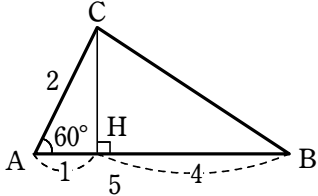


BASIC問題篇

- [1] $\triangle ABC$ において、辺 BC を $2:1$ に内分する点を D 、外分する点を E とし、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{AE}$ (3) $\overrightarrow{AG}$ (4) $\overrightarrow{BD}$ (5) $\overrightarrow{GD}$
- [2] 右の図は、 $AB=5$ 、 $AC=2$ 、 $\angle BAC=60^\circ$ の $\triangle ABC$ の頂点 C から、底辺 AB に垂線 CH を下ろしたものである。次の内積を求めよ。
- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CH}$
 (3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$ (4) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- 
- [3] $\vec{a}=(4, 2)$ 、 $\vec{b}=(3, -1)$ 、 $\vec{x}=(p, q)$ とする。 $\vec{x}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行で、 $\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるとき、 p, q の値を求めよ。
- [4] $|\vec{a}|=1$ 、 $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$ 、 $|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき、次のものを求めよ。
- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ
- [5] $\vec{a}=(9, 3)$ 、 $\vec{b}=(-1, -2)$ とし、 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。 $|\vec{c}|$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ。ただし、 t は実数とする。
- [6] 平行四辺形 $ABCD$ の辺 AB を $3:2$ に内分する点を E 、辺 AD を $2:1$ に内分する点を F 、線分 BF と線分 CE の交点を K とする。 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{AK}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

STANDARD問題篇

- [7] 三角形 ABC の内心を I とし、辺 BC, CA, AB の長さを、それぞれ a, b, c とする。 $\overrightarrow{AI}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ となる実数 r, s を、 a, b, c を用いて表せ。
- [8] 三角形 ABC の3辺の長さを $AB=4, BC=3, CA=2$ とする。この三角形の外心を O とおく。 $\overrightarrow{CO}$ を $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ で表せ。
- [9] $\triangle ABC$ と点 P があり、 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。
- (1) $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ の面積の比を求めよ。
- (2) 直線 AP 上に点 Q をとり、 $\triangle QAB$ と $\triangle QBC$ の面積比が $3:1$ になるようにする。このとき、 $\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}$ が満たす関係式を求めよ。
- [10] $\triangle OAB$ において、 $OA=3, OB=4, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=8$ とする。 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で、 s, t が $3s+t \leq 3, s+t \geq 1, s \geq 0, t \geq 0$ を満たしながら動くとき、点 P が描く図形の面積を求めよ。

- [11] $A(-1, 5)$, $B(2, 4)$, $\vec{d}=(1, -2)$ とする。次の直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、 t を消去した式で表せ。
- (1) A を通り、 $\vec{d}$ に平行な直線 (2) 2点 A, B を通る直線
- [12] 次のような直線の方程式を、ベクトルを用いて求めよ。
- (1) 点 $A(5, 3)$ を通り、 $\vec{n}=(1, -2)$ に垂直な直線
- (2) O は原点とする。点 $A(3, -1)$ を通り、 OA に垂直な直線
- [13] 平面上の異なる2つの定点 O, A と任意の点 P に対し、次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。
- (1) $|2\vec{OP}-\vec{OA}|=4$ (2) $\vec{OP}\cdot\vec{OP}=\vec{OP}\cdot\vec{OA}$

実戦問題篇

- [14] 平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB を $1:1$ に内分する点を E 、辺 BC を $2:1$ に内分する点を F 、辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし、線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき、比 $AP:PQ$ を求めよ。
- [15] $\triangle ABC$ の外心 O から直線 BC, CA, AB に引いた垂線の足をそれぞれ P, Q, R とする。 $0 < t < 1$ の範囲で関係式 $(t+1)\vec{OP}+(t-1)\vec{OQ}-t(t+1)\vec{OR}=\vec{0}$ を満たしているとき、次の問いに答えよ。
- (1) ベクトル $\vec{OA}$ を $\vec{OB}, \vec{OC}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle BAC$ の大きさを求めよ。
- [16] 平面上において同一直線上にない異なる3点 A, B, C があるとき、次の各問いに対して、それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ。
- (1) $\vec{AP}+\vec{BP}+\vec{CP}=\vec{AC}$
- (2) $\vec{AB}\cdot\vec{AP}=\vec{AB}\cdot\vec{AB}$
- (3) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}+\vec{AP}\cdot\vec{AP}\leq\vec{AB}\cdot\vec{AP}+\vec{AC}\cdot\vec{AP}$

[1] 解答 (1) $\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ (2) $-\vec{b} + 2\vec{c}$ (3) $\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ (4) $-\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$
 (5) $\frac{1}{3}\vec{c}$

[2] 解答 (1) 5 (2) -3 (3) 0 (4) 20

[3] 解答 $p=1, q=3$

[4] 解答 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ (2) $\theta = 45^\circ$

[5] 解答 $t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$

[6] 解答 $\overrightarrow{AK} = \frac{13}{19}\vec{a} + \frac{4}{19}\vec{b}$

[7] 解答 $r = \frac{b}{a+b+c}, s = \frac{c}{a+b+c}$

[8] 解答 $\overrightarrow{CO} = \frac{11}{15}\overrightarrow{CA} + \frac{28}{45}\overrightarrow{CB}$

[9] 解答 (1) $4:2:3$
 (2) $4\overrightarrow{QA} + 9\overrightarrow{QB} + 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$ または $4\overrightarrow{QA} - 9\overrightarrow{QB} - 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

[10] 解答 $4\sqrt{5}$

[11] 解答 (1) $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-2t \end{cases}; 2x+y-3=0$ (2) $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 5-t \end{cases}; x+3y-14=0$

[12] 解答 (1) $x-2y+1=0$ (2) $3x-y-10=0$

[13] 解答 (1) 線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円
 (2) 線分 OA を直径とする円

[14] 解答 $19:3$

[15] 解答 (1) $\overrightarrow{OA} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{OB} + \frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OC}$ (2) 135°

[16] 解答 (1) 線分 BC を $2:1$ の比に内分する点
 (2) B を通り、直線 AB に垂直な直線
 (3) 線分 BC を直径とする円周とその内部

[1] 点 A に関する位置ベクトルと考える。

$$(1) \quad \overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AE} = \frac{-\vec{b} + 2\vec{c}}{2-1} = -\vec{b} + 2\vec{c}$$

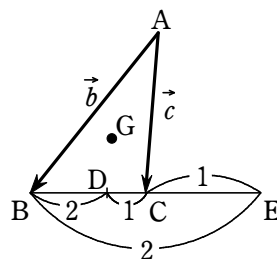
(3) 辺 BC の中点を M とすると

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

別解
$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$(5) \quad \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{c}$$



[2] (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 5 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5$

(2) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CH}$ の始点をそろえると、なす角は 150° である。

$$\text{また, } CH = AC \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{CH}| \cos 150^\circ = 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3$$

(3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CH}$ の始点をそろえると、なす角は 90° であるから

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CH}| \cos 90^\circ = 5 \times \sqrt{3} \times 0 = 0$$

(4) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC$

頂点 C から直線 AB に垂線 CH をおろすと $|\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC = BH$

$$\text{また, } AH = AC \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{により}$$

$$BH = AB - AH = 5 - 1 = 4$$

$$\text{したがって, } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot (|\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC) = BA \cdot BH = 5 \times 4 = 20$$

[3] $\vec{a} - \vec{b} = (4, 2) - (3, -1) = (1, 3)$

$$\vec{x} - \vec{b} = (p, q) - (3, -1) = (p-3, q+1)$$

条件より $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x} - \vec{b} \neq \vec{0}$ であるから $(p, q) \neq (0, 0), (3, -1) \dots\dots ①$

このとき, $\vec{x} \parallel (\vec{a} - \vec{b})$ から $p \times 3 - q \times 1 = 0$

$$\text{よって } 3p - q = 0 \dots\dots ②$$

$$\text{また, } (\vec{x} - \vec{b}) \perp \vec{a} \text{ から } (p-3) \times 4 + (q+1) \times 2 = 0$$

$$\text{よって } 2p + q = 5 \dots\dots ③$$

②, ③ を解いて $p = 1, q = 3$ これは ① を満たす。

$$\begin{aligned} [4] (1) \quad |\vec{3a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{3a}-\vec{b}) \cdot (\vec{3a}-\vec{b}) = 9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \times 1^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + (3\sqrt{2})^2 \\ &= 9 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 18 = 27 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

$$|\vec{3a}-\vec{b}| = 3 \text{ より, } |\vec{3a}-\vec{b}|^2 = 9 \text{ であるから } 27 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{1 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 45^\circ$$

$$[5] \quad \vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} = (9, 3) + t(-1, -2) = (9-t, 3-2t)$$

$$|\vec{c}|^2 = (9-t)^2 + (3-2t)^2 = 5t^2 - 30t + 90$$

$$= 5(t-3)^2 + 45$$

よって, $|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。

$|\vec{c}| \geq 0$ であるから, $|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となり, 最小値は $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

したがって $t=3$ で 最小値 $3\sqrt{5}$

$$[6] \quad \text{BK} : \text{KF} = s : (1-s), \text{EK} : \text{KC} = t : (1-t) \text{ とすると}$$

$$\overrightarrow{\text{AK}} = (1-s)\overrightarrow{\text{AB}} + s\overrightarrow{\text{AF}} = (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\text{AK}} = (1-t)\overrightarrow{\text{AE}} + t\overrightarrow{\text{AC}} = (1-t)\frac{3}{5}\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{よって } (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}t\right)\vec{a} + t\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから

$$1-s = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}t, \quad \frac{2}{3}s = t$$

$$\text{これを解いて } s = \frac{6}{19}, \quad t = \frac{4}{19} \quad \text{よって } \overrightarrow{\text{AK}} = \frac{13}{19}\vec{a} + \frac{4}{19}\vec{b}$$

[別解] $\triangle \text{ABF}$ と直線 CE について, メネラウスの定理を利用する。

DA と CE の交点を J とすると

$$\triangle \text{EBC} \sim \triangle \text{EAJ}$$

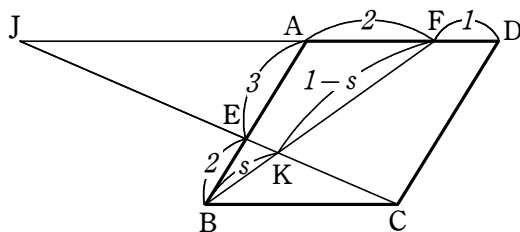
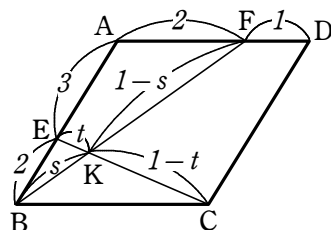
$\text{BC} : \text{AJ} = 2 : 3$ から

$$\text{AJ} = \frac{3}{2}\text{BC} = \frac{3}{2}\text{AD}$$

$$\text{よって } \frac{\text{FJ}}{\text{JA}} = \frac{\text{FA} + \text{AJ}}{\text{JA}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2}{3}\text{AD} + \frac{3}{2}\text{AD}}{\frac{3}{2}\text{AD}} = \frac{\frac{13}{6}\text{AD}}{\frac{3}{2}\text{AD}} = \frac{13}{9} \end{aligned}$$

メネラウスの定理から



$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BK}{KF} \cdot \frac{FJ}{JA} = \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{1-s} \cdot \frac{6.5}{4.5} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } s &= \frac{6}{19} \quad \text{したがって } \overrightarrow{AK} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AF} = \left(1 - \frac{6}{19}\right)\vec{a} + \frac{6}{19} \cdot \frac{2}{3}\vec{b} \\ &= \frac{13}{19}\vec{a} + \frac{4}{19}\vec{b} \end{aligned}$$

- [7] $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D と

すると $BD : DC = AB : AC = c : b$

$$\text{よって } \overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

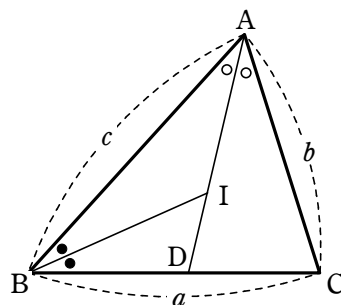
また, $BD = a \cdot \frac{c}{b+c} = \frac{ac}{b+c}$ であるから

$$AI : ID = BA : BD = c : \frac{ac}{b+c} = (b+c) : a$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{b+c}{a+b+c} \left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}, \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}, \overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC} \text{ であるから } r = \frac{b}{a+b+c}, s = \frac{c}{a+b+c}$$



- [8] $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ とすると $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = 4$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 16 \text{ であるから } |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 16$$

$$\text{よって } 9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 16$$

$$\text{ゆえに } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2} \quad \text{すなわち } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{3}{2}$$

外心 O は 3 辺の垂直二等分線の交点である。

よって, 辺 BC , CA の中点をそれぞれ M , N とす

ると, $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{NO}$ である。

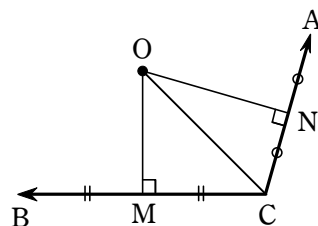
$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$$

$$= a\overrightarrow{CA} + \left(b - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} = \left(a - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MO} = 0 \text{ であるから } a\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \left(b - \frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{CB}|^2 = 0$$

$$\text{よって } -\frac{3}{2}a + 9\left(b - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{ゆえに } -a + 6b - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{NO} = 0 \text{ であるから } \left(a - \frac{1}{2}\right) |\overrightarrow{CA}|^2 + b \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\text{よって } 4\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}b = 0 \quad \text{ゆえに } 8a - 3b - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } a = \frac{11}{15}, b = \frac{28}{45} \quad \therefore \overrightarrow{CO} = \frac{11}{15}\overrightarrow{CA} + \frac{28}{45}\overrightarrow{CB}$$

$$\textcircled{9} (1) \quad 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ から } 2(-\overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 4(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$$

$$\text{ゆえに } -9\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \text{よって } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} = \frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{4+3}\right)$$

$$\text{辺 BC を 4 : 3 に内分する点を D とすると, } \overrightarrow{AD} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{4+3} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AD}$$

ゆえに, 点 P は線分 AD を 7 : 2 に内分する点であるから, $\triangle ABC$ の面積を S とす

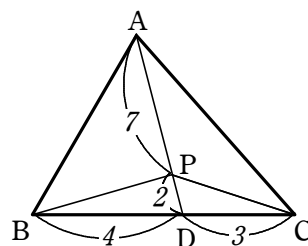
$$\text{ると } \triangle PBC = \frac{2}{9}S$$

$$\triangle PAB = \frac{7}{9}\triangle ABD = \frac{7}{9} \cdot \frac{4}{7}\triangle ABC = \frac{4}{9}S$$

$$\triangle PCA = \frac{7}{9}\triangle ADC = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{7}\triangle ABC = \frac{3}{9}S$$

したがって

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{4}{9}S : \frac{2}{9}S : \frac{3}{9}S = 4 : 2 : 3$$



$$(3) \quad \overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AD} \quad (t \text{ は実数}) \text{ とすると}$$

$$[1] \quad 0 < t < 1 \text{ のとき}$$

$$\triangle QAB = \frac{4}{7}tS, \triangle QBC = (1-t)S$$

$$\triangle QAB : \triangle QBC = 3 : 1 \text{ から } \frac{4}{7}t : (1-t) = 3 : 1$$

$$\text{ゆえに, } t = \frac{21}{25} \text{ であるから } \overrightarrow{AQ} = \frac{21}{25}\overrightarrow{AD} = \frac{21}{25}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\text{よって } -\overrightarrow{QA} = \frac{9}{25}(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA}) + \frac{12}{25}(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA})$$

$$\text{整理すると } 4\overrightarrow{QA} + 9\overrightarrow{QB} + 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$$

$$[2] \quad t > 1 \text{ のとき}$$

$$\triangle QAB = \frac{4}{7}tS, \triangle QBC = (t-1)S$$

$$\triangle QAB : \triangle QBC = 3 : 1 \text{ から } \frac{4}{7}t : (t-1) = 3 : 1$$

ゆえに、 $t = \frac{21}{17}$ であるから $\overrightarrow{AQ} = \frac{21}{17}\overrightarrow{AD} = \frac{21}{17}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

よって $-\overrightarrow{QA} = \frac{9}{17}(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA}) + \frac{12}{17}(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA})$

整理すると $4\overrightarrow{QA} - 9\overrightarrow{QB} - 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

[3] $t=0, 1$ のとき

$\triangle QAB$ または $\triangle QBC$ が存在しないため不適。

[4] $t < 0$ のとき

$\triangle QBC$ に $\triangle QAB$ が含まれ、 $\triangle QAB : \triangle QBC = 3 : 1$ とならないので不適。

以上から $4\overrightarrow{QA} + 9\overrightarrow{QB} + 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$ または $4\overrightarrow{QA} - 9\overrightarrow{QB} - 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

[10] $3s + t \leq 3$ の両辺を 3 で割ると $s + \frac{t}{3} \leq 1$ また $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

$\frac{t}{3} = t', 3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ とおくと $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{OB'}, s + t' \leq 1, s \geq 0, t' \geq 0$

よって、 $3s + t \leq 3, s \geq 0, t \geq 0$ を満たすとき、点 P が描く図形は、 $\triangle OAB'$ の周および内部である。また、 $s + t \geq 1$ を満たすとき、点 P が描く図形は、直線 AB に関して、点 O と反対側にある領域である。

ただし、直線 AB を含む。これらの共通部分であるから、点 P が描く図形は、右の図のような $\triangle ABB'$ の周および内部である。

ここで、 $\angle AOB = \theta$ とすると

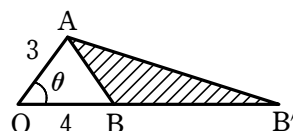
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \theta$$

条件から $8 = 3 \cdot 4 \cos \theta$ よって $\cos \theta = \frac{2}{3}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAB' - \triangle OAB &= \frac{1}{2}OA \cdot OB' \sin \theta - \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} (4 \cdot 3 - 4) = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$



[11] (1) 点 A を通り、 $\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x, y) = (-1, 5) + t(1, -2)$$

すなわち
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

t を消去すると $y = 5 - 2(x + 1)$ すなわち $2x + y - 3 = 0$

(2) 2 点 A, B を通る直線の媒介変数表示は

$$(x, y) = (1 - t)(-1, 5) + t(2, 4)$$

すなわち
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

t を消去すると $x = -1 + 3(5 - y)$ すなわち $x + 3y - 14 = 0$

[12] 直線上の任意の点を $P(x, y)$ とする。

(1) $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ …… ①

$\vec{n} = (1, -2)$, $\overrightarrow{AP} = (x-5, y-3)$ であるから, ① より

$1 \cdot (x-5) + (-2) \cdot (y-3) = 0$ よって $x - 2y + 1 = 0$

(2) $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OA}$ であるから $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ …… ①

$\overrightarrow{OA} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AP} = (x-3, y+1)$ であるから, ① より

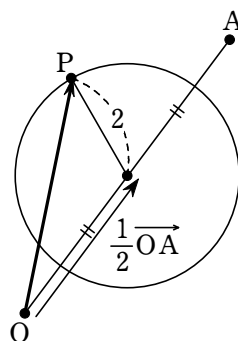
$3 \cdot (x-3) + (-1) \cdot (y+1) = 0$ よって $3x - y - 10 = 0$

[13] (1) $|2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = 4$ を変形すると

$$2 \left| \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \right| = 4$$

すなわち $\left| \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \right| = 2$

ゆえに, 線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円を表す。



(2) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$ を変形すると

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

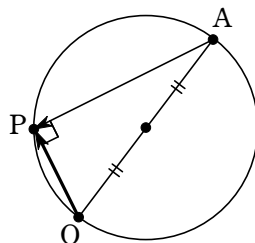
よって $\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$

すなわち $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

ゆえに $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ または

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$$

よって, 線分 OA を直径とする円を表す。



[14] $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とすると

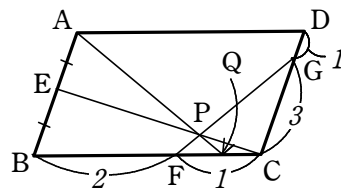
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \vec{a},$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b},$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{4} \vec{a} + \vec{b}$$

$EP : PC = s : (1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{AP} = (1-s)\overrightarrow{AE} + s\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(1-s)\vec{a} + s(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(1+s)\vec{a} + s\vec{b} \quad \dots\dots ①$$



また, $FP:PG=t:(1-t)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AF} + t\overrightarrow{AG} = (1-t)\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + t\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)\vec{b} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

①, ② より $\frac{1}{2}(1+s)\vec{a} + s\vec{b} = \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)\vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$ であるから $\frac{1}{2}(1+s) = 1 - \frac{3}{4}t, s = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$

これを解いて $s = \frac{8}{11}, t = \frac{2}{11}$

よって $\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}\vec{a} + \frac{8}{11}\vec{b}$

点 Q は直線 AP 上にあるから $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} \quad (k \text{ は実数})$

ゆえに $\overrightarrow{AQ} = \frac{19}{22}k\vec{a} + \frac{8}{11}k\vec{b} = \frac{3}{22}k\vec{a} + \frac{8}{11}k(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{22}k\overrightarrow{AB} + \frac{8}{11}k\overrightarrow{AC}$

点 Q は直線 BC 上にあるから $\frac{3}{22}k + \frac{8}{11}k = 1$ よって $k = \frac{22}{19}$

ゆえに $AP:PQ = 19:3$

[15] (1) 直線 OP, OQ, OR はそれぞれ辺 BC, CA, AB の垂直二等分線であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2}, \overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$(t+1)\overrightarrow{OP} + (t-1)\overrightarrow{OQ} - t(t+1)\overrightarrow{OR} = \vec{0}$ から

$$(t+1)\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + (t-1)\frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2} - t(t+1)\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \vec{0}$$

すなわち $-(1+t^2)\overrightarrow{OA} + (1-t^2)\overrightarrow{OB} + 2t\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

よって $\overrightarrow{OA} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{OB} + \frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OC}$

$$\begin{aligned}(2) \quad |\overrightarrow{OA}|^2 &= \left| \frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{OB} + \frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OC} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 |\overrightarrow{OB}|^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 |\overrightarrow{OC}|^2 + 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}|^2 &= \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 \right\} |\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$$0 < t < 1 \text{ から } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

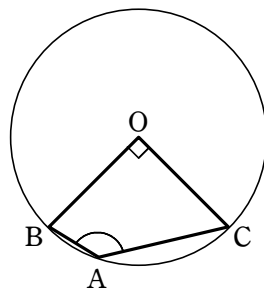
$$\text{よって } \angle BOC = 90^\circ$$

$$\text{また, } \overrightarrow{OA} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \overrightarrow{OB} + \frac{2t}{1+t^2} \overrightarrow{OC} \text{ で } \frac{1-t^2}{1+t^2} > 0,$$

$$\frac{2t}{1+t^2} > 0 \text{ であるから, 3点 A, B, C の位置関係は右図}$$

ようになる.

$$\text{よって } \angle BAC = (360^\circ - 90^\circ) \div 2 = 135^\circ$$



[16] (1) 条件の等式から $\overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC}$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$$

よって, 点 P は線分 BC を 2 : 1 の比に内分する点である. 図

(2) 条件の等式から $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \quad \text{すなわち, } \overrightarrow{AB} \text{ と } \overrightarrow{BP} \text{ は垂直である.}$$

したがって, 点 P の集合は点 B を通り, 直線 AB に垂直な直線である. 図

(3) 条件の不等式から $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) - \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \leq 0$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \leq 0$$

$$\text{よって } (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \leq 0$$

したがって, 点 P の集合は, 線分 BC を直径とする円周とその内部である. 図

[参考] (3) $\overrightarrow{AB} = (0, 0), \overrightarrow{AC} = (c, 0), \overrightarrow{AP} = (x, y)$ とすると, $(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \leq 0$

$$\text{から } x(x-c) + y^2 \leq 0 \quad \text{ゆえに } \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{c}{2}\right)^2$$