BASIC問題

1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　(2) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\cos\theta \leqq -\sqrt{2}$　(2) $-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$　(3) $\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

3 α，β，γ は鋭角で，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$，$\tan\gamma = 8$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$　(2) $\alpha+\beta+\gamma$

4 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

5 次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$　(2) $\sin\dfrac{5}{12}\pi - \cos\dfrac{5}{12}\pi$

6 $2\sin 4\theta\cos 2\theta$ を和の形，$\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

Standard問題

7 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

8 関数 $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 1$ の最大値，最小値を求めよ。

9 次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

10 $\theta = 18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

11 次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$　(2) $\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

実戦問題

12 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$　　(4) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq -\dfrac{1}{2}$

13 a を定数とする。x についての方程式 $\cos^2 x + 2a\sin x - a - 1 = 0$ の $0 \leqq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

14 地上にいる人が，高さ 200 m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50 m の鉄塔を見る。鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか。ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

15 以下の問いに答えよ。必要ならば，等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を利用してよい。

(1) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

16 次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

1 解答 (1) $\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ (2) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$ (3) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

2 解答 (1) $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ (2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

(3) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

3 解答 (1) 1 (2) $\frac{5}{4}\pi$

4 解答 $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9},\ \cos 2\alpha=\frac{7}{9},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

5 解答 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6 解答 順に　$\sin 6\theta+\sin 2\theta,\ 2\cos 4\theta\cos\theta$

7 解答 最大値 5，最小値 3　（後半） $\tan x=\frac{3}{4}$

8 解答 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 $-\frac{1}{4}$

9 解答 $x=\frac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，$x=\frac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$

10 解答 (前半) 略　(後半) $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

11 解答 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 0

12 解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$ (2) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$ (4) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

13 解答 $a<-\frac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個

14 解答 $100\sqrt{5}$ m

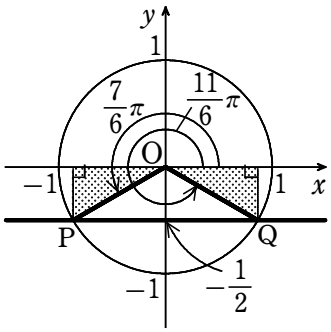
15 解答 (1) 略 (2) $\alpha=40^\circ,\ \beta=160^\circ$

16 解答 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$ または $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形

1 (1) 直線 $y=-\frac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

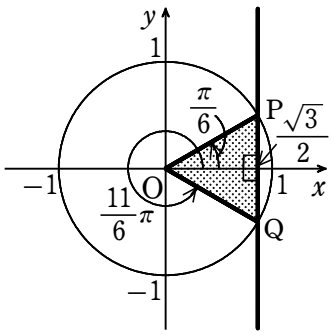
$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$



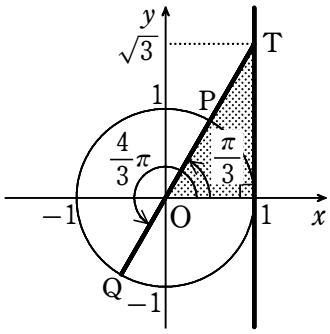
(2) 直線 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$



(3) 点 T$(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$



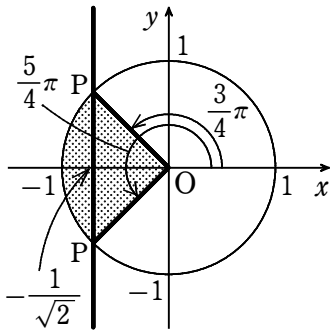
2 (1) 不等式を変形して　$\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

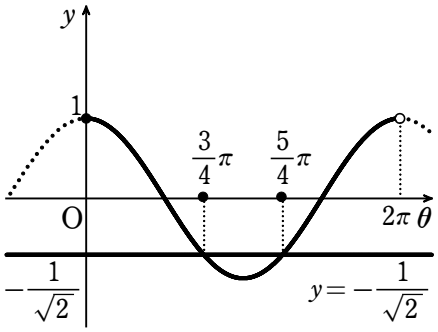
ゆえに，θ の値の範囲は

$$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から　$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$



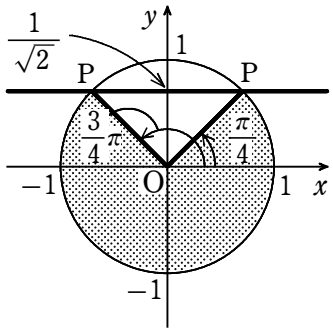
(2)　不等式を変形して　$\sin\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

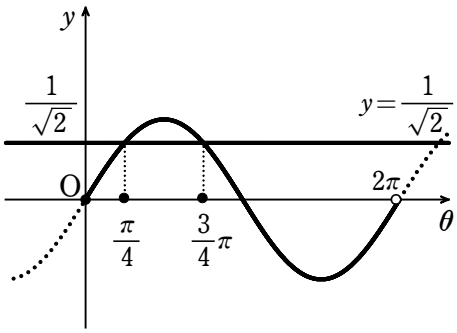
よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。
ゆえに，θ の値の範囲は

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。
よって，右の図から

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$

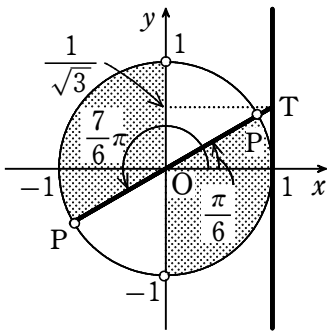


(3)　不等式を変形して　$\tan\theta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。
ゆえに，θ の値の範囲は

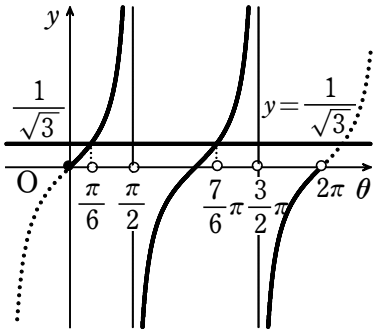


$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$



3 (1)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+5}{1-2\cdot 5}=-\dfrac{7}{9}$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 8}=1$$

(2)　α，β，γ は鋭角であるから　$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$

$\tan(\alpha+\beta)<0$ であるから，$\alpha+\beta$ は第２象限にある。

さらに，$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}>0$ であるから，$(\alpha+\beta)+\gamma$ は第３象限にある。

よって，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ より　$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$

4　$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

ゆえに　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

また　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$

次に　$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\}=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\frac{\alpha}{2}>0$

したがって　$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

5 (1)　$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2)　$\sin\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{5}{12}\pi=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

6 $2\sin 4\theta\cos 2\theta = 2\cdot\frac{1}{2}\{\sin(4\theta+2\theta)+\sin(4\theta-2\theta)\} = \sin 6\theta + \sin 2\theta$

$\cos 5\theta + \cos 3\theta = 2\cos\frac{5\theta+3\theta}{2}\cos\frac{5\theta-3\theta}{2} = 2\cos 4\theta\cos\theta$

7 （前半）

$y = 3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+\alpha)$　　ただし　$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\alpha \leqq x+\alpha \leqq \frac{\pi}{2}+\alpha$ より，$x+\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき　最大値　5

$x+\alpha = \frac{\pi}{2}+\alpha$　つまり $x = \frac{\pi}{2}$ のとき　最小値　3

（後半）

$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{4}$

8 $\sin x + \cos x = t$ とおく。

この式の両辺を２乗すると

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$$

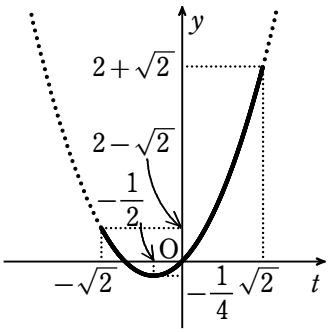
よって　　$2\sin x\cos x = t^2 - 1$

したがって

$$y = t + (t^2-1) + 1 = t^2 + t = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

また，$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$



① の範囲で y は

$t = \sqrt{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，

$t = -\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。

9 $y = \frac{1-\cos 2x}{2} + 2\cdot\frac{\sin 2x}{2} + 3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = \sin 2x + \cos 2x + 2$

$= \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + 2$

$2x + \frac{\pi}{4} = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \pi$ から　　$\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{9}{4}\pi$　$\cdots\cdots$ ①

① の範囲において，$y = \sqrt{2}\sin t + 2$ は

$t = \frac{\pi}{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$t = \frac{3}{2}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

$t = \frac{\pi}{2}$ のとき $x = \frac{\pi}{8}$，$t = \frac{3}{2}\pi$ のとき $x = \frac{5}{8}\pi$ であるから，この関数は

$x=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$x=\dfrac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

10 $\theta=18^\circ$ のとき　$5\theta=90^\circ$　よって，$2\theta+3\theta=90^\circ$ より，$2\theta=90^\circ-3\theta$ であるから

$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ であるから

$$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ であるから　$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$　これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

参考　3 倍角の公式　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

[証明]

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha&=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha\\&=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\\&=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha\end{aligned}$$

11 (1)

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ&=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cos 80^\circ\\&=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 80^\circ\\&=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)\\&=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}\cos(180^\circ-80^\circ)+\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{4}\cos 80^\circ-\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ+\sin 140^\circ+\sin 260^\circ&=(\sin 20^\circ+\sin 260^\circ)+\sin 140^\circ\\&=2\sin 140^\circ\cos 120^\circ+\sin 140^\circ\\&=-\sin 140^\circ+\sin 140^\circ=0\end{aligned}$$

12 (1)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t = -\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$　すなわち　$\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{13}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

すなわち　$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3)　$\theta - \frac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\tan t > 1$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$

すなわち　$-\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{11}{6}\pi$　……①

この範囲で，① を解くと　$\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < t < \frac{3}{2}\pi$

すなわち　$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$

よって　$\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(4)　$2\theta + \frac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\sin t \leqq -\frac{1}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$

すなわち　$\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{25}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　$\frac{7}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{23}{6}\pi$

すなわち　$\frac{7}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{23}{6}\pi$

よって　$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

13　$\sin x = t$ とおくと，方程式は　$(t-a)^2 - a^2 + a = 0$

また，$0 \leqq x < 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

よって，$f(t)=(t-a)^2-a^2+a=0$ の $-1\leqq t\leqq 1$ における実数解の個数を調べればよい。ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\neq\pm1$ であれば 2 つあり，$t=\pm1$ であれば 1 つある。

[1]　$f(1)=-a+1=0$ のとき

$a=1$ であるから　　$f(t)=(t-1)^2$

よって，$f(t)=0$ は重解 $t=1$ をもつ。したがって，x の実数解は 1 個。

[2]　$f(-1)=3a+1=0$ のとき

$a=-\dfrac{1}{3}$ であるから　　$f(t)=\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}$

$f(t)=0$ すなわち $t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0$ を解くと　$t=-1,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，x の実数解は 3 個。

[3]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 2 つもつとき

$$\begin{cases}-1<a<1 \text{ かつ } -a^2+a<0 \ (\text{頂点の位置から})\\ f(1)=-a+1>0\\ f(-1)=3a+1>0\end{cases}$$

この連立不等式を解くと　　$-\dfrac{1}{3}<a<0$

このとき，x の実数解は 4 個。

[4]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 1 つもつとき

このときは，次の (ア) か (イ) のどちらかである。

(ア)　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に重解をもつ。

(イ)　$f(1)f(-1)<0$

(ア) のとき，$-a^2+a=0$ を満たすから　　$a=0,\ 1$

$a=0$ のとき $f(t)=t^2$ であるから，確かに重解 $t=0$ を $-1<t<1$ にもつ。

このとき，x の実数解は 2 個。

$a=1$ のとき $f(t)=(t-1)^2$ であるから，$-1<t<1$ には解をもたない。

(イ) のとき　　$(-a+1)(3a+1)<0$

よって　　$a<-\dfrac{1}{3},\ 1<a$

このとき，x の実数解は 2 個。

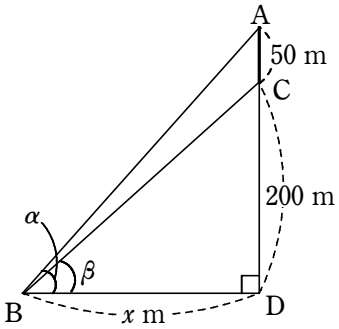
まとめると　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき 4 個，　$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき 3 個，

$a<-\dfrac{1}{3},\ a=0,\ 1<a$ のとき 2 個，

$a=1$ のとき 1 個，　$0<a<1$ のとき 0 個

以上より，解が2個となる条件は　$a<-\dfrac{1}{3},\ a=0,\ 1<a$

14 人がビルから x m 離れているとする。
また，ビルの下端を D とし，右の図のように，
$\angle ABD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$ とすると



$$\tan\alpha=\frac{250}{x},\ \tan\beta=\frac{200}{x}$$

したがって

$$\tan\angle ABC=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{250}{x}-\frac{200}{x}}{1+\frac{250}{x}\cdot\frac{200}{x}}=\frac{\frac{50}{x}}{1+\frac{50000}{x^2}}$$

$$=\frac{50}{x+\frac{50000}{x}}$$

$x>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{50000}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{50000}{x}}=200\sqrt{5}$$

等号が成り立つのは，$x=\frac{50000}{x}$ かつ $x>0$，すなわち $x=100\sqrt{5}$ のときである。

$0<\angle ABC<\frac{\pi}{2}$ であるから，$\tan\angle ABC$ が最大のとき，$\angle ABC$ も最大である。

したがって，人がビルから $100\sqrt{5}$ m 離れたとき，$\angle ABC$ は最大となる。

15 参考 $\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

(1) $(2\cos 80^\circ)^3-3\cdot 2\cos 80^\circ+1$

$$=8\cos^3 80^\circ-6\cos 80^\circ+1=2(4\cos^3 80^\circ-3\cos 80^\circ)+1$$

$$=2\cos(3\times 80^\circ)+1=2\cos 240^\circ+1=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

よって，$2\cos 80^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の解である。

(2) $(2\cos\theta)^3-3\cdot 2\cos\theta+1=0$

$$\iff 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1=0$$

$$\iff 2\cos 3\theta+1=0\iff \cos 3\theta=-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，① を満たす θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ を求めると，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ であるから

$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ$　　よって　$\theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ゆえに，$2\cos 40^\circ$，$2\cos 160^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の $2\cos 80^\circ$ 以外の 2 つの解である。

$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha=40^\circ,\ \beta=160^\circ$

16 $A+B+C=\pi$ ……① であるから　$A+B=\pi-C$

よって　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

また　$\sin C=\sin\left(2\cdot\dfrac{C}{2}\right)=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

ゆえに，等式 $\cos A+\cos B=\sin C$ から　$2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\sin\dfrac{C}{2}\neq 0$ であるから　$\cos\dfrac{A-B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

この等式を更に変形すると　$\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{C}{2}=0$

$$-2\sin\frac{A-B+C}{4}\sin\frac{A-B-C}{4}=0$$

$$\sin\frac{(A+C)-B}{4}\sin\frac{A-(B+C)}{4}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

A，B，C は三角形の内角であるから

$0<A+C<\pi$，$0<B<\pi$

したがって，$-\pi<(A+C)-B<\pi$ から

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{(A+C)-B}{4}<\frac{\pi}{4}$$

同様に考えて　$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{A-(B+C)}{4}<\dfrac{\pi}{4}$

よって，② から

$\dfrac{(A+C)-B}{4}=0$　すなわち　$A-B+C=0$　……③

$\dfrac{A-(B+C)}{4}=0$　すなわち　$A-B-C=0$　……④

①－③ から　$2B=\pi$　すなわち　$B=\dfrac{\pi}{2}$

①＋④ から　$2A=\pi$　すなわち　$A=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，△ABC は，∠A が直角または ∠B が直角の直角三角形である。

BASIC問題

1 (1) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}$ を簡単にせよ。

2 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

3 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

4 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

5 (1) $\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

6 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

7 Standard問題篇

8 $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ の値を求めよ。

9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x-24\cdot 2^{-x}=5$　　(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}>\frac{2}{81}$

10 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$　　(2) $2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq 2$

(3) $2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

11 ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

12 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})-10$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x\neq 1$ とする。

1 解答 (1) $3\sqrt[3]{3}$ (2) 12

2 解答 (1) $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (2) $2^{30}<3^{20}<10^{10}$

3 解答 順に 7，$\sqrt{5}$

4 解答 3

5 解答 (1) $3a$ (2) $\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

6 解答 8 枚

8 解答 $\dfrac{1}{4}$

9 解答 (1) $x=3$ (2) $x<1$

10 解答 (1) $1<x\leqq 2$ (2) $4<x\leqq 19$ (3) $\dfrac{1}{3}<x<9$

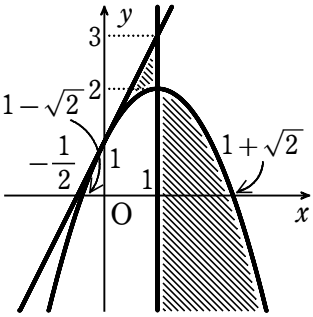
11 解答 $n=72$，末尾の数字は 6

12 解答 (ア) 58 (イ) 2

13 解答 $x=3$，$y=5$

14 解答 $y=-t^2+8t-8$，$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値 8

15 解答 〔図〕 境界線を含まない



1 $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=3\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^{2\times 3}\times 3^{2\times 3}}{(2\times 3)^5\times(2^2)^2}\times\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}\times 2}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^6\times 3^6}{2^5\times 3^5\times 2^4}\times\frac{2^3}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}+2+6+3-5-4-\frac{3}{2}}\times 3^{6-5}=2^2\times 3^1=12$$

2 (1)　3つの数を，それぞれ6乗すると

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\ (\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9,\ (\sqrt[6]{7})^6=7$$

$7<8<9$ であるから　$(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　ゆえに　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

$7<8<9$ であるから　$7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　すなわち　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$8<9<10$ であるから　$8^{10}<9^{10}<10^{10}$　すなわち　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

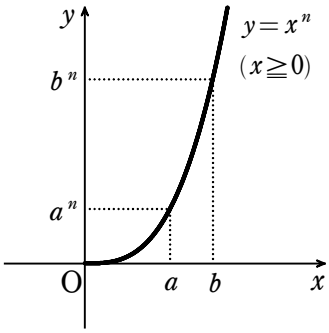
注意　解答では，次の事柄を使っている。

[1]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^n<b^n$$

[2]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$$



3 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\left(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)^2=x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}>0$ であるから　$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}=\sqrt{5}$

4 $\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}=\log_3\left(49^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\div\frac{4}{9}\right)=\log_3\left\{(7^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right\}$

$=\log_3\left(7\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$

5 (1) $\log_{25}64=\dfrac{\log_5 64}{\log_5 25}=\dfrac{6\log_5 2}{2}=3\log_5 2=3a$

(2) $\log_6 84=\dfrac{\log_2(2^2\times3\times7)}{\log_2(2\times3)}=\dfrac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで　$\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 7=ab$　　よって　$\log_6 84=\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

6 1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから，n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る．

よって，求める条件は　$0.3^n<1-0.9999$ すなわち $0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

ゆえに　$n(\log_{10}3-1)<-4$ から　$n(-0.5229)<-4$

よって　$n>\dfrac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$　　したがって　8 枚.

7

8 $5^x=7^y=35^4$ から　$\log_{10}5^x=\log_{10}7^y=\log_{10}35^4$

よって　$x\log_{10}5=y\log_{10}7=4\log_{10}35$

したがって　$x=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}5}$，$y=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}7}$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}5+\log_{10}7}{4\log_{10}35}=\dfrac{\log_{10}35}{4\log_{10}35}=\dfrac{1}{4}$

9 (1) 方程式の両辺に 2^x (>0) を掛けて　$(2^x)^2-24=5\cdot2^x$

ゆえに　$(2^x)^2-5\cdot2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-5t-24=0$

よって　$(t+3)(t-8)=0$　　$t>0$ であるから　$t=8$

ゆえに　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(2) 不等式を変形すると　$\dfrac{1}{9}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\dfrac{2}{81}>0$

両辺に 81 を掛けて　$9\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2>0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$9t^2+3t-2>0$

よって　$(3t-1)(3t+2)>0$

$3t+2>0$ であるから　$3t-1>0$　すなわち　$t>\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<1$

10 (1)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より　$1<x<3$　……①

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(3-x)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$$

ゆえに　$\log_2(x-1)\leqq\log_2(3-x)$

底 2 は 1 より大きいから　$x-1\leqq 3-x$

よって　$x\leqq 2$　……②

①，② から，解は　$1<x\leqq 2$

(2)　真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $x+6>0$ より　$x>4$　……①

不等式から　$\log_3(x-4)^2\leqq 2+\log_3(x+6)$

すなわち　$\log_3(x-4)^2\leqq\log_3 9(x+6)$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-4)^2\leqq 9(x+6)$

整理して　$x^2-17x-38\leqq 0$　　ゆえに　$(x+2)(x-19)\leqq 0$

したがって　$-2\leqq x\leqq 19$　……②

①，② から，解は　$4<x\leqq 19$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$\log_{\frac{1}{3}}x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3\frac{1}{3}}=-\log_3 x$ であるから，不等式は　$2+\log_3 x>(\log_3 x)^2$

ゆえに　$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2<0$

したがって　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-2)<0$

よって　$-1<\log_3 x<2$　すなわち　$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$\frac{1}{3}<x<9$　　これは ① を満たす。

11 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 であるから　$4\times 10^{21}\leqq 2^n<5\times 10^{21}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}(4\times 10^{21})\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}(5\times 10^{21})$

$5\times 10^{21}=10^{22}\div 2$ であるから　$2\log_{10}2+21\leqq n\log_{10}2<22-\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$ として計算すると　$21.6020\leqq n\times 0.3010<21.6990$

よって　$71.76\cdots\leqq n<72.08\cdots$

n は自然数であるから　$n=72$

$2^4=16$ であるから，$(2^4)^m$ (m は自然数) の末尾の数字は常に 6 である。

$2^{72}=(2^4)^{18}$ であるから，2^{72} の末尾の数字は　6

12 (ア)　$\log_{10}0.15^{70}=70\log_{10}\dfrac{3}{20}=70(\log_{10}3-\log_{10}2-\log_{10}10)=70(0.4771-0.3010-1)$

$=-57.673$

よって　　$-58<\log_{10}0.15^{70}<-57$

ゆえに　　$10^{-58}<0.15^{70}<10^{-57}$

したがって，0.15^{70} を小数で表すと，小数第 ア 58 位に 0 でない数字が現れる。

(イ)　$0.15^{70}=10^{-57.673}=10^{0.327}\times10^{-58}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より $10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ であるから

$2<10^{0.327}<3$

よって　　$2\times10^{-58}<0.15^{70}<3\times10^{-58}$

したがって，0.15^{70} を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　イ 2

13 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 & \cdots\cdots ① \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

真数は正であるから　$x+1>0$，$y+3>0$

すなわち　$x>-1$，$y>-3$　……③

② から　$\log_2 \dfrac{x+1}{y+3} = \log_2 2^{-1}$

よって　$\dfrac{x+1}{y+3} = \dfrac{1}{2}$ から　$y+3=2(x+1)$

ゆえに　$y=2x-1$　……④

④ を ① に代入すると　$8\cdot 3^x - 3^{2x-1} = -27$

この式の両辺に 3 を掛けて整理すると　$(3^x)^2 - 24\cdot 3^x - 81 = 0$

ここで，$3^x = t$ とおくと，③ より $t > \dfrac{1}{3}$ である。

$t^2 - 24t - 81 = 0$ から　$(t-27)(t+3)=0$

$t > \dfrac{1}{3}$ であるから　$t=27$

ゆえに　$3^x = 27$　　したがって　$x=3$

このとき，④ から　$y = 2\cdot 3 - 1 = 5$

これらはともに ③ を満たす。

14 $4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + 2^{-2x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2\cdot 2^x \cdot 2^{-x}$

$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$

ゆえに　$y = 8t - (t^2 - 2) - 10$　　よって　$y = -t^2 + 8t - 8$

$2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

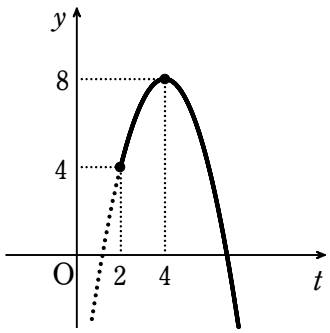
$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$

等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

ゆえに　$t \geqq 2$　……①

また　$y = -(t-4)^2 + 8$

① の範囲において，y は $t=4$ で最大値 8 をとる。



$t=4$ のとき　$2^x + 2^{-x} = 4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2 - 4\cdot 2^x + 1 = 0$

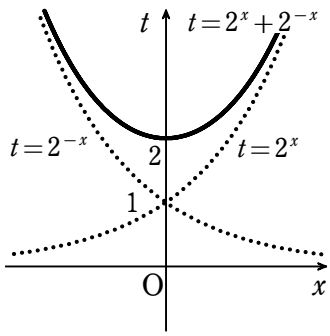
$2^x > 0$ であるから　$2^x = 2 \pm \sqrt{3}$　　よって　$x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$

したがって　$x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$ で最大値 8

参考　$t=2^x+2^{-x}$ のグラフは，右の図のようになり，
1 つの t の値に対応する x の値の個数は

$t<2$ のとき　0 個
$t=2$ のとき　1 個
$t>2$ のとき　2 個

となる。

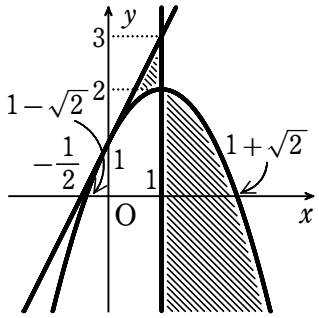


15　真数は正であるから　　$2x-y+1>0$
よって　　$y<2x+1$　……①
また，$x>0$ かつ $x\neq 1$ は底の条件を満たす。
与えられた不等式を変形すると　　$\log_x(2x-y+1)>\log_x x^2$

[1]　$x>1$ のとき　$2x-y+1>x^2$
　ゆえに　　$y<-x^2+2x+1$
　すなわち　$y<-(x-1)^2+2$

[2]　$0<x<1$ のとき　$2x-y+1<x^2$
　ゆえに　　$y>-x^2+2x+1$
　すなわち　$y>-(x-1)^2+2$

[1]，[2] より
　直線 $x=1$ の右側と，放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の
　下側の共通部分
および
　直線 $x=0$ の右側かつ $x=1$ の左側と，
　放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の上側の共通部分
これと ① の共通部分が求める領域で，右の図の斜線部分。
ただし，境界線を含まない。



BASIC問題

1 2点A(-3)，B(5)について，次のものを求めよ。

(1) 2点A，B間の距離

(2) 線分ABを3：1に内分，外分する点の座標

(3) 線分ABの中点

2 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点$(6,\ -1)$を通り，直線$2x-y+4=0$に平行な直線，垂直な直線

(2) 点$(-2,\ 3)$を通り，直線$5x+2y-3=0$に平行な直線，垂直な直線

(3) 点$(1,\ -1)$を通り，2点$(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$を通る直線に平行な直線，垂直な直線

3 (1) 2点$(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2) 3点$(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$を通る円の方程式を求めよ。

4 kを定数とする。点$(2,\ 1)$から直線$kx+y+1=0$へ下ろした垂線の長さが$\sqrt{3}$となるように，kの値を定めよ。

STANDARD問題

5 直線$3x-4y-1=0$をℓとする。直線ℓに関して点A$(2,\ 5)$と対称な点をB，点Aからℓに下ろした垂線とℓとの交点をHとするとき，次のものを求めよ。

(1) 点Bの座標　　(2) 点Hの座標

6 3直線$x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③が三角形を作らないとき，定数aの値を求めよ。

7 点$(-1,\ 2)$を通り，x軸，y軸に接するような円の方程式を求めよ。

8 円$x^2+y^2-4x-2y=0$と直線$ax+y+a=0$が異なる2点A，Bで交わる。

(1) $a=-1$のとき，弦ABの長さを求めよ。

(2) 弦ABの長さが最大となるとき，定数aの値を求めよ。

9 2つの円$x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1) 2つの円①，②は異なる2点で交わることを示せ。

(2) 2つの円①，②の2つの交点と点$(4,\ 0)$を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に 2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点 P が放物線上の $1\leqq x\leqq 7$ の範囲を動くとき，△PAB の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

11 点 P$(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた 2 本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

12 円 $x^2+y^2=4$ ……① と円 $(x-5)^2+y^2=1$ ……② の共通接線の方程式を求めよ。

数学②　第３回試験　図形と式１

1 解答 (1) 8　(2) 内分 3，外分 9　(3) 1

2 解答 (1) 平行：$2x-y-13=0$，垂直：$x+2y-4=0$

(2) 平行：$5x+2y+4=0$，垂直：$2x-5y+19=0$

(3) 平行：$x-2y-3=0$，垂直：$2x+y-1=0$

3 解答 (1) $(x-4)^2+(y-1)^2=10$　(2) $x^2+y^2-6x+8y=0$

4 解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

5 解答 (1) $\left(\frac{28}{5},\ \frac{1}{5}\right)$　(2) $\left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$

6 解答 $a=-2,\ -\frac{2}{3},\ 2$

7 解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

8 解答 (1) $2\sqrt{3}$　(2) $a=-\frac{1}{3}$

9 解答 (1) 略　(2) $x^2+y^2-10x-6y+24=0$

10 解答 $\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$

11 解答 $7x+y=25$

12 解答 $3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

1 (1)　$AB=|5-(-3)|=|8|=8$

(2)　3：1 に内分する点の座標は　$x=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot 5}{3+1}=\dfrac{12}{4}=3$

3：1 に外分する点の座標は　$x=\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot 5}{3-1}=\dfrac{18}{2}=9$

(3)　$x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

2 (1)　$2x-y+4=0$ から　$y=2x+4$

よって，与えられた直線の傾きは　2

[1]　平行な直線の方程式は

$y-(-1)=2(x-6)$　すなわち　$2x-y-13=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$2m=-1$　よって　$m=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-(-1)=-\dfrac{1}{2}(x-6)$　すなわち　$x+2y-4=0$

(2)　$5x+2y-3=0$ から　$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線の傾きは　$-\dfrac{5}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{5}{2}\{x-(-2)\}$　すなわち　$5x+2y+4=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$-\dfrac{5}{2}m=-1$　よって　$m=\dfrac{2}{5}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=\dfrac{2}{5}\{x-(-2)\}$　すなわち　$2x-5y+19=0$

(3)　2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

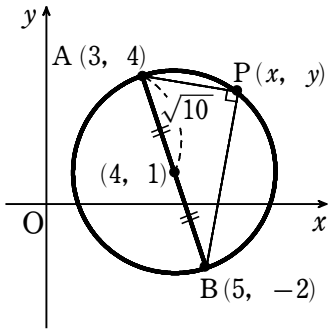
$y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$x-2y-3=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$\dfrac{1}{2}m=-1$　よって　$m=-2$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-(-1)=-2(x-1)$　すなわち　$2x+y-1=0$



3 (1)　この円の中心は，2 点 (3, 4), (5, −2) を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　(4, 1)

半径 r は中心 (4, 1) と円上の点 (3, 4) との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 (3, 1) を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点 (6, −8) を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点 (−2, −4) を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると　$3l+m+n+10=0$

$6l-8m+n+100=0$

$2l+4m-n-20=0$

これを解いて　$l=-6,\ m=8,\ n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

4 題意を満たすための条件は　$\dfrac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$

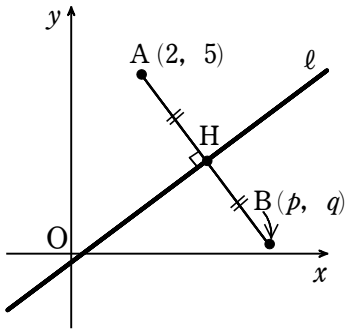
よって　$2|k+1|=\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}$

この両辺は負でないから，2 乗しても同値である。

ゆえに　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理して　$k^2+8k+1=0$

したがって　$k=-4\pm\sqrt{15}$



5 (1)　点Ｂの座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$，直線ABの傾きは $\dfrac{q-5}{p-2}$ である。

AB⊥ℓ であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

すなわち　$4p+3q=23$　……①

[2]　線分ABの中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+5}{2}-1=0$$

すなわち　$3p-4q=16$　……②

①，② を連立して解くと　$p=\dfrac{28}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$

したがって，点Ｂの座標は　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2)　点Ｈは線分ABの中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+\frac{28}{5}}{2},\ \frac{5+\frac{1}{5}}{2}\right)\quad すなわち\quad \left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$$

6 直線①の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　直線②の傾きは -1，　直線③の傾きは $\dfrac{a}{2}$

3直線①，②，③が三角形を作らないのは，次の[1]，[2]，[3]の場合である。

[1]　2直線①，③が平行　　[2]　2直線②，③が平行

[3]　3直線①，②，③が1点で交わる。

[1]の場合　$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$

[2]の場合　$-1=\dfrac{a}{2}$　　よって　$a=-2$

[3]の場合　①，② を連立して解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，直線①，②の交点の座標は　$(-1,\ 1)$

点 $(-1,\ 1)$ が直線③上にあるから　$a\cdot(-1)-2\cdot1+4=0$

整理して　$-a+2=0$　　ゆえに　$a=2$

このとき，直線③は $x-y+2=0$ となり，直線①，② とは一致しない。

したがって，求める a の値は　$a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

7　円の中心は第２象限にあるので，半径を r とおくと中心の座標は $(-r,\ r)$ と表せる。

よって，求める円の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

式を整理して　$r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$ より　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は

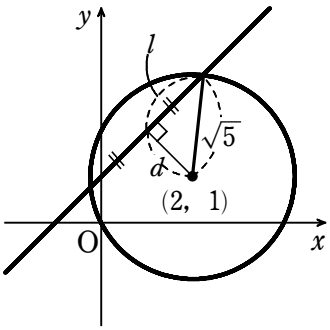
$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

8 (1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$

$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$



円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$

とすると　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{3}$　　よって　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　$2x^2-4x-1=0 \quad \cdots\cdots ③$

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は２次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0 \qquad よって \qquad a=-\frac{1}{3}$$

9 (1)　① を変形すると　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 ① の中心は点 (3，2)，半径は 1 である。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

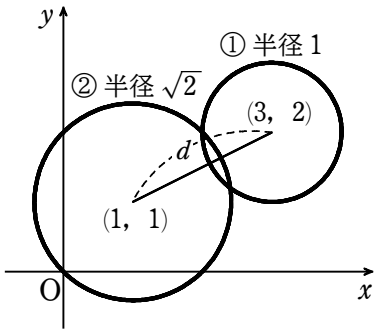
よって，円 ② の中心は点 (1，1)，半径は $\sqrt{2}$ である。

2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに　$\sqrt{2}-1<d<\sqrt{2}+1$

したがって，2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わる。



(2)　k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-6x-4y+12+k(x^2+y^2-2x-2y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。

(1) により，2 つの円 ①，② は 2 点で交わり，③ は 2 つの円 ①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ③ が点 (4，0) を通るとき　$4+8k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入して整理すると　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

これが求める円の方程式である。

10 (1)　P$(t,\ t^2-8t+15)$ とする。

直線 AB の方程式は

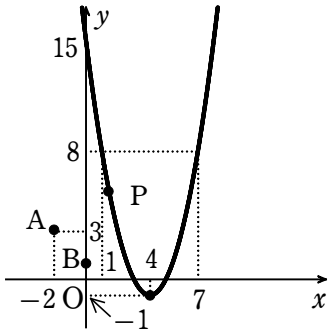
$$y=\frac{1-3}{0-(-2)}\{x-(-2)\}+3$$

すなわち　$y=-x+1$

点 P と直線 $y=-x+1$ の距離を d とすると

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times d$$

ゆえに，d が最小となるように P を定めればよい。



$$d=\frac{|t+t^2-8t+15-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2-7t+14|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

よって，d は $t=\dfrac{7}{2}$ で最小となる。

したがって　P$\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

11 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

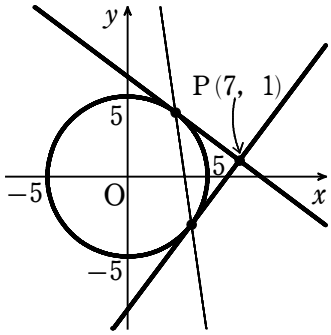
$$x_1x+y_1y=25,\quad x_2x+y_2y=25$$

これらがともに点 P$(7,\ 1)$ を通るから

$$7x_1+y_1=25\ \cdots\cdots ①,\quad 7x_2+y_2=25\ \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ は直線 $7x+y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$7x+y=25$



別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=25\ \cdots\cdots ①$

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 P$(7,\ 1)$ を通るから　$7x_1+y_1=25$

よって　$y_1=-7x_1+25\ \cdots\cdots ②$

② を ① に代入して　$x_1{}^2+(-7x_1+25)^2=25$

ゆえに　$50(x_1{}^2-7x_1+12)=0$　　これを解いて　$x_1=3,\ 4$

② から　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

よって，A，B の座標は　$(3,\ 4)$，$(4,\ -3)$

したがって，直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{-3-4}{4-3}(x-3)\qquad すなわち\qquad 7x+y-25=0$$

参考　直線 AB を点 P に関する円の **極線** といい，P を **極** という。

12 円 ① 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1{}^2+y_1{}^2=4\quad\cdots\cdots③$$

接線の方程式は

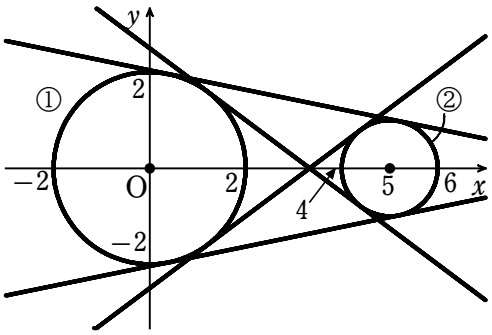
$$x_1x+y_1y=4\quad\cdots\cdots④$$

直線 ④ が円 ② に接するとき，円 ② の中心 $(5,\ 0)$ と直線 ④ の距離は円 ② の半径に等しいから

$$\frac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$$

③ から　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$



③ から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$，$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって，求める接線の方程式は　$3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$