)x-a=0$　　(2)　$a^2x+1=a(x+1)$

13　＊　$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものを求めよ。

14　＊　相異なる実数 α，β が $\begin{cases}\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6}\\\beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6}\end{cases}$ を満たすとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

15 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。

(1) a と b を求めよ。

(2) $a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

16 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x+2|-|x-1|>x$　　(2) $||x-1|-2|-3=0$

17 x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a\geqq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

1 解答 (1) $x=\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3}$ (2) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

2 解答 (1) $x\leqq-\frac{7}{3}$ (2) 解はない (3) $\frac{5}{3}<x\leqq\frac{11}{6}$

3 解答 (1) $x=3,\ -1$ (2) $-9<x<1$ (3) $x\leqq-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\leqq x$

4 解答 (1) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{5\sqrt{3}}{18}$

5 解答 $x^2+y^2=13,\ x^3+y^3=45,\ x^5+y^5=573$

6 解答 (1) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ (2) $3-\sqrt{6}$ (3) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

7 解答 (1) $a>0$ のとき　$x\leqq\frac{1}{a}$

$a=0$ のとき　すべての実数

$a<0$ のとき　$x\geqq\frac{1}{a}$

(2) $a>3$ のとき　$x>2$

$a=3$ のとき　解はない

$a<3$ のとき　$x<2$

8 解答 (1) $(a+b)(a-b)(a-c)$ (2) $(x+2y-1)(2x-y+3)$

9 解答 (1) $x=1$ (2) $x>1$ (3) $x=-2,\ 4$

10 解答 $\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$

11 解答 $x^2+\frac{1}{x^2}=10,\ x^4+\frac{1}{x^4}=98,\ x^6+\frac{1}{x^6}=970$

12 解答 (1) $a\fallingdotseq 0$ のとき $x=-a,\ \frac{1}{a}$

$a=0$ のとき $x=0$

(2) $a\fallingdotseq 0,\ a\fallingdotseq 1$ のとき $x=\frac{1}{a}$

$a=0$ のとき 解はない

$a=1$ のとき すべての実数

13 解答 73

14 解答 順に，$\sqrt{3}$，$3-\sqrt{6}$，$1+\sqrt{6}$

15 解答 (1) $a=3,\ b=\sqrt{3}-1$ (2) 6

16 解答 (1) $x<-3,\ -1<x<3$ (2) $x=6,\ -4$

17 解答 $19\leqq a<21$

$\boxed{1}$ (1)　左辺を因数分解すると　$(2x-3)(3x+2)=0$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\diagup & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 4 \\ \hline 6 & & -6 & & -5 \end{array}$$

よって　$2x-3=0$　または　$3x+2=0$

したがって　$x=\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{2}{3}$

(2)　解の公式により　$x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$

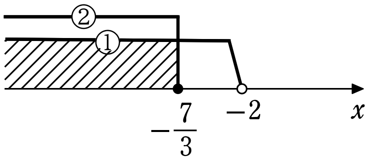
$=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

別解　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ (1)　$4x+1<3x-1$ から　$x<-2$　……①

$2x-1\geqq5x+6$ から　$-3x\geqq7$

よって　$x\leqq-\dfrac{7}{3}$　……②

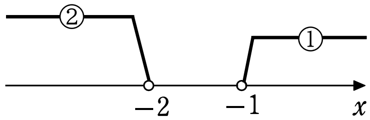


①と②の共通範囲を求めて　$x\leqq-\dfrac{7}{3}$

(2)　$2x+3>x+2$ から　$x>-1$　……①

$3x>4x+2$ から　$-x>2$

よって　$x<-2$　……②



①と②の共通範囲はないから，この連立不等式の解はない。

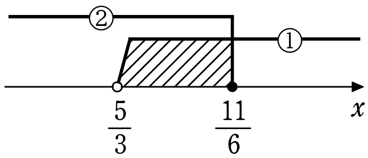
(3)　$2(x-3)+5<5x-6$ から　$-3x<-5$

よって　$x>\dfrac{5}{3}$　……①

$5x-6\leqq\dfrac{3x+4}{3}$ から　$15x-18\leqq3x+4$

よって　$12x\leqq22$

ゆえに　$x\leqq\dfrac{11}{6}$　……②



①と②の共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{3}<x\leqq\dfrac{11}{6}$

$\boxed{3}$ (1)　$|x-1|=2$ から　$x-1=\pm2$　　よって　$x=3$，-1

(2)　$|x+4|<5$ から　$-5<x+4<5$

各辺から 4 を引いて　$-9<x<1$

(3)　$|2x-3|\geqq4$ から　$2x-3\leqq-4$　または　$4\leqq2x-3$

よって　$2x\leqq-1$　または　$7\leqq2x$　　ゆえに　$x\leqq-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{7}{2}\leqq x$

$\boxed{4}$ (1)　$\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{3}$$

$$=\left(\frac{6}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}\right)\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$$

$\boxed{5}$ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot(-2)=13$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\cdot(-2)\cdot 3=45$

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x^2y^3+x^3y^2)=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$

$=13\cdot 45-(-2)^2\cdot 3=573$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}=3\{13-(-2)\}=45$

$\boxed{6}$ (1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)-2\sqrt{7\cdot 2}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}=\sqrt{15-2\sqrt{54}}=\sqrt{(9+6)-2\sqrt{9\cdot 6}}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{6}=3-\sqrt{6}$

(3) $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{7}$ (1) [1]　$a>0$ のとき

両辺を正の数 a で割って　$x\leqq\frac{1}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

与えられた不等式 $0\cdot x\leqq 1$ の解は

すべての実数

[3]　$a<0$ のとき

両辺を負の数 a で割って　$x \geqq \dfrac{1}{a}$

(2)　不等式を整理すると

$$(a-3)x > 2(a-3) \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$a-3>0$ すなわち $a>3$ のとき

両辺を正の数 $a-3$ で割って　$x > \dfrac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち　　$x>2$

[2]　$a-3=0$ すなわち $a=3$ のとき

不等式 ① は解がない。

[3]　$a-3<0$ すなわち $a<3$ のとき

両辺を負の数 $a-3$ で割って　$x < \dfrac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち　　$x<2$

$\boxed{8}$ (1)　与式 $=(-a^2+b^2)c+a(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a-c)$

$=(a+b)(a-b)(a-c)$

(2)　与式 $=2x^2+(3y+1)x-(2y^2-7y+3)$

$=2x^2+(3y+1)x-(y-3)(2y-1)$

$=\{x+(2y-1)\}\{2x-(y-3)\}$

$=(x+2y-1)(2x-y+3)$

$$\begin{array}{llcr}
1 & 2y-1 & \longrightarrow & 4y-2 \\
2 & -(y-3) & \longrightarrow & -y+3 \\
\hline
2 & -(y-3)(2y-1) & & 3y+1
\end{array}$$

$\boxed{9}$ (1)　[1]　$x-3 \geqq 0$　すなわち　$x \geqq 3$ のとき

$|x-3|=x-3$ であるから，方程式は　　$x-3=2x$

これを解くと　$x=-3$　　　　これは $x \geqq 3$ を満たさない。

[2]　$x-3<0$　すなわち　$x<3$ のとき

$|x-3|=-(x-3)$ であるから，方程式は　　$-(x-3)=2x$

これを解くと　$x=1$　　　　これは $x<3$ を満たす。

[1]，[2] から，求める解は　$x=1$

参考　$|A|=B$ は「$A=\pm B$　かつ　$B \geqq 0$」と同じであるから，次のように解くこともできる。

$|x-3|=2x$ から　　$x-3=\pm 2x$　かつ　$2x \geqq 0$

よって　　$x=-3$，1　かつ　$x \geqq 0$　　　　したがって　　$x=1$

(2)　[1]　$x \geqq 3$ のとき

不等式は　　$x-3<2x$　　　これを解くと　$x>-3$

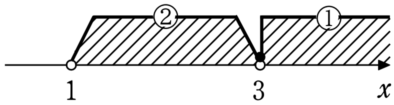
これと $x \geqq 3$ の共通範囲は　$x \geqq 3$　$\cdots\cdots$ ①

[2]　$x<3$ のとき

不等式は　　$-(x-3)<2x$　　　これを解くと　$x>1$

これと $x<3$ の共通範囲は

$$1<x<3 \quad \cdots\cdots ②$$



[1], [2] から，求める解は ① と ② を合わせた範囲で　　$x>1$

(3)　[1]　$x<0$ のとき

$|x|=-x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　　$-x-(x-2)=6$

これを解くと　$x=-2$　　　　これは $x<0$ を満たす。

[2]　$0 \leqq x<2$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　　$x-(x-2)=6$

すなわち　$0 \cdot x=4$　　　　この方程式の解はない。

[3]　$2 \leqq x$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=x-2$ であるから，方程式は　　$x+(x-2)=6$

これを解くと　$x=4$　　　　これは $2 \leqq x$ を満たす。

以上から，求める解は　$x=-2$，4

10

$$\frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$$

11　$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

よって　　$x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

ゆえに　　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{3})^2-2=10$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=10^2-2=98$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=10^3-3 \cdot 10=970$$

別解　$x^6+\dfrac{1}{x^6}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^4-1+\dfrac{1}{x^4}\right)=10(98-1)=970$

12　(1)　$ax^2+(a^2-1)x-a=0$ から

$$(x+a)(ax-1)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$a \neq 0$ のとき

①の解は　$x=-a,\ \dfrac{1}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

①は　$x\cdot(-1)=0$ となるから，解は

$$x=0$$

(2)　$a^2x+1=a(x+1)$ から

$$a(a-1)x=a-1 \quad \cdots\cdots ①$$

$a(a-1)\neq 0$ すなわち $a\neq 0$，$a\neq 1$ のとき

$$x=\frac{1}{a}$$

$a=0$ のとき　①から　$0\cdot x=-1$

これを満たす x の値はない。すなわち，解はない。

$a=1$ のとき　①から　$0\cdot x=0$

これはすべての数 x について成り立つから，解は

すべての実数。

13　$a^{18}-b^{18}=(a^9)^2-(b^9)^2=(a^9+b^9)(^{ア}a^9-b^9)=\{(a^3)^3+(b^3)^3\}\{(a^3)^3-(b^3)^3\}$

$=(a^3+b^3)(^{イ}a^6-a^3b^3+b^6)(^{ウ}a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)$

この式で $a=2$，$b=1$ とおくと

$$2^{18}-1=(8+1)(64-8+1)(8-1)(64+8+1)=9\times 57\times 7\times 73=3^3\times 7\times 19\times 73$$

よって，$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものは $^{エ}73$ である。

14

$$\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6} \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より　$\alpha^2-\beta^2-\sqrt{3}(\alpha-\beta)=0$

整理すると　$(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\}=0$

$\alpha\neq\beta$ から　$\alpha+\beta-\sqrt{3}=0$

したがって　$\alpha+\beta=\sqrt{3}$

①＋②より　$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

よって　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

ゆえに　$(\sqrt{3})^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

したがって　$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

$\alpha+\beta=\sqrt{3}$，$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$ から

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\sqrt{3})^2-2(3-\sqrt{6})}{3-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}-3}{3-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{3+3\sqrt{6}}{9-6}=1+\sqrt{6}$$

15 (1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=1.73\cdots\cdots$ であるから　$2+\sqrt{3}=3.73\cdots\cdots$

よって　$a=3$,

$b=(2+\sqrt{3})-a=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

(2) $a+2b+b^2+1=3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2+1$

$=3+2\sqrt{3}-2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+1$

$=6$

別解　$a+2b+b^2+1=a+(b+1)^2$

$=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2$

$=3+(\sqrt{3})^2$

$=6$

16 (1) $|x+2|-|x-1|>x$　……①

[1]　$x<-2$ のとき，① は　$-(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x<-3$

これと $x<-2$ との共通範囲は　$x<-3$

[2]　$-2\leqq x<1$ のとき，① は　$(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x>-1$

これと $-2\leqq x<1$ との共通範囲は　$-1<x<1$

[3]　$x\geqq 1$ のとき，① は　$(x+2)-(x-1)>x$

よって　$x<3$

これと $x\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq x<3$

[1]，[2]，[3] から，解は　$x<-3$，$-1<x<3$

(2) $||x-1|-2|-3=0$　……①

[1]　$x\geqq 1$ のとき　$|x-1|=x-1$ であるから，① は

$|(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x-3|=3$

よって　$x-3=\pm 3$　　これを解くと　$x=6$，0

$x\geqq 1$ を満たすのは　$x=6$

[2]　$x<1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$ であるから，① は

$|-(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x+1|=3$

よって　$x+1=\pm 3$　　これを解くと　$x=2$，-4

$x<1$ を満たすのは　$x=-4$

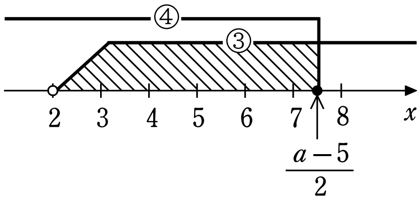
[1]，[2] から，解は　$x=6$，-4

17 $\begin{cases}7x-5>13-2x & \cdots\cdots ①\\ x+a\geqq 3x+5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$9x>18$　　よって　$x>2$　……③

②から　$-2x \geqq -a+5$　　よって　　$x \leqq \dfrac{a-5}{2}$　……④

条件を満たすのは，③と④を同時に満たす整数 x が 3，4，5，6，7 となるときであるから　$7 \leqq \dfrac{a-5}{2} < 8$



各辺に 2 を掛けて　　$14 \leqq a-5 < 16$

各辺に 5 を加えて　　$19 \leqq a < 21$

これが求める a の値の範囲である。

BASIC問題

1 次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+8x+9$

(2)　$y=x^2-2x$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=-3x^2-2x+4$ $(-1<x<2)$

2 次の不等式を解け。

(1)　$5<x^2+4x\leqq 21$　　(2)　$2x+3<x^2<5$

3 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したあと，y 軸に関して対称移動させ，更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，$y=x^2$ のグラフと一致した．a，b の値を求めよ．

4 グラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

STANDARD問題

5 2 次不等式 $4x^2+ax+b<0$ の解が $1<x<\dfrac{5}{4}$ であるとき，2 次不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ の解を求めよ。

6 a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

7 次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　2 次不等式 $x^2-(m-1)x+3>0$ の解がすべての実数となる。

(2)　2 次不等式 $-x^2+2mx+m\geqq 0$ が解をもつ。

8 2 次方程式 $x^2-(a+2)x+a(2a+1)=0$ の異なる 2 つの実数解を α，β とするとき，$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

10 2 次方程式 $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ は，定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという．実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ．

11 $f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

12 x についての次の２つの不等式

$$2x^2-3x-5>0$$

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

を同時に満たす整数 x がただ１つ存在するとき，定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

13 ２次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で常に成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

14 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のとき，x の関数 $y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ.

□1 解答 (1) 最大値はない，$x=-2$ のとき最小値 1

(2) $x=3$ のとき最大値 3，$x=1$ のとき最小値 -1

(3) $x=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{3}$，最小値はない

□2 解答 (1) $-7\leqq x<-5,\ 1<x\leqq 3$ (2) $-\sqrt{5}<x<-1$

□3 解答 $a=6,\ b=7$

□4 解答 $y=x^2-x+3$

□5 解答 $x\leqq\dfrac{4}{5},\ 1\leqq x$

□6 解答 (1) $a<0$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$，

$0\leqq a\leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2-a$，

$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2) $a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $-9a+8$；

$a=1$ のとき $x=0,\ 2$ で最大値 -1；

$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$

□7 解答 (1) $1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$ (2) $m\leqq -1,\ 0\leqq m$

□8 解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{3}{4}$

□9 解答 $3<m<\dfrac{25}{8}$

□10 解答 $-2<b<2$

□11 解答 (1) $-3<a<3$ (2) $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

□12 解答 $-3\leqq a<-2$ のとき $x=-2$，$3<a\leqq 4$ のとき $x=3$

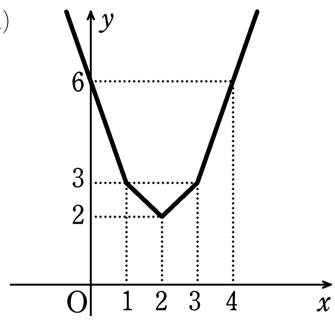
□13 解答 $-1<a<3$

□14

解答 (1) ［図］

(2) $x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

(1)



$\boxed{1}$ (1) $y=2x^2+8x+9$

$=2(x^2+2\cdot 2x+2^2)-2\cdot 2^2+9$

$=2(x+2)^2+1$

よって，$x=-2$ のとき最小値 1 をとる。

最大値はない。

(2) $y=x^2-2x$

$=(x^2-2\cdot 1x+1^2)-1^2$

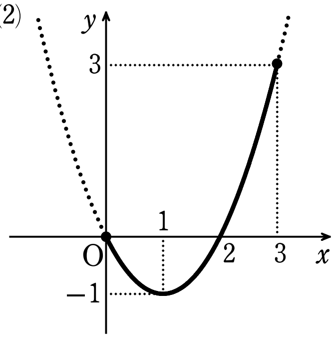
$=(x-1)^2-1 \quad (0\leqq x\leqq 3)$

よって，グラフは [図] の実線部分である。

ゆえに，$x=3$ のとき最大値 3,

$x=1$ のとき最小値 -1 をとる。

(2)



(3) $y=-3x^2-2x+4$

$=-3\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4$

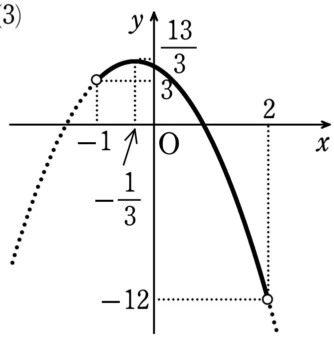
$=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3} \quad (-1<x<2)$

よって，グラフは [図] の実線部分である。

ゆえに，$x=-\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{3}$ をとる。

最小値はない。

(3)



$\boxed{2}$ (1) $5<x^2+4x\leqq 21$ から $\begin{cases} 5<x^2+4x & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x\leqq 21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から $x^2+4x-5>0$ よって $(x+5)(x-1)>0$

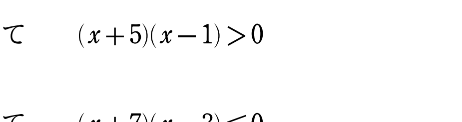
ゆえに $x<-5,\ 1<x$ ……③

② から $x^2+4x-21\leqq 0$ よって $(x+7)(x-3)\leqq 0$

ゆえに $-7\leqq x\leqq 3$ ……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-7\leqq x<-5,\ 1<x\leqq 3$



(2) $2x+3<x^2<5$ から $\begin{cases} 2x+3<x^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2<5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から $x^2-2x-3>0$ よって $(x+1)(x-3)>0$

ゆえに $x<-1,\ 3<x$ ……③

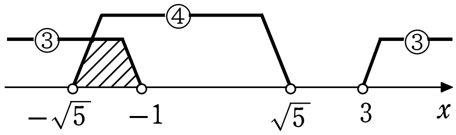
② から $x^2-5<0$ $x^2-5=0$ を解くと $x=\pm\sqrt{5}$

よって，② の解は

$$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ④$$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$-\sqrt{5}<x<-1$$



3　移動を逆にたどる．

$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x-3)^2$

このグラフを y 軸に関して対称移動すると，グラフの方程式は　$y=(-x-3)^2$

すなわち　$y=(x+3)^2$

このグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x+3)^2-2$

すなわち　$y=x^2+6x+7$

これが $y=x^2+ax+b$ と一致するから　$a=6$，$b=7$

4　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 3=a\cdot1^2+b\cdot1+c \\ 5=a\cdot2^2+b\cdot2+c \\ 9=a\cdot3^2+b\cdot3+c \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a+b+c=3 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=5 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②－① から　$3a+b=2$　……④

③－② から　$5a+b=4$　……⑤

⑤－④ から　$2a=2$　　よって　$a=1$

④ から　$3+b=2$　　よって　$b=-1$

① から　$1-1+c=3$　　よって　$c=3$

したがって，求める 2 次関数は　$y=x^2-x+3$

5　条件から，$y=4x^2+ax+b$ のグラフは $1<x<\dfrac{5}{4}$ の範囲で x 軸より下側にある。

すなわち，2 点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ を通るから　$4+a+b=0$，$\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{4}a+b=0$

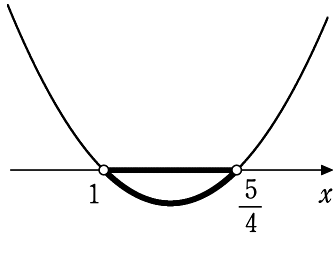
これを解くと　$a=-9$，$b=5$

よって，不等式 $bx^2+ax+4\geqq0$ は

$$5x^2-9x+4\geqq0$$

すなわち　$(5x-4)(x-1)\geqq0$

これを解くと　$x\leqq\dfrac{4}{5}$，$1\leqq x$



6　$y=2x^2-4ax-a$ を変形すると

$$y=2(x-a)^2-2a^2-a$$

この放物線の軸は直線 $x=a$ である。

(1) [1] $a<0$ のとき

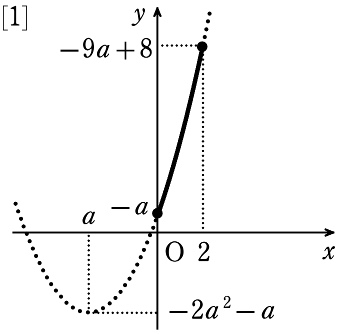
グラフは［図］の実線部分のようになる。

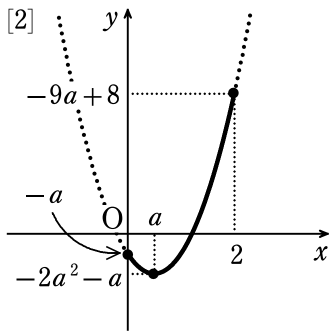
よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

[2] $0\leqq a\leqq 2$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$ をとる。





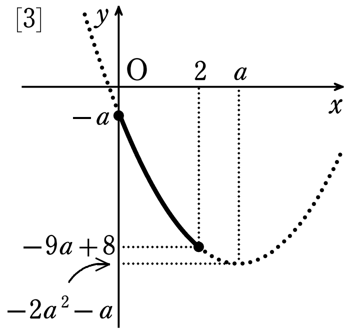
[3] $2<a$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，

$x=2$ で最小値 $-9a+8$

をとる。



以上から

$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 $-a$

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$

$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2) 定義域の中央の値は　1

[1] $a<1$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

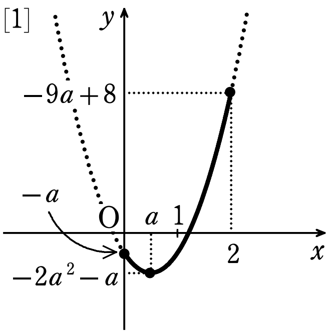
よって，$x=2$ で最大値 $-9a+8$ をとる。

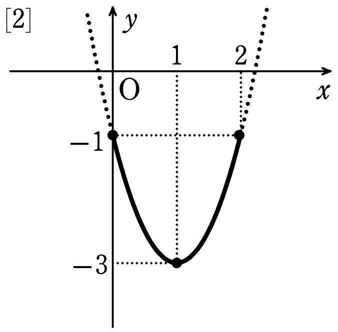
[2] $a=1$ のとき

$y=2(x-1)^2-3$

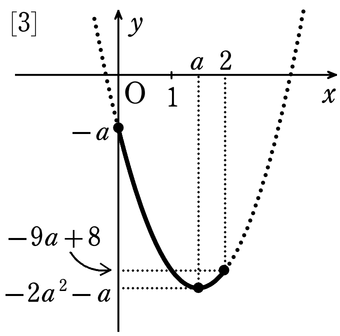
グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，$x=0$，2 で最大値 -1 をとる。





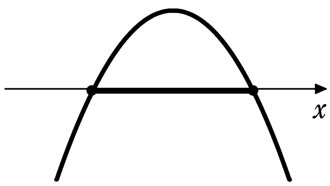
[3]　$1<a$ のとき
　グラフは［図］の実線部分
　のようになる。
　よって，
　　$x=0$ で最大値 $-a$
　をとる。



以上から
　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $-9a+8$
　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 -1
　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $-a$

$\boxed{7}$ (1)　x^2 の係数は正であるから，この 2 次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は　$D=\{-(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot3<0$　すなわち　$m^2-2m-11<0$
これを解いて　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$

(2)　この 2 次不等式が解をもつための必要十分条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことである。

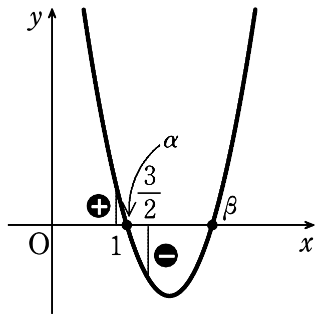


すなわち　$D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq0$
よって　$4(m^2+m)\geqq0$
ゆえに　$m(m+1)\geqq0$
したがって　$m\leqq-1$，$0\leqq m$

8　$f(x)=x^2-(a+2)x+a(2a+1)$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，

$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ となる条件は，右の図より



$$f(1)>0 \quad かつ \quad f\left(\frac{3}{2}\right)<0$$

ここで　$f(1)=1^2-(a+2)\cdot1+a(2a+1)=2a^2-1$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-(a+2)\cdot\frac{3}{2}+a(2a+1)$$

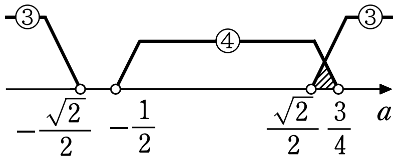
$$=\frac{1}{4}(8a^2-2a-3)$$

$$=\frac{1}{4}(2a+1)(4a-3)$$

であるから　$\begin{cases}2a^2-1>0 & \cdots\cdots ① \\ (2a+1)(4a-3)<0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$　……③

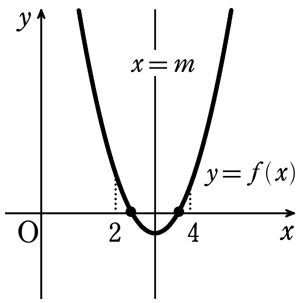
② から　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{4}$　……④



③ と ④ の共通範囲を求めて　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{3}{4}$

9　$f(x)=x^2-2mx+9$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $2<x<4$ の範囲と異なる 2 点で交わることである。



$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D>0$

かつ　軸 $x=m$ について　$2<m<4$　……①

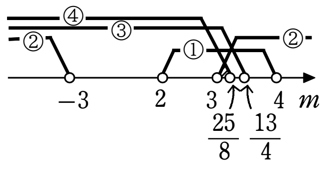
かつ　$f(2)>0$　かつ　$f(4)>0$

$\dfrac{D}{4}=m^2-9=(m+3)(m-3)$ であるから，$D>0$ より

$m<-3$，$3<m$　……②

$f(2)>0$，$f(4)>0$ から　$-4m+13>0$，$-8m+25>0$

よって　$m<\dfrac{13}{4}$ ……③，$m<\dfrac{25}{8}$ ……④



①，②，③，④ の共通範囲を求めて

$3<m<\dfrac{25}{8}$

10　$x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_1 とすると　$\dfrac{D_1}{4}=a^2-(2a^2+2ab+4)<0$

すなわち　$a^2+2ab+4>0$

この不等式が，どのような a の実数値に対しても成り立つような b の値の範囲を求めればよい．

よって，$a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_2 とすると　$\dfrac{D_2}{4}=b^2-4<0$

これを解いて　$-2<b<2$

11 (1)　$g(x)-f(x)=2x^2-2(a-1)x-a+5$

どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$，すなわち $g(x)-f(x)>0$ が成り立つための必要十分条件は　　$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot 2\cdot(-a+5)<0$

整理すると　　$a^2-9<0$　　　よって　　$(a+3)(a-3)<0$

したがって　　$-3<a<3$

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は，$f(x)$ の最大値より $g(x)$ の最小値の方が大きいことである。

$$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a-2,\quad g(x)=\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+3$$

よって　　$\dfrac{a^2}{4}+a-2<-\dfrac{(a-2)^2}{4}+3$　　　整理すると　　$a^2-8<0$

ゆえに　　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$　　　したがって　　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

12 $2x^2-3x-5>0$　……①，$x^2-(a+2)x+2a<0$　……②　とする。

① の左辺を因数分解すると　　$(x+1)(2x-5)>0$

したがって，① の解は　　$x<-1$　または　$\dfrac{5}{2}<x$

② の左辺を因数分解すると　　$(x-a)(x-2)<0$

② の解は，$a\neq 2$ のとき存在し，

$a<2$ のとき　$a<x<2$

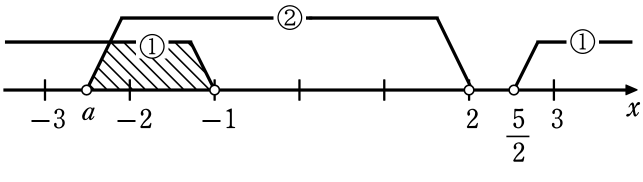
$a>2$ のとき　$2<x<a$

である。

よって，① と ② を同時に満たす整数 x がただ 1 つになるのは，次の各場合である。

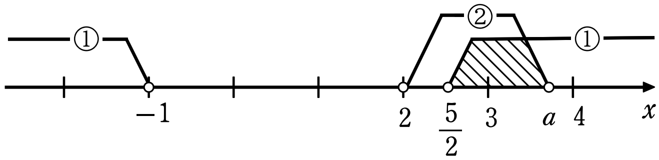
[1]　$-3\leqq a<-2$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $a<x<-1$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　　-2



[2]　$3<a\leqq 4$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $\dfrac{5}{2}<x<a$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　3

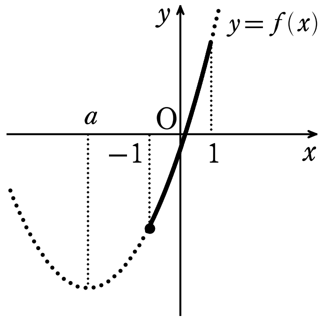


13　2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で常に成り立つための条件は，関数 $y=x^2-2ax+a+2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値が 0 より大きいことである。

$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とおくと　　$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

[1]　$a<-1$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(-1)=3a+3$$

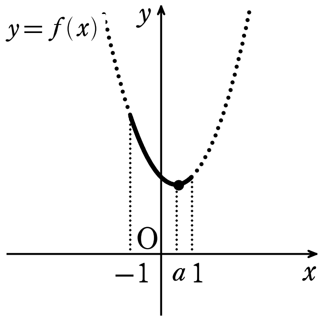
よって，不等式が常に成り立つとき

$$3a+3>0$$

ゆえに　　$a>-1$

これは $a<-1$ を満たさない。

[2]　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(a)=-a^2+a+2$$

よって，不等式が常に成り立つとき

$$-a^2+a+2>0$$

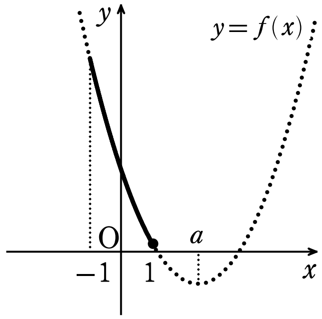
すなわち　　$a^2-a-2<0$

よって　　$(a+1)(a-2)<0$

ゆえに　　$-1<a<2$

$-1\leqq a\leqq 1$ との共通範囲は　　$-1<a\leqq 1$

[3]　$1<a$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(1)=-a+3$$

よって，不等式が常に成り立つとき

$$-a+3>0$$

よって　　$a<3$

$1<a$ との共通範囲は　　$1<a<3$

[1]～[3] より，求める a の値の範囲は　　$-1<a<3$

14 (1)　$x \leqq 1$ のとき

$y=(1-x)+(2-x)+(3-x)=-3x+6$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$y=(x-1)+(2-x)+(3-x)=-x+4$

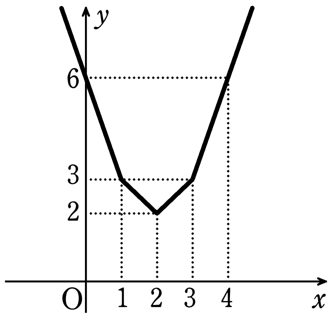
$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(3-x)=x$

$3 \leqq x$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

これらを図示すると図のようになる.



(2)　[1]　$x \leqq 1$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(k-x)=-(2n+1)x+(2n+1)(n+1)$$

$-(2n+1)<0$ であるから，$x=1$ のとき最小値

$-(2n+1)\cdot 1+(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる.

[2]　$l \leqq x \leqq l+1$ $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{l}(x-k)+\sum_{k=l+1}^{2n+1}(k-x)$$

$$=lx-\frac{1}{2}l(l+1)+\frac{1}{2}(2n+1-l)(2n+l+2)-(2n+1-l)x$$

$$=(2l-2n-1)x+\frac{1}{2}\{(2n-l+1)(2n+l+2)-l(l+1)\}$$

$$=\{2l-(2n+1)\}x+2n^2+3n-l^2-l+1$$

(i)　$1 \leqq l \leqq n$ のとき

$2l-(2n+1)<0$ であるから，$x=l+1$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}(l+1)+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2nl+2n^2+n$

$=(l-n)^2+n^2+n$ をとる.

更に，この式は $1 \leqq l \leqq n$ において，$l=n$ のとき最小値 n^2+n をとる.

(ii)　$n+1 \leqq l \leqq 2n$ のとき

$2l-(2n+1)>0$ であるから，$x=l$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}l+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2(n+1)l+2n^2+3n+1$

$=\{l-(n+1)\}^2+n^2+n$ をとる.

更に，この式は $n+1 \leqq l \leqq 2n$ において，$l=n+1$ のとき最小値 n^2+n をとる.

[3]　$2n+1 \leqq x$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(x-k)=(2n+1)x-(2n+1)(n+1)$$

$2n+1>0$ であるから，$x=2n+1$ のとき最小値

$(2n+1)(2n+1)-(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる.

[1]～[3] において　$2n^2+n>n^2+n$

ゆえに，$x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の三角比の値を求めよ。

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

(2) $\tan\theta = -3$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

$\boxed{2}$ $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $3\tan\theta = \sqrt{3}$

(4) $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC において，$a = \sqrt{6}$，$A = 60°$，$C = 45°$ のとき，c と外接円の半径 R を求めよ。

$\boxed{4}$ $\triangle$ABC において，次のものを求めよ。

(1) $c = 4$，$a = 6$，$B = 60°$ のとき　b

(2) $a = 3$，$b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{17}$ のとき　C

$\boxed{5}$ $\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= \sqrt{7}$，CA $= 3$ とする。$\triangle$ABC の外接円の半径 R と，内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

$\boxed{6}$ θ が $0° < \theta < 90°$ かつ $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，$\cos\theta + \sin\theta$，$\cos^3\theta + \sin^3\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 2$，BC $= 2$，CD $= 3$，DA $= 4$ とする。
次の値を求めよ。

(1) AC の長さ

(2) 四角形 ABCD の面積

(3) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とすると BE : ED の比

$\boxed{8}$ $a = 5$，$b = 6$，$c = 4$ の $\triangle$ABC がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AD，AM の長さを求めよ。

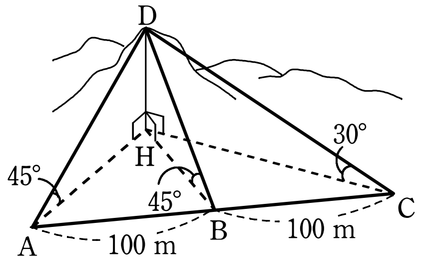
$\boxed{9}$ $\triangle$ABC が次の条件を満たすとすれば，どんな三角形か。

(1) $\sin A = \sin B$

(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

実戦問題篇

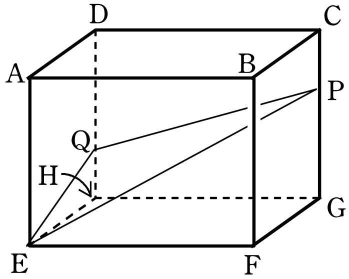
10 右の図のように１つの直線上に並ぶ水平面上の３点 A，B，C から山頂 D の仰角を測ると，それぞれ 45°，45°，30° であったという。
AB＝100 m，BC＝100 m であるとき，山の高さを求めよ。



11 AB＝4，AE＝AD＝3 である直方体 ABCD－EFGH において，辺 CG と辺 HD を 1：2 に内分する点をそれぞれ P と Q とする。このとき，

EP＝$\boxed{\text{ア}}$ で，cos∠EQP＝$\boxed{\text{イ}}$ である。

さらに，△EPQ の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ で，三角錐 AEPQ の体積は $\boxed{\text{エ}}$ である。また，点 A から △EPQ に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{オ}}$ である。



12 △ABC において，頂角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．次の関係式が成立するとき，△ABC はどのような形の三角形か．

$$a\sin A(\sin B-\sin C)=b\sin^2 B-(b+c)\sin B\sin C-c\cos^2 C+c$$

13 四角形 ABCD において，３辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝8，CD＝4，対角線 AC の長さを AC＝7 とする。

このとき，$\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$\sin\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{\text{オ}}$ には下の ⓪～② から，$\boxed{\text{カ}}$ には ③，④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

CD $\boxed{\text{オ}}$ AB･sin∠ABC であるから，$\boxed{\text{カ}}$ である。

⓪ ＜　　① ＝　　② ＞

③ 辺 AD と辺 BC が平行　　④ 辺 AB と辺 CD が平行

したがって，BD＝$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

数学①　第３回試験　三角比

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$\theta=30^\circ$，150°　(2)　$\theta=135^\circ$　(3)　$\theta=30^\circ$　(4)　$\theta=60^\circ$，180°

$\boxed{3}$ 解答　$c=2$，$R=\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$b=2\sqrt{7}$　(2)　$C=135^\circ$

$\boxed{5}$ 解答　$R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，$r=\dfrac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ 解答　$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\cos^3\theta+\sin^3\theta=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$\dfrac{7}{2}$　(2)　$\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$　(3)　$1:3$

$\boxed{8}$ 解答　$\mathrm{AD}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　BC＝CA の二等辺三角形

(2)　BC＝CA の二等辺三角形 または $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形

$\boxed{10}$ 解答　100 m

$\boxed{11}$ 解答　(ア)　$\sqrt{29}$　(イ)　$-\dfrac{1}{\sqrt{170}}$　(ウ)　$\dfrac{13}{2}$　(エ)　6　(オ)　$\dfrac{36}{13}$

$\boxed{12}$ 解答　AB＝ACの二等辺三角形，または $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形

$\boxed{13}$ 解答　$\dfrac{(ア)}{(イ)}$　$\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{\sqrt{(ウ)}}{(エ)}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(オ)　⓪　(カ)　④　(キ)$\sqrt{(ク)}$　$4\sqrt{7}$

$\boxed{1}$ (1)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta>0$ であるから　$\cos\theta>0$ で

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ であるから　$\cos\theta<0$ で

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

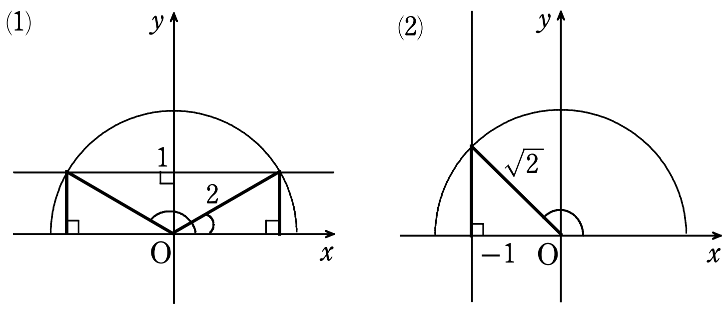
$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{2}$ (1)　$2\sin\theta-1=0$ から　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\theta=30^\circ,\ 150^\circ$

(2)　$\sqrt{2}\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\theta=135^\circ$



(3)　$3\tan\theta=\sqrt{3}$ から　　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$\theta=30^\circ$

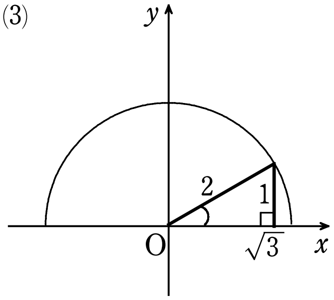
(4)　$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$ から　　$\cos\theta+1=0$　または　$2\cos\theta-1=0$

すなわち　　$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

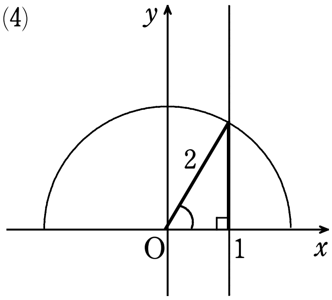
$\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180^\circ$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=60^\circ$

よって　$\theta=60^\circ,\ 180^\circ$

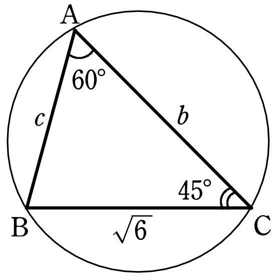
(3)



(4)



$\boxed{3}$ 正弦定理から　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$



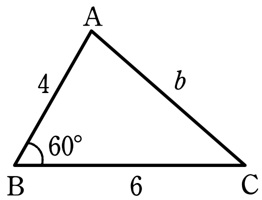
$$c=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=2$$

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$\boxed{4}$ (1)　余弦定理により



$$b^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos 60^\circ$$

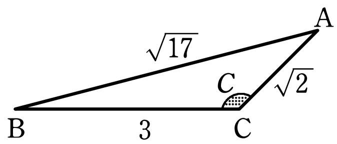
$$=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}$$

$$=52-24=28$$

$b>0$ であるから

$$b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

(2)　余弦定理により



$$\cos C=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{9+2-17}{2\cdot3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$C=135^\circ$

$\boxed{5}$ 余弦定理により　$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$

よって　$A=60^\circ$

正弦定理により　$2R=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

ゆえに　$R=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

また，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ に代入して $\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(\sqrt{7}+3+2)$

ゆえに $\quad r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}$$

すなわち $\quad 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

よって $\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

ここで $\quad (\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

$$\cos\theta+\sin\theta>0$$

ゆえに $\quad \cos\theta+\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

また $\quad \cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

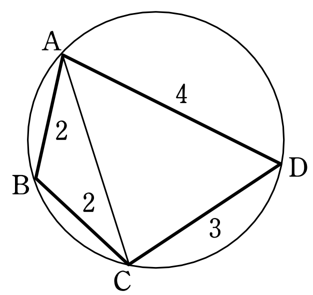
$\boxed{7}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると

$AC^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos B=8-8\cos B$ …… ①

$\triangle$ACD に余弦定理を適用すると

$AC^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cos D=25-24\cos D$ …… ②

四角形 ABCD は円に内接するから $\quad D=180^\circ-B$ …… ③



①，②，③ から $\quad 8-8\cos B=25+24\cos B$

したがって $\quad 32\cos B=-17 \qquad \cos B=-\frac{17}{32}$

① に代入して $\quad AC^2=\frac{49}{4}$

$AC>0$ であるから $\quad AC=\frac{7}{2}$

(2) (1) から $\quad \sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{17}{32}\right)^2}=\frac{7\sqrt{15}}{32}=\sin D$

よって 四角形 ABCD の面積を S とすると

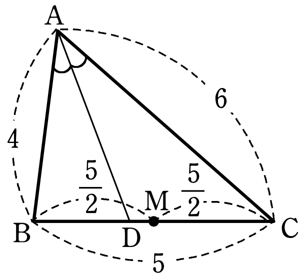
$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin B+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin D=8\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

(3) BE：ED＝△ABC：△ACD

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin B:\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin D=2\sin B:6\sin B=1:3$$

8 △ABC に余弦定理を適用して



$$\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8}$$

また　AD は頂角 A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝4：6＝2：3

したがって　$\mathrm{BD}=\frac{2}{5}\mathrm{BC}=\frac{2}{5}\cdot 5=2$

よって　△ABD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AD}^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{8}=18$$

AD＞0 であるから　$\mathrm{AD}=3\sqrt{2}$

△ABM に余弦定理を適用して

$$\mathrm{AM}^2=4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{79}{4}$$

AM＞0 であるから　$\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{79}}{2}$

9 (1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

$\sin A=\sin B$ から $\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b}{2R}$ すなわち $a=b$

よって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形である。

(2) 正弦定理により $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理により $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$ から $\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって $a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$ すなわち $a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$

ゆえに $(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)c^2=0$

よって $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a>0$，$b>0$ であるから $a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

したがって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形である。

10 山の高さを DH＝x (m) とすると HA＝x，HB＝x，HC＝$\sqrt{3}\,x$

△HAB において，余弦定理により $\cos A=\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot100\cdot x}$ ……①

△HAC において，余弦定理により $\cos A=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot200\cdot x}$ ……②

①，② から $\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot100\cdot x}=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot200\cdot x}$

整理すると $x^2=10000$ $x>0$ であるから $x=100$

したがって，山の高さは 100 m

11 条件から CP＝HQ＝1，GP＝DQ＝2

(ア) $EG=\sqrt{4^2+3^2}=5$ であるから

$$EP=\sqrt{EG^2+GP^2}=\sqrt{5^2+2^2}={}^{ア}\sqrt{\mathbf{29}}$$

(イ) $EQ=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，　$PQ=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

△EPQ において，余弦定理により

$$\cos\angle EQP=\frac{EQ^2+PQ^2-EP^2}{2EQ\cdot PQ}=\frac{10+17-29}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}}={}^{イ}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{170}}}$$

(ウ) $\sin\angle EQP>0$ であるから

$$\sin\angle EQP=\sqrt{1-\cos^2\angle EQP}=\sqrt{1-\frac{1}{170}}=\frac{13}{\sqrt{170}}$$

よって　$\triangle EPQ=\dfrac{1}{2}EQ\cdot PQ\sin\angle EQP=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}\cdot\dfrac{13}{\sqrt{170}}={}^{ウ}\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}$

(エ) 三角錐 AEPQ の底面を △AEQ とすると，高さは 4 である。

よって，三角錐 AEPQ の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle AEQ\times 4=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 4={}^{エ}\mathbf{6}$$

(オ) A から △EPQ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle EPQ\times h=\frac{13}{6}h$$

よって　$\dfrac{13}{6}h=6$　　　ゆえに　$h={}^{オ}\dfrac{\mathbf{36}}{\mathbf{13}}$

12 $\cos^2 C=1-\sin^2 C$

△ABC の外接円の半径を R とする．正弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a}{2R}\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right)=b\left(\frac{b}{2R}\right)^2-(b+c)\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}-c\left\{1-\left(\frac{c}{2R}\right)^2\right\}+c$$

両辺に $4R^2$ を掛けると　$a^2(b-c)=b^3-(b+c)bc+c^3$

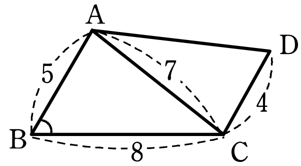
ゆえに　$a^2(b-c)=b^2(b-c)-c^2(b-c)$

したがって　$(b-c)(a^2-b^2+c^2)=0$

よって　　$b=c$　または　$a^2+c^2=b^2$

ゆえに，△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形.

13 △ABC において，余弦定理により



$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}$$

$$=\frac{40}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

よって，∠ABC＝60° であるから　$\sin\angle ABC=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで　CD＝4

$$AB\cdot\sin\angle ABC=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{5\cdot 1.7}{2}=4.25$$

よって　$CD<AB\cdot\sin\angle ABC$　……①（⓪）

四角形 ABCD が台形であるとき $AD /\!/ BC$ または $AB /\!/ CD$ が成り立つ。

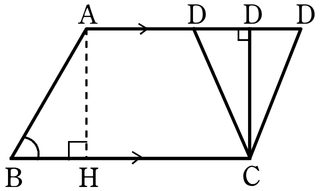
頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると，① から

$$AH=AB\cdot\sin\angle ABC>CD\quad\cdots\cdots②$$

$AD /\!/ BC$ が成り立つと仮定すると，右の図のように

$$AH\leqq CD$$

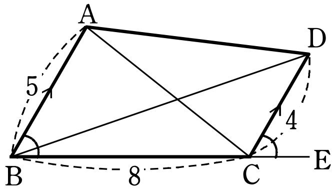
となるが，これは ② に矛盾する。



よって，$AD /\!/ BC$ は成り立たないから，$AB /\!/ CD$ となる。

すなわち，辺 AB と辺 CD が平行である。（④）

右の図のように，辺 BCの延長上に点 E をとる。



$AB /\!/ CD$ から　$\angle DCE=\angle ABC=60^\circ$

△BCD において，余弦定理により

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$$
$$=8^2+4^2-2\cdot 8\cdot 4\cos(180^\circ-60^\circ)=112$$

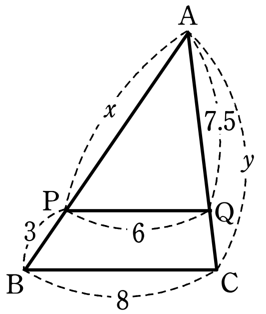
$BD>0$ であるから　$BD=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$

BASIC＋STANDARD問題

1　3 辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形がある。このとき，a の値の範囲を求めよ。
また，この三角形が直角三角形となるとき，a の値を求めよ。

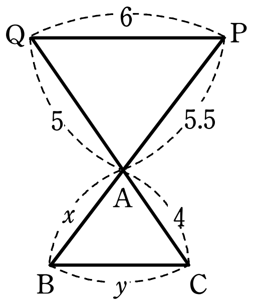
2　次の図において，x，y の値を求めよ。

(1)



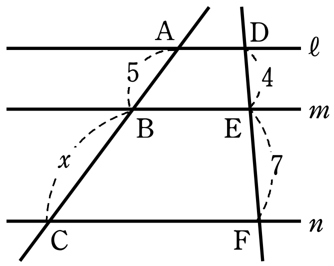
PQ∥BC

(2)



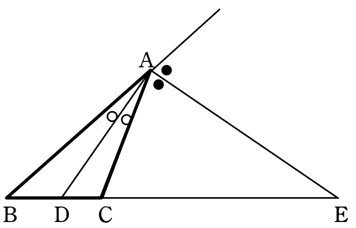
PQ∥BC

(3)



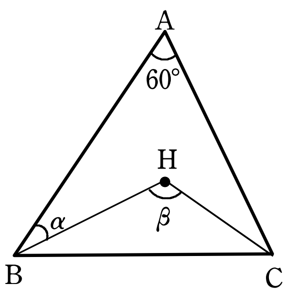
$\ell \parallel m \parallel n$

3　下の図で，AB＝6，BC＝3，CA＝4 であり，AD は ∠BAC の二等分線，AE は ∠BAC の外角の二等分線である。
BD の長さと BE の長さをそれぞれ求めよ。

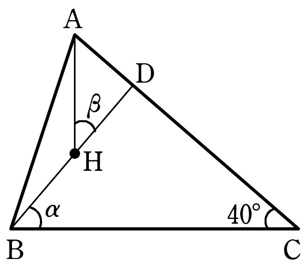


4　下の図において，点 H は △ABC の垂心である。角 α，β を求めよ。

(1)

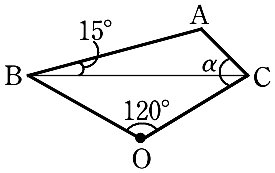


(2)

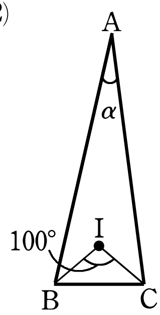


5 右の図で，点Ｏは△ABCの外心，点Ｉは△ABCの内心である。αを求めよ。

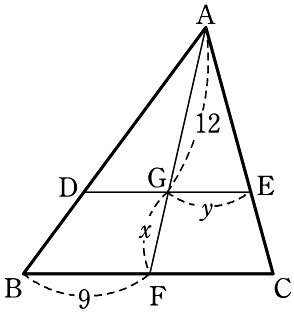
(1)



(2)



6 右の図において，点Ｇは△ABCの重心であり，DE∥BCである。このとき，x，yの値を求めよ。

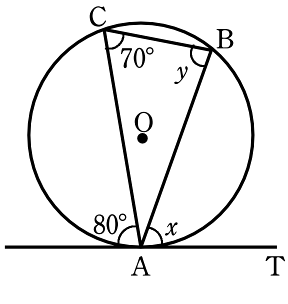


7 △ABCの辺AB，AC上にそれぞれ点R，Qがあり，AR：RB＝5：1，AQ：QC＝2：3である。線分BQとCRの交点をO，直線AOと辺BCの交点をPとするとき，次の比を求めよ。

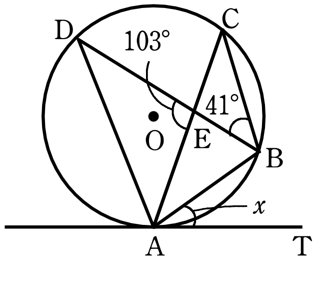
(1) BP：PC (2) AO：OP (3) △ABC：△OBC

8 次の図において，直線ATは点Ａで円Ｏに接している。xとyを求めよ。

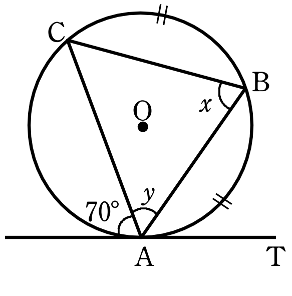
(1)



(2)

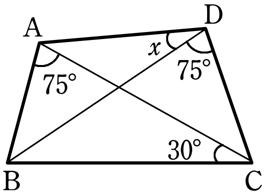


(3)

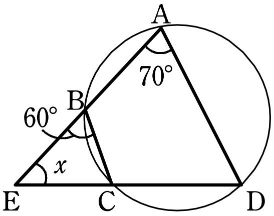


9 次の図において，角xの大きさを求めよ。

(1)

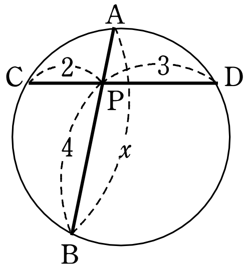


(2)

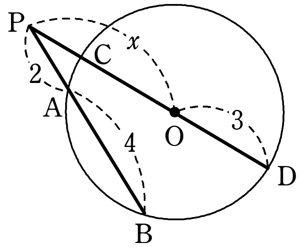


10 下の図において，x の値を求めよ。O は円の中心とする。

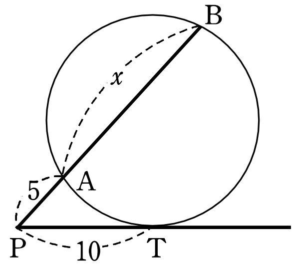
(1)



(2)

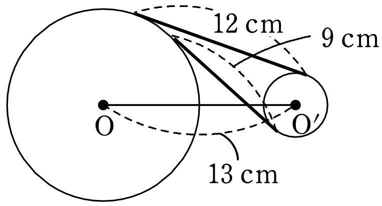


(3)



PT は円の接線

11 右の図のように，中心間の距離が 13 cm，共通外接線の長さが 12 cm，共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O，O′ がある。
この 2 つの円の半径を，それぞれ求めよ。



12 3 辺の長さが a，b，c の直角三角形の外接円の半径が $\frac{3}{2}$，内接円の半径が $\frac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　b と c の値を求めよ。

実戦問題

13 AB＝2，BC＝x，AC＝$4-x$ であるような △ABC がある。

(1)　x の値の範囲を求めよ。

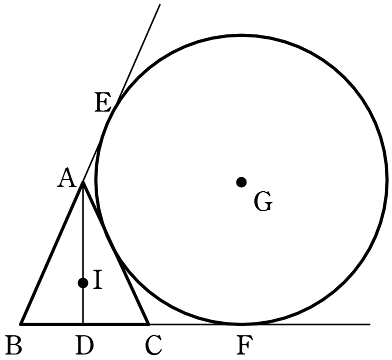
(2)　△ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

14 鋭角三角形 ABC において，AB＝8 とする。辺 AC を 1：2 に内分する点を D とし，辺 BC を 3：2 に内分する点を E とする。このとき，2 点 D，E を通る直線 ℓ と 2 点 A，B を通る直線の交点を P とすると，AP＝ア$\boxed{}$ である。また，直線 ℓ と三角形 ABC の外接円との 2 つの交点のうち P に近い方の交点を Q とし，他の交点を R とする。このとき，PQ＝3 ならば，QR＝イ$\boxed{}$ である。

15 AB＝AC である二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし，内接円と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で，辺 BC の延長と点 F で接し，辺 AC と接する ∠B 内の円の中心を G とする。

(1)　AD＝GF となることを証明せよ。

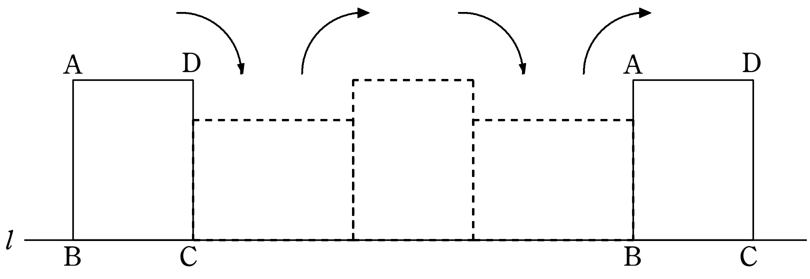
(2)　AB＝7，BD＝3 のとき，IG の長さを求めよ。



16 C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする．いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ．

17 （出典•2009常総学院高）

図のように，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CA＝5 cm である長方形 ABCD を直線 l に沿って，滑ることなくちょうど 1 回転するまで転がす。



頂点 B が動いた跡の線の長さはア$\boxed{}$$\pi$ cm であり，頂点 B が動いた跡の線と直線 l とで囲まれた部分の面積はイ$\boxed{}$ cm^2 である。ただし，π は円周率とする。

1 解答 (前半) $17 < a < 49$ (後半) $a = 21$, 41

2 解答 (1) $x = 9$, $y = 10$ (2) $x = 4.4$, $y = 4.8$ (3) $x = 8.75$

3 解答 $\mathrm{BD} = \dfrac{9}{5}$, $\mathrm{BE} = 9$

4 解答 (1) $\alpha = 30°$, $\beta = 120°$ (2) $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$

5 解答 (1) $75°$ (2) $20°$

6 解答 $x = 6$, $y = 6$

7 解答 (1) $2 : 15$ (2) $17 : 3$ (3) $20 : 3$

8 解答 (1) $x = 70°$, $y = 80°$ (2) $x = 36°$ (3) $x = 70°$, $y = 55°$

9 解答 (1) $x = 30°$ (2) $x = 50°$

10 解答 (1) $x = \dfrac{11}{2}$ (2) $x = \sqrt{21}$ (3) $x = 15$

11 解答 $\left(\sqrt{22} + \dfrac{5}{2}\right)\mathrm{cm}$, $\left(\sqrt{22} - \dfrac{5}{2}\right)\mathrm{cm}$

12 解答 (1) $a = 3$ (2) $b = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$, $c = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$

13 解答 (1) $1 < x < 3$ (2) $\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{5}{2}$

14 解答 (ア) 4 (イ) 13

15 解答 (1) 略 (2) $\mathrm{IG} = \dfrac{7\sqrt{35}}{5}$

16 解答 $a = \dfrac{4\sqrt{2} - 5}{2}$

17 解答 (ア) 6 (イ) $\dfrac{25}{2}\pi + 12$

$\boxed{1}$ (前半) 3辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形が存在するための条件は

$$a-(a-1)<50-a<a+(a-1)$$

すなわち　$1<50-a<2a-1$

$1<50-a$ から　$a<49$　　$50-a<2a-1$ から　$a>17$

よって，求める a の値の範囲は　$17<a<49$ ……①

(後半) $a>a-1$ であるから，直角三角形となるのは次の[1]，[2]のどちらかである。

[1] 長さ a の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から　$(a-1)^2+(50-a)^2=a^2$

整理すると　$a^2-102a+2501=0$

$(a-41)(a-61)=0$

これを解くと　$a=41$，61　　①を満たすのは　$a=41$

[2] 長さ $50-a$ の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から　$(a-1)^2+a^2=(50-a)^2$

整理すると　$a^2+98a-2499=0$

$(a-21)(a+119)=0$

これを解くと　$a=21$，-119　　①を満たすのは　$a=21$

したがって，求める a の値は　$a=21$，41

$\boxed{2}$ (1) PQ∥BC であるから

AP：AB＝PQ：BC ……①，　AQ：AC＝PQ：BC ……②

①から　$x:(x+3)=6:8$　　ゆえに　$8x=6(x+3)$　　よって　$x=9$

②から　$7.5:y=6:8$　　ゆえに　$6y=60$　　よって　$y=10$

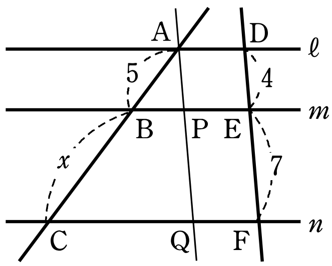
(2) PQ∥BC であるから

AP：AB＝AQ：AC ……①，　PQ：BC＝AQ：AC ……②

①から　$5.5:x=5:4$　　ゆえに　$5x=22$　　よって　$x=4.4$

②から　$6:y=5:4$　　ゆえに　$5y=24$　　よって　$y=4.8$

(3) 点Aを通り，DF に平行な直線を引き，m，n との交点をそれぞれ P，Q とする。



BP∥CQ であるから

AB：BC＝AP：PQ ……①

また，四角形 APED，PQFE は，ともに2組の対辺が平行であるから平行四辺形である。

よって　AP＝DE＝4，PQ＝EF＝7

ゆえに，①から　$5:x=4:7$

よって　$4x=35$　　ゆえに　$x=8.75$

$\boxed{3}$ BD の長さを x とおく。

AB：AC＝BD：DC が成り立つから　$6:4=x:(3-x)$

よって　$2x=3(3-x)$　ゆえに　$x=\dfrac{9}{5}$

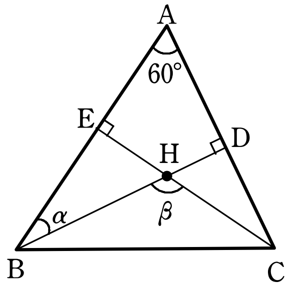
また，BE の長さを y とおく。

AB : AC＝BE : EC が成り立つから　$6:4=y:(y-3)$

よって　$2y=3(y-3)$　ゆえに　$y=9$

したがって　$\mathrm{BD}=\dfrac{9}{5}$，$\mathrm{BE}=9$

4 (1) 線分 BH の延長と辺 AC の交点を D，線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。



H は △ABC の垂心であるから

$\angle\mathrm{ADB}=90°$，$\angle\mathrm{AEC}=90°$

△ABD の内角の和は 180° であるから

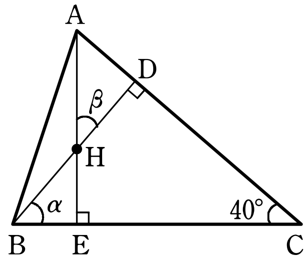
$\alpha+60°+90°=180°$

よって　$\alpha=30°$

また，$\angle\mathrm{BHC}=\angle\mathrm{BEH}+\angle\mathrm{EBH}$ であるから

$\beta=90°+30°=120°$

(2) 線分 AH の延長と辺 BC の交点を E とする。



H は △ABC の垂心であるから

$\angle\mathrm{BDC}=90°$，$\angle\mathrm{AEB}=90°$

△BDC の内角の和は 180° であるから

$\alpha+90°+40°=180°$

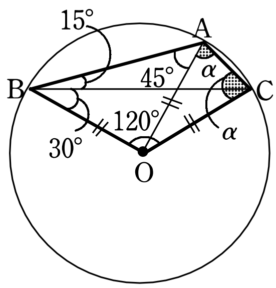
よって　$\alpha=50°$

また，$\angle\mathrm{AHD}=\angle\mathrm{BHE}$ であり，△BHE の内角の和は 180° であるから

$50°+90°+\beta=180°$

よって　$\beta=40°$

5 (1) OB＝OC であるから



$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OCB}=(180°-120°)\div 2=30°$

よって　$\angle\mathrm{ABO}=15°+30°=45°$

O と A を結ぶと，OA＝OB であるから

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABO}=45°$

ゆえに　$\angle\mathrm{BOA}=180°-2\times 45°=90°$

よって　$\angle\mathrm{AOC}=120°-90°=30°$

また，OA＝OC であるから　$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}=\alpha$

したがって　$\alpha=(180°-30°)\div 2=75°$

(2) △IBC において

$\angle IBC + \angle ICB = 180° - 100° = 80°$ ……①

BI は ∠B の二等分線であるから

$\angle B = 2\angle IBC$ ……②

CI は ∠C の二等分線であるから

$\angle C = 2\angle ICB$ ……③

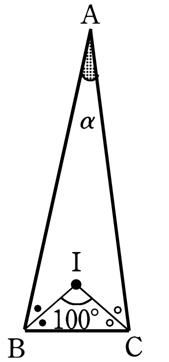
よって $\alpha = 180° - (\angle B + \angle C)$

②，③ を代入して

$\alpha = 180° - (2\angle IBC + 2\angle ICB)$

$= 180° - 2(\angle IBC + \angle ICB)$

① を代入して $\alpha = 180° - 2 \times 80° = 20°$



6 重心 G は中線 AF を 2：1 に内分するから $12 : x = 2 : 1$

よって $2x = 12$ したがって $x = 6$

また，F は辺 BC の中点であるから $FC = BF = 9$

GE∥FC であるから $GE : FC = AG : AF = 2 : 3$

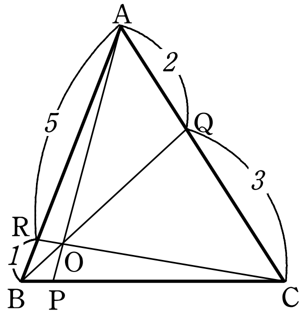
よって $y : 9 = 2 : 3$ ゆえに $3y = 18$ したがって $y = 6$

7 (1) △ABC と点 O にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

よって $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{1} = 1$ ゆえに $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{15}$

したがって $BP : PC = 2 : 15$



(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BR}{RA} = 1$$

ここで，(1) の結果から $PC : CB = 15 : 17$

よって $\frac{AO}{OP} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{5} = 1$ ゆえに $\frac{AO}{OP} = \frac{17}{3}$

したがって $AO : OP = 17 : 3$

(3) 辺 BC は △ABC と △OBC の共通の底辺であるから

△ABC：△OBC＝AP：OP

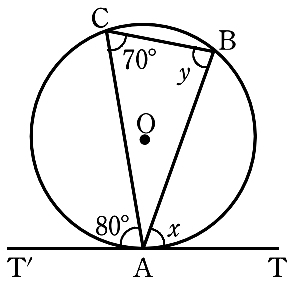
(2) の結果から $AP : OP = 20 : 3$

したがって △ABC：△OBC＝20：3

8 (1) 右の図において，接線と弦の作る角により

$x=\angle\mathrm{ACB}=70^\circ$

$y=\angle\mathrm{CAT'}=80^\circ$



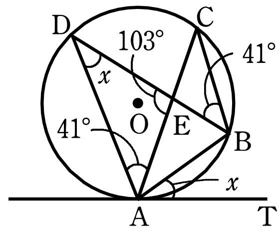
(2) 接線と弦の作る角により　$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{BAT}=x$

また，円周角の定理により　$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}=41^\circ$

よって，△ADE において

$x=180^\circ-(\angle\mathrm{DAE}+\angle\mathrm{DEA})$

$=180^\circ-(41^\circ+103^\circ)=36^\circ$



(3) 右の図において，接線と弦の作る角により

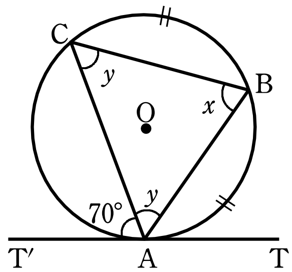
$x=\angle\mathrm{CAT'}=70^\circ$ ……①

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ であるから　$\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{CAB}=y$

よって，△ABC において　$x+y+y=180^\circ$

これと ① から　$70^\circ+2y=180^\circ$

したがって　$y=55^\circ$



9 (1) $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}$ $(=75^\circ)$ から，弧 BC に対する円周角が等しいので，四角形 ABCD は円に内接する。よって　$x=\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}=30^\circ$

(2) 四角形 ABCD は円に内接しているので，$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{EBC}=60^\circ$

よって，△AED において　$x+70^\circ+60^\circ=180^\circ$

したがって　$x=50^\circ$

10 (1) 方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$　すなわち　$(x-4)\cdot4=2\cdot3$

整理して　$4x=22$　よって　$x=\dfrac{11}{2}$

(2) CO は円 O の半径であるから　$\mathrm{CO}=3$　よって　$\mathrm{PC}=x-3$

方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$　すなわち　$2\cdot(2+4)=(x-3)(x+3)$

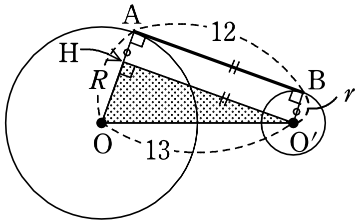
整理して　$x^2=21$　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{21}$

(3) 方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$　すなわち　$5(5+x)=10^2$

整理して　$5x=75$　よって　$x=15$

11 円 O の半径を R cm，円 O′ の半径を r cm $(R>r)$ とする。

円 O，O′ と共通外接線との接点を，それぞれ A，B とする。



O′ から OA に引いた垂線を O′H とすると，

∠A＝∠B＝90° であるから

$$HO'=AB=12 \text{ (cm)}$$

$$AH=BO'=r \text{ (cm)}$$

よって　$OH=OA-AH=R-r$ (cm)

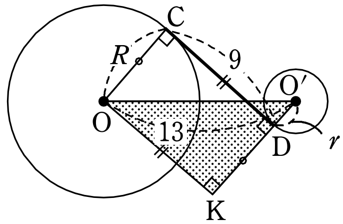
△OO′H において，∠H＝90° であるから　$OH^2+HO'^2=OO'^2$

すなわち　$(R-r)^2+12^2=13^2$

ゆえに　$(R-r)^2=25$

$R-r>0$ であるから　$R-r=5$　……①

円 O，O′ と共通内接線との接点を，それぞれ C，D とする。



O から O′D の延長に引いた垂線を OK とすると，

∠C＝∠D＝90° であるから

$$OK=CD=9 \text{ (cm)}$$

$$KD=OC=R \text{ (cm)}$$

よって　$KO'=KD+DO'=R+r$ (cm)

△O′OK において，∠K＝90° であるから　$OK^2+KO'^2=OO'^2$

すなわち　$9^2+(R+r)^2=13^2$

ゆえに　$(R+r)^2=88$

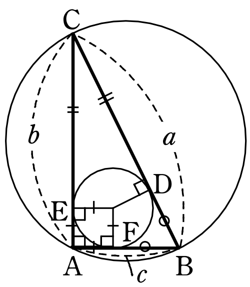
$R+r>0$ であるから　$R+r=2\sqrt{22}$　……②

①＋② から　$2R=2\sqrt{22}+5$　よって　$R=\sqrt{22}+\dfrac{5}{2}$ (cm)

②−① から　$2r=2\sqrt{22}-5$　よって　$r=\sqrt{22}-\dfrac{5}{2}$ (cm)

12 (1)　$a \geqq b \geqq c$ であるから，直角三角形の斜辺の長さは a である。直角三角形の斜辺の長さは外接円の直径の長さと等しいから

$$a=2\times\frac{3}{2}=3$$



(2)　直角三角形を右の図のように △ABC と表し，内接円との接点を D，E，F と定める。

$AE=\dfrac{1}{2}$，$AF=\dfrac{1}{2}$ であるから

$\mathrm{BD}=\mathrm{BF}=c-\dfrac{1}{2}$,

$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=b-\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}$ であるから　$b+c-1=3$

よって　$b+c=4$　…… ①

また，三平方の定理から　$b^2+c^2=3^2$　…… ②

①，② から，c を消去して　$b^2+(4-b)^2=9$

ゆえに　$2b^2-8b+7=0$

よって　$b=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$

このとき，① から　$c=\dfrac{4\mp\sqrt{2}}{2}$ (上の b と複号同順)

$b\geqq c$ であるから　$b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，$c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

13 (1)　2，x，$4-x$ が三角形の 3 辺の長さとなるための条件は，次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2+x>4-x$　…… ①

$x+(4-x)>2$　…… ②

$(4-x)+2>x$　…… ③

① を解くと　$x>1$

② は，$4>2$ となり常に成り立つ。

③ を解くと　$x<3$

よって，求める x の値の範囲は　$1<x<3$　…… ④

(2)　△ABC が鋭角三角形となるための条件は，④ および次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2^2<x^2+(4-x)^2$　…… ⑤

$x^2<(4-x)^2+2^2$　…… ⑥

$(4-x)^2<x^2+2^2$　…… ⑦

⑤ から　$2(x^2-4x+6)>0$

$x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ であるから，⑤ は常に成り立つ。

⑥ から　$8x-20<0$　よって　$x<\dfrac{5}{2}$　…… ⑥′

⑦ から　$8x-12>0$　よって　$x>\dfrac{3}{2}$　…… ⑦′

④，⑥′，⑦′ の共通範囲を求めて　$\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

14 △ABC と直線 PE にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PA}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$$

ゆえに，$\dfrac{BP}{PA}=3$ から　　BP：PA＝3：1

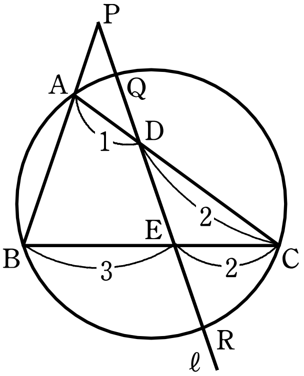
よって，AB：AP＝2：1 であり，AB＝8 であるから

AP＝ア4

方べきの定理により　　PA･PB＝PQ･PR

すなわち　　4･12＝3･(3＋QR)

よって　　QR＝イ13



15 (1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから，

$\angle DAB=\alpha$ とおくと　$\angle DAC=\alpha$

また，AE，AC は円 G の接線であるから，

$\angle EAG=\beta$ とおくと　$\angle CAG=\beta$

ここで，

$\angle BAD+\angle DAC+\angle CAG+\angle GAE=180^\circ$

であるから　$\alpha+\alpha+\beta+\beta=180^\circ$

よって　　$\alpha+\beta=90^\circ$

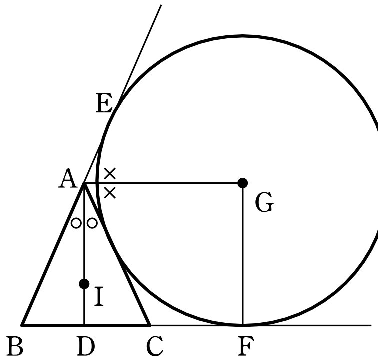
すなわち

$\angle DAG=\angle DAC+\angle CAG=90^\circ$　……①

また　$\angle ADF=90^\circ$，$\angle GFD=90^\circ$　……②

よって，①，② より，四角形 ADFG は長方形である。

したがって　AD＝GF



(2)　$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

BI は ∠ABD の二等分線であるから

AI：ID＝AB：BD＝7：3

よって　$AI=\dfrac{7}{10}AD=\dfrac{7}{10}\times 2\sqrt{10}=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$

(1) より，四角形 ADFG は長方形であるから

AG∥BF

ゆえに　$\angle AGB=\angle GBF$

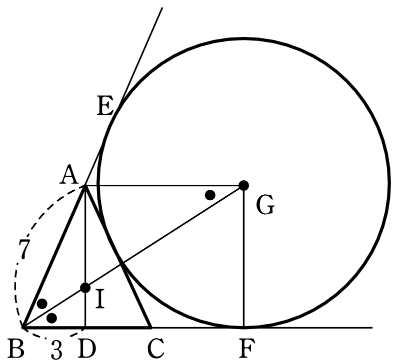
また　　$\angle ABG=\angle GBF$

よって　$\angle AGB=\angle ABG$

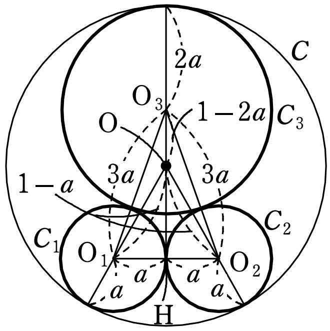
したがって，△ABG は二等辺三角形であるから　AG＝AB＝7

△AIG において，三平方の定理により

$$IG=\sqrt{AI^2+AG^2}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)^2+7^2}=\frac{7\sqrt{35}}{5}$$



16 円 C，C_1，C_2，C_3 の中心をそれぞれ O，O_1，O_2，O_3 とし，2 円 C_1，C_2 の接点を H とする．



このとき　$OO_1=1-a$，$O_1O_3=a+2a=3a$

$\triangle OO_1H$ において，三平方の定理から

$$OH=\sqrt{(1-a)^2-a^2}=\sqrt{1-2a}$$

また　$OO_3=1-2a$

$\triangle O_3O_1H$ において，三平方の定理から

$$O_3H=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}\,a$$

$OH+OO_3=O_3H$ であるから　$\sqrt{1-2a}+(1-2a)=2\sqrt{2}\,a$

ゆえに　$\sqrt{1-2a}=2(1+\sqrt{2})a-1$ …… ①

① の左辺の根号内が 0 以上であることから　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$

① の右辺が 0 以上であることから　$a\geqq\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

よって　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ …… ②

① の両辺を平方し，整理すると　$2(3+2\sqrt{2})a^2=(1+2\sqrt{2})a$

$a>0$ であるから　$2(3+2\sqrt{2})a=1+2\sqrt{2}$

よって　$a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

これは ② を満たす．

17 求める長さは，下の図の 3 つの弧の長さの和であるから

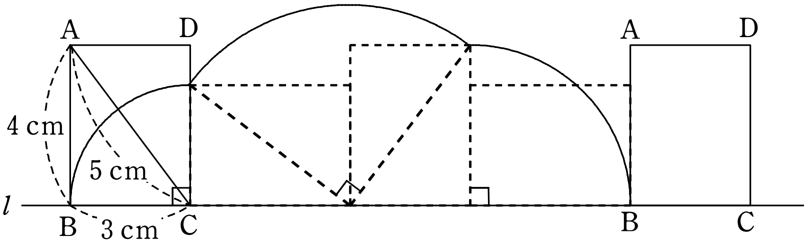
$$2\pi\times3\times\frac{90}{360}+2\pi\times5\times\frac{90}{360}+2\pi\times4\times\frac{90}{360}$$

$$=6\pi\,(\mathrm{cm})$$

求める面積は，3 つのおうぎ形と長方形 1 個分であるから

$$\pi\times3^2\times\frac{90}{360}+\pi\times5^2\times\frac{90}{360}+\pi\times4^2\times\frac{90}{360}+3\times4$$

$$=\frac{25}{2}\pi+12\,(\mathrm{cm}^2)$$


A
D
4 cm
5 cm
3 cm
B
C
l
A
D
B
C

BASIC＋Standard問題

1 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$28x+95y=3$　　(2)　$103x-75y=7$

3 (1) 方程式 $xy-2x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $3xy+3x+y=5$ を満たす 2 つの整数 x，y の組をすべて求めよ。

4 n は自然数とする。$n^2-28n+160$ が素数となるような n をすべて求めよ。

5 (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。

6 n を正の整数とする。$N=1890n$ とすると，$\sqrt{N}$ が整数になるような最小の n の値を求めよ。

7 $5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ.

8 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1)　$xyz=x+y+z$　$(x<y<z)$

(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　$(x\leqq y\leqq z)$

実践問題

9 $\dfrac{40}{21}$，$\dfrac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

10 方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

11 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

12 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ になり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

13 100! を素因数分解すると，$2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^{16}\cdot11^9\cdot13^7\cdots\cdots$ となる。a，b，c の値を求めよ。

14 素数 p，q，r に対して $2p^3qr+19p^2q^2r-10pq^3r=111111$ が成り立つとき，p，q，r の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　173

$\boxed{2}$ 解答　k は整数とする。

(1)　$x=95k+51$，$y=-28k-15$　　(2)　$x=75k-56$，$y=103k-77$

$\boxed{3}$ 解答　$(x,\ y)=(-4,\ -7)$，$(-2,\ -1)$，$(4,\ 1)$，$(-6,\ 11)$，$(-8,\ 5)$，$(-14,\ 3)$

解答　$(x,\ y)=(-1,\ -4)$，$(0,\ 5)$

$\boxed{4}$ 解答　$n=7$，21

$\boxed{5}$ 解答　(1)　24　　(2)　5130

$\boxed{6}$ 解答　210

$\boxed{7}$ 解答　$(x,\ y)=(1,\ -2)$，$(1,\ -4)$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{9}$ 解答　$\dfrac{273}{8}$

$\boxed{10}$ 解答　$x=-77+539t,\ y=7-48t$ (t は整数)

$\boxed{11}$ 解答　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 6,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 6)$，$(3,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 2,\ 3)$，$(6,\ 3,\ 2)$，
$(2,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{12}$ 解答　$a=2$，$b=3$，$c=1$；$N=66$

$\boxed{13}$ 解答　$a=97$，$b=48$，$c=24$

$\boxed{14}$ 解答　(ア)　7　　(イ)　3　　(ウ)　13

$\boxed{1}$

$$\begin{aligned} 32351 &= 23009\cdot 1 + 9342 \\ 23009 &= 9342\cdot 2 + 4325 \\ 9342 &= 4325\cdot 2 + 692 \\ 4325 &= 692\cdot 6 + 173 \\ 692 &= 173\cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 173\overline{)692} & \overline{)4325} & \overline{)9342} & \overline{)23009} & \overline{)32351} \\ 692 & 4152 & 8650 & 18684 & 23009 \\ \hline 0 & 173 & 692 & 4325 & 9342 \end{array}$$

よって，最大公約数は　173

$\boxed{2}$ (1)　　$28x+95y=3$　　…… ①

$x=17$，$y=-5$ は，$28x+95y=1$ の整数解の1 つである。

よって　　$28\cdot 17+95\cdot(-5)=1$

両辺に 3 を掛けると

$28\cdot 51+95\cdot(-15)=3$　　…… ②

①−② から　$28(x-51)+95(y+15)=0$　…… ③

28 と 95 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x-51=95k$，$y+15=-28k$ （k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=95k+51$，$y=-28k-15$ （k は整数）

参考 1　28 と 95 に互除法を用いると

$95=28\cdot 3+11$　　移項すると　$11=95-28\cdot 3$

$28=11\cdot 2+6$　　移項すると　$6=28-11\cdot 2$

$11=6\cdot 1+5$　　移項すると　$5=11-6\cdot 1$

$6=5\cdot 1+1$　　移項すると　$1=6-5\cdot 1$

よって　$1=6-5\cdot 1=6-(11-6\cdot 1)\cdot 1$

$=6\cdot 2-11\cdot 1=(28-11\cdot 2)\cdot 2-11\cdot 1$

$=28\cdot 2-11\cdot 5=28\cdot 2-(95-28\cdot 3)\cdot 5$

$=28\cdot 17+95\cdot(-5)$

参考 2　$a=28$，$b=95$ とおく。

$11=95-28\cdot 3$ より　$11=b-a\cdot 3=-3a+b$

$6=28-11\cdot 2$ より　$6=a-(-3a+b)\cdot 2$

$=7a-2b$

$5=11-6\cdot 1$ より　$5=(-3a+b)-(7a-2b)$

$=-10a+3b$

$1=6-5\cdot 1$ より　$1=(7a-2b)-(-10a+3b)$

$=17a-5b$

よって，$17a-5b=1$ より　$28\cdot 17+95\cdot(-5)=1$

(2)　　$103x-75y=7$　　…… ①

$x=-8$，$y=-11$ は，$103x-75y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

両辺に 7 を掛けると

$$103\cdot(-56)-75\cdot(-77)=7 \quad \cdots\cdots ②$$

①−② から　$103(x+56)-75(y+77)=0$　…… ③

103 と 75 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$$x+56=75k,\ y+77=103k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=75k-56,\ y=103k-77 \quad (k \text{ は整数})$$

参考 1　103 と 75 に互除法を用いると

$103=75\cdot1+28$　　移項すると　$28=103-75\cdot1$

$75=28\cdot2+19$　　移項すると　$19=75-28\cdot2$

$28=19\cdot1+9$　　移項すると　$9=28-19\cdot1$

$19=9\cdot2+1$　　移項すると　$1=19-9\cdot2$

よって　$1=19-9\cdot2=19-(28-19\cdot1)\cdot2$

$=19\cdot3-28\cdot2=(75-28\cdot2)\cdot3-28\cdot2$

$=75\cdot3-28\cdot8=75\cdot3-(103-75\cdot1)\cdot8$

$=103\cdot(-8)-75\cdot(-11)$

参考 2　$a=103$，$b=75$ とおく。

$28=103-75\cdot1$ より　$28=a-b$

$19=75-28\cdot2$ より　$19=b-(a-b)\cdot2$

$=-2a+3b$

$9=28-19\cdot1$ より　$9=(a-b)-(-2a+3b)$

$=3a-4b$

$1=19-9\cdot2$ より　$1=(-2a+3b)-(3a-4b)\cdot2$

$=-8a+11b$

よって，$-8a+11b=1$ より　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

3　$xy-2x+5y=(x+5)(y-2)+10$ であるから，方程式 $xy-2x+5y=1$ を変形すると

$(x+5)(y-2)+10=1$　　すなわち　　$(x+5)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+5$，$y-2$ はともに整数である。

積が -9 になる整数 $x+5$，$y-2$ の組は

$$(x+5,\ y-2)=(1,\ -9),\ (3,\ -3),\ (9,\ -1),\ (-1,\ 9),\ (-3,\ 3),\ (-9,\ 1)$$

よって，求める整数解は

$$(x,\ y)=(-4,\ -7),\ (-2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-6,\ 11),\ (-8,\ 5),\ (-14,\ 3)$$

$3xy+3x+y=5$ から　　$(3x+1)(y+1)=6$

xは整数であるから，$3x+1$ は 3 で割ると 1 余る整数である。

よって　　$(3x+1,\ y+1)=(-2,\ -3),\ (1,\ 6)$

したがって　　$(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$

4　　$n^2-28n+160=(n-8)(n-20)$　または　$n^2-28n+160=(8-n)(20-n)$

$n-8>n-20$，$8-n<20-n$ であるから，$n^2-28n+160$ が素数であるとき

$n-20=1$　または　$8-n=1$

$n-20=1$ より　$n=21$，　$8-n=1$ より　$n=7$

$n=21$ のとき　$n^2-28n+160=13\cdot 1=13$　(素数)

$n=7$ のとき　$n^2-28n+160=1\cdot 13=13$　(素数)

よって，求める自然数 n は　$n=7,\ 21$

$\boxed{5}$ 1960 を素因数分解すると　$1960=2^3\cdot 5\cdot 7^2$

よって，1960 のすべての正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)$ を展開したときの項として 1 つずつ出てくる。

(1)　1960 の正の約数の個数は　$(3+1)(1+1)(2+1)=4\times 2\times 3=24$ (個)

(2)　1960 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)=(1+2+4+8)(1+5)(1+7+49)$$
$$=15\times 6\times 57=5130$$

$\boxed{6}$ 1890 を素因数分解すると　$1890=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$

1890 に $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ を掛けると，$2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2$ すなわち $(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)^2$ になる。

よって，n の最小値は　$n=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

$\boxed{7}$ 左辺を y について整理すると　$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0$ …… ①

y は整数であるから，判別式 D について，$D\geqq 0$ であることが必要.

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7)\geqq 0$$

すなわち　$4x^2-8x+3\leqq 0$

よって　$(2x-1)(2x-3)\leqq 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$　これを満たす整数 x は　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$

ゆえに　$(y+2)(y+4)=0$　よって　$y=-2,\ -4$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

$\boxed{8}$ (1)　$x<y<z$ であるから　$xyz=x+y+z<z+z+z=3z$

よって，$xyz<3z$ の両辺を正の数 z で割ると　$xy<3$

これを満たす $x<y$ である自然数 $x,\ y$ の組は　$x=1,\ y=2$

このとき，与えられた等式は　$2z=1+2+z$

よって　$z=3$

このとき，$y<z$ を満たす。

したがって　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$1\leqq x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　…… ①

よって　$\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=\dfrac{11}{6x}$

したがって　$x\leqq\dfrac{11}{8}$

x は自然数であるから　$x=1$

このとき，与えられた等式は　$\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{3}$　……②

① から　$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}\leqq\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{5}{6y}$

したがって　$y\leqq\dfrac{5}{2}$

y は自然数で，$1=x\leqq y$ であるから　$y=1,\ 2$

$y=1$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z}=-\dfrac{1}{6}$

これを満たす自然数 z はない。

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{12}$

よって　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

したがって　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{9}$ 求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{40}{21}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 21 の倍数，b は 40 の約数　……①

$\dfrac{16}{39}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 39 の倍数，b は 16 の約数　……②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

①，② から

a は 21 と 39 の最小公倍数，b は 40 と 16 の最大公約数

とすればよい。

よって　$a=273$，$b=8$

したがって，求める分数は　$\dfrac{273}{8}$

$\boxed{10}$ 方程式を変形して　$48x=77(1-7y)$

48 と 77 は互いに素であるから，$x=77s$ (s は整数) とおける．ゆえに　$48s=1-7y$

よって　$7y=1-48s=(1+s)-49s$

ここで，$s+1=7t$ (t は整数) とおけるから $y=t-7s=t-7(7t-1)=7-48t$

したがって　$x=77s=77(7t-1)=-77+539t$ (t は整数)

$\boxed{11}$ x，y，z を入れ替えても，もとの式と変わらない。

x，y，z は自然数であるから，$1\leqq x\leqq y\leqq z$　……① と仮定する。

$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　……②

よって　$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

$\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

ゆえに　$x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき

与式から，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ となり，これを満たす自然数 $y,\ z$ はない。

[2]　$x=2$ のとき

与式から　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$　…… ③

② から　$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$

ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で $2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき　③ から　$\frac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき　③ から　$\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$　　よって　$z=6$　($y\leqq z$ を満たす)

$y=4$ のとき　③ から　$\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　　よって　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

[3]　$x=3$ のとき

与式から　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$　…… ④

② から　$\frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$

ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき ④ から　$\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$　　よって　$z=3$　($y\leqq z$ を満たす)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

よって，① の条件をはずして考えると，求める $x,\ y,\ z$ の組は

$(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),\ (6,\ 3,\ 2),\ (2,\ 4,\ 4),$
$(4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$

12　$abc_{(5)}$ は 3 桁の 5 進数であるから　　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 0\leqq c\leqq 4$

$cab_{(7)}$ は 3 桁の 7 進数であるから　　$1\leqq c\leqq 6,\ 0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6$

よって　　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 1\leqq c\leqq 4$　…… ①

N を 10 進法で表すと

$$N=abc_{(5)}=a\cdot 5^2+b\cdot 5^1+c\cdot 5^0=25a+5b+c$$

$$N=cab_{(7)}=c\cdot 7^2+a\cdot 7^1+b\cdot 7^0=49c+7a+b$$

よって　　$25a+5b+c=49c+7a+b$

整理すると　　$9a+2b=24c$　…… ②

ここで，① から

$$24c=9a+2b\leqq 9\cdot 4+2\cdot 4=44$$

ゆえに　　$c\leqq\dfrac{11}{6}=1.8\cdots\cdots$

よって，① から　　$c=1$

② に代入すると　　$9a+2b=24$

これと ① を満たす整数 a，b は　　$a=2$，$b=3$

したがって　　$a=2$，$b=3$，$c=1$

また　　$N=25\cdot 2+5\cdot 3+1=66$

13　1 から 100 までの自然数うち

2 の倍数の個数は，100 を 2 で割った商で　　50

2^2 の倍数の個数は，100 を 2^2 で割った商で　　25

2^3 の倍数の個数は，100 を 2^3 で割った商で　　12

2^4 の倍数の個数は，100 を 2^4 で割った商で　　6

2^5 の倍数の個数は，100 を 2^5 で割った商で　　3

2^6 の倍数の個数は，100 を 2^6 で割った商で　　1

$100<2^7$ であるから，$2^n\ (n\geqq 7)$ の倍数はない。

よって　　$a=50+25+12+6+3+1=97$

次に，1 から 100 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，100 を 3 で割った商で　　33

3^2 の倍数の個数は，100 を 3^2 で割った商で　　11

3^3 の倍数の個数は，100 を 3^3 で割った商で　　3

3^4 の倍数の個数は，100 を 3^4 で割った商で　　1

$100<3^5$ であるから，$3^n\ (n\geqq 5)$ の倍数はない。

よって　　$b=33+11+3+1=48$

更に，1 から 100 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，100 を 5 で割った商で　　20

5^2 の倍数の個数は，100 を 5^2 で割った商で　　4

$100<5^3$ であるから，$5^n\ (n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって　　$c=20+4=24$

14　与えられた等式から　　$pqr(2p-q)(p+10q)=3\times 7\times 11\times 13\times 37$　…… ①

p，q，r は素数であるから，3，7，11，13，37 のいずれかである。

また，$2p-q\geqq 1$ であることがわかる。

もし $2p-q=1$ であるとすると，これを満たすのは $p=7$，$q=13$ のときだけである。

このとき $p+10q=137$ となり，① を満たさない。

よって，$2p-q$ は 3，7，11，13，37 のいずれかであり，更に，

$p+10q \geqq 7+10\cdot 3=37$ であるから　　$p+10q=37$

これを満たすのは　　$p={}^{ア}7$，$q={}^{イ}3$

このとき，$2p-q=11$ であるから　　$r={}^{ウ}13$