数学①　第６回試験　場合の数　　1　/ 11

BASIC問題

$\boxed{1}$ 100 から 200 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　5 かつ 8 の倍数　　(2)　5 または 8 の倍数

(3)　5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数

(4)　5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数

$\boxed{2}$ SHOJI の 5 文字をすべて使用して作成した文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，JISHO は何番目の文字列であるか。

$\boxed{3}$ 0，1，2，3，4，5，6 の 7 個の数字から異なる 4 個の数字を取り出して 4 桁の整数を作るとき，次のような数は何個あるか。

(1)　4 桁の整数　　(2)　偶数　　(3)　3200 以上

$\boxed{4}$ 正十角形について，次の数を求めよ。

(1)　対角線の本数

(2)　正十角形の頂点のうちの 3 個を頂点とする三角形の個数

(3)　(2) の三角形のうち，正十角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数

$\boxed{5}$ 正四角錐の 5 つの面を，赤青黄緑紫の 5 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

$\boxed{6}$ $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x，y，z の組は，全部で何個あるか。

(1)　x，y，z は負でない整数　　(2)　x，y，z は自然数

Standard問題

$\boxed{7}$ ATLANTA の 7 文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1)　並べ方は，全部で何通りあるか。

(2)　A が両端にくる並び方は，全部で何通りあるか。

(3)　T が隣り合わない並び方は，全部で何通りあるか。

$\boxed{8}$ YOKOHAMA の 8 文字を横 1 列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。

(1)　AA と OO という並びをともに含む順列

(2)　Y，K，H，M がこの順に並ぶ順列

$\boxed{9}$ NAGOYAJO の 8 個の文字をすべて並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) AA と OO という並びをともに含む順列は何通りあるか。

(2) 同じ文字が隣り合わない順列は何通りあるか。

$\boxed{10}$ 正五角柱の 7 つの面を，赤，青，黄，緑，黒，紫の 6 色で塗り分ける。ただし，隣り合う面は異なる色を塗る。また，6 色はすべて使う。なお，回転して同じになるものは同じ塗り方とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) 2 つの五角形の面を同じ色で塗るような，正五角柱の塗り方は何通りあるか。

(2) 正五角柱の塗り方の総数は何通りあるか。

$\boxed{11}$ 赤玉 6 個，青玉 5 個，黄玉 1 個がある。これらの玉にひもを通して輪をつくる方法は何通りあるか。

12 12人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) 5人，4人，3人の3つの組に分ける。

(2) A，B，C，Dの4つの組に，3人ずつ分ける。

(3) 3人ずつの4つの組に分ける。

(4) 8人，2人，2人の3つの組に分ける。

13 次の条件を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(1) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5 \leqq 4$

(2) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \leqq 4$，$a_1 \geqq 1$，$a_i \geqq 0$ $(i=2, 3, 4, 5)$

実戦問題

14 1から10までの自然数の各数字を1つずつ記入した10枚のカードがある。これらをA，B，Cの3つの箱に分けて入れる。

(1) 空の箱があってもよいものとすると，分け方は何通りあるか。

(2) 空の箱があってはならないとすると，分け方は何通りあるか。

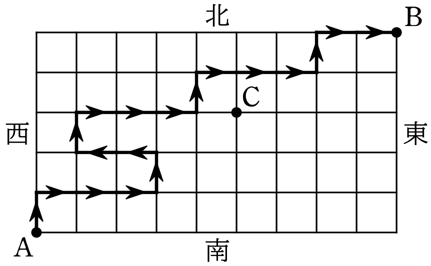
15 正八面体について考える。ただし，回転させて一致するものは同じものとする。

(1) 頂点に1，2，…… と順に番号を付けるとき，番号の付け方は何通りあるか。

(2) 2つの面を赤に，残りの6つの面を白に塗るとき，塗り方は何通りあるか。

(3) 3つの面を赤に，残りの5つの面を白に塗るとき，塗り方は何通りあるか。

16 右の図のように東西に6本，南北に10本の道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする。A地点からB地点に進むとき，次の問いに答えよ。ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする。また，後戻りもできないとする。図の中の太線は道順の例を示したものである。



(1) A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ。

(2) C地点を通って，A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ。

(3) A地点からB地点まで16区間で行く道順の総数を求めよ。

数学①　第６回試験　場合の数

$\boxed{1}$ 解答　(1)　3　(2)　31　(3)　18　(4)　98

$\boxed{2}$ 解答　59 番目

$\boxed{3}$ 解答　(1)　720 個　(2)　420 個　(3)　440 個

$\boxed{4}$ 解答　(1)　35 本　(2)　120 個　(3)　60 個

$\boxed{5}$ 解答　30 通り

$\boxed{6}$ 解答　(1)　91 個　(2)　55 個

$\boxed{7}$ 解答　(1)　420 通り　(2)　60 通り　(3)　300 通り

$\boxed{8}$ 解答　(1)　720 通り　(2)　420 通り

$\boxed{9}$ 解答　(1)　720通り　(2)　5760通り

$\boxed{10}$ 解答　(1)　72通り　(2)　432通り

$\boxed{11}$ 解答　236通り

$\boxed{12}$ 解答　(1)　27720 通り　(2)　369600 通り　(3)　15400 通り　(4)　1485 通り

$\boxed{13}$ 解答　(1)　56 個　(2)　56 個

$\boxed{14}$ 解答　(1)　59049 通り　(2)　55980 通り

$\boxed{15}$ 解答　(1)　30 通り　(2)　3 通り　(3)　3 通り

$\boxed{16}$ 解答　(1)　100000 通り　(2)　59000 通り　(3)　3276 通り

$\boxed{1}$ 100 から 200 までの整数全体の集合を U とし，そのうち 5 の倍数，8 の倍数全体の集合をそれぞれ A，B とすると

$$A=\{5\cdot 20,\ 5\cdot 21,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot 40\},\quad B=\{8\cdot 13,\ 8\cdot 14,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot 25\}$$

ゆえに　$n(A)=40-20+1=21$，$n(B)=25-13+1=13$

(1) 5 かつ 8 の倍数すなわち 40 の倍数全体の集合は $A\cap B$ であり

$$A\cap B=\{40\cdot 3,\ 40\cdot 4,\ 40\cdot 5\}$$

よって　$n(A\cap B)=3$

(2) 5 または 8 の倍数全体の集合は $A\cup B$ であるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=21+13-3=31$$

(3) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ であるから

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=21-3=18$$

(4) 5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数全体の集合は $\overline{A}\cup\overline{B}$ である。

また，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ であるから

$$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=(200-100+1)-3=98$$

$\boxed{2}$ 辞書式に並べたときの 1 番目の文字列は　HIJOS

H□□□□の形の文字列は　$4!=24$(個)

I□□□□の形の文字列は　24 個

JH□□□の形の文字列は　$3!=6$(個)

JIH□□の形の文字列は　$2!=2$(個)

JIO□□の形の文字列は　2 個

その次の文字列が JISHO である。

よって，JISHO となるのは　$24+24+6+2+2+1=59$(番目)

$\boxed{3}$ (1) 千の位は 0 を除く 6 通り。よって　$6\times{}_6\mathrm{P}_3=6\times 120=720$(個)

(2) [1]　一の位が 0 のとき，千，百，十の位は，0 以外の 6 個から 3 個取る順列であるから　${}_6\mathrm{P}_3$

[2]　一の位が 2，4，6 のとき，千の位は，0 と一の位の数以外の 5 個から 1 個取るから　5 通り。

百と十の位は残りの 5 個から 2 個取る順列で　${}_5\mathrm{P}_2$ 通り。

よって　$3\times 5\times{}_5\mathrm{P}_2$

[1]，[2] から求める個数は　${}_6\mathrm{P}_3+3\times 5\times{}_5\mathrm{P}_2=120+300=420$(個)

(3)[1]　千の位が 3 のとき，百の位は，2，4，5，6 の 4 個から 1 個取るから 4 通り。

十，一の位は，残り 5 個から 2 個取る順列で ${}_5\mathrm{P}_2$ 通り。

よって　$4\times{}_5\mathrm{P}_2$

[2]　千の位が 4，5，6 のとき，百，十，一の位は残り 6 個から 3 個取る順列で ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り。

よって　$3\times{}_6\mathrm{P}_3$

[1]，[2] から　$4\times{}_5\mathrm{P}_2+3\times{}_6\mathrm{P}_3=80+360=440$(個)

4 (1)　異なる10個の点から2個の点を選ぶ方法は　${}_{10}C_2$ 通り

この中には正十角形の10本の辺がある。

ゆえに　$${}_{10}C_2-10=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}-10=35\ (本)$$

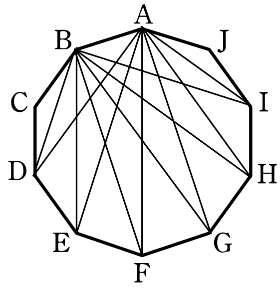
(2)　3個の頂点で三角形が1個できるから，求める個数は

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120\ (個)$$

(3)　正十角形の10個の頂点を図のように定める。このとき，辺ABだけを共有する三角形の第3の頂点の選び方は，A，Bとその両隣の2点C，Jを除くD，E，F，G，H，Iの6通り。

他の辺を共有する場合も同様であるから，求める個数は

$$6\times 10=60\ (個)$$



5　底面の色の塗り方は　5通り

側面の色の塗り方は，残り4色の円順列であるから　$(4-1)!$ 通り

よって　$$5\times(4-1)!=30\ (通り)$$

6 (1)　求める個数は，x，y，z の3種類の文字から重複を許して12個取る組合せの数に等しいから

$${}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\frac{14\cdot 13}{2\cdot 1}=91\ (個)$$

別解　条件を満たす x，y，z の組は，12個の ○ と2個の仕切り ❙ の順列を作り，仕切りで分けられた3か所の ○ の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める個数は，12個の ○ と2個の ❙ を1列に並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{14!}{12!2!}=\frac{14\cdot 13}{2\cdot 1}=91\ (個)$$

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq 0$，$Y\geqq 0$，$Z\geqq 0$

また，$x+y+z=12$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって　$X+Y+Z=9$

この等式を満たす負でない X，Y，Z の組は，(1)と同様に考えて，X，Y，Z の3種類の文字から重複を許して9個取る組合せの数に等しい。

よって，求める個数は　$${}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\cdot 10}{2\cdot 1}=55\ (個)$$

別解　条件を満たす x，y，z の組は，12個の ○ を1列に並べ，その間の11か所のうち2か所に仕切り ❙ を入れ，仕切りで分けられた3か所の ○ の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める個数は　$${}_{11}C_2=\frac{11\cdot 10}{2\cdot 1}=55\ (個)$$

7 (1)　Aが3文字，Tが2文字，Lが1文字，Nが1文字であるから，求める並べ方の総数は

$$\frac{7!}{3!2!1!1!}=420\ (通り)$$

(2)　両端に並べる2文字のAを除いた5文字の並べ方は　$\dfrac{5!}{1!2!1!1!}=60$（通り）

よって，求める並び方は　60通り

(3)　2文字のTをまとめて一組と考えると，その一組と残り5文字の並べ方は

$$\frac{6!}{3!1!1!1!}=120\ (\text{通り})$$

よって，Tが隣り合わない並べ方は　$420-120=300$（通り）

$\boxed{8}$ (1)　並ぶAAをまとめてA′，OOをまとめてO′で表す。

このとき，求める順列は，A′，O′，Y，K，H，Mの順列であるから，その総数は

$$_6P_6=6!=720\ (\text{通り})$$

(2)　□4個，O2個，A2個を1列に並べ，4個の□は左からY，K，H，Mとすればよい。

よって，求める順列の総数は

$$\frac{8!}{4!2!2!}=420\ (\text{通り})$$

$\boxed{9}$ (ア)　AA，OOをそれぞれ1個の文字とみなして，N，G，Y，J，AA，OOの6個の文字を1列に並べる場合の数を求めると

$$6!=720\ (\text{個})$$

(イ)　8個の文字の順列の総数は

$$\frac{8!}{2!2!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot1}$$
$$=10080\ (\text{個})$$

[1]　AAの並びを含み，OOの並びを含まないもの

AAを1つの文字とみなし，N，G，Y，J，AAの5個の文字を並べ，その間と両端の6か所から2か所を選んでO，Oを並べればよいから

$$5!\times{}_6C_2=120\times\frac{6\cdot5}{2\cdot1}$$
$$=1800\ (\text{個})$$

N　G　O　Y　J　O　AA

[2]　OOの並びを含み，AAの並びを含まないもの

OOを1つの文字とみなし，[1]と同様に考えて

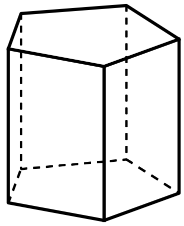
$$5!\times{}_6C_2=1800\ (\text{個})$$

N　A　G　Y　A　J　OO

よって，求める個数は

$$10080-(720+1800\times2)=5760\ (\text{個})$$

10 (ア)　正五角形の面の塗り方は　6 通り



そのおのおのについて，側面の長方形の塗り方は 5 色の円順列となるが，正五角柱をひっくり返すと同じ場合があるから　$\dfrac{6\times(5-1)!}{2}=72$ (通り)　…… ①

(イ)　2 つの正五角形の面を異なる色で塗る場合について考える。

このとき，上面に塗る場合と下面に塗る場合は異なるものと考えると，正五角形の面の塗り方は　${}_6P_2$ 通り

そのおのおのについて，

側面の 5 つの長方形のうちの 2 つを塗る 1 色の選び方が 4 通り，

同色となる長方形の位置の選び方が 1 通り，

残り 3 つの長方形の塗り方が ${}_3P_3$ 通り

であるから　${}_6P_2\times4\times1\times{}_3P_3$ (通り)　あるが，正五角柱をひっくり返すと同じ場合があるから，2 つの正五角形の面を異なる色で塗るような，正五角柱の塗り方は

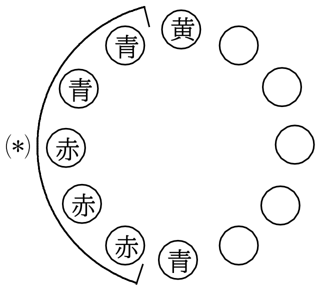
$$\frac{{}_6P_2\times4\times1\times{}_3P_3}{2}=\frac{6\cdot5\times4\times1\times3\cdot2\cdot1}{2}=360\text{ (通り)}\quad\cdots\cdots ②$$

よって，正五角柱の塗り方の総数は，①，② より　$72+360=432$ (通り)

11 円形に並べる方法は，黄玉を固定して，赤玉 6 個，青玉 5 個を並べる並べ方だから，

$$\frac{11!}{6!5!}=462\text{ (通り)}$$

円形に並べたとき，左右対称なものは，青玉が 5 個より，黄玉を固定したときの真正面に青玉がくる。



左の図のように，他の玉の並び方は，(*) の 5 個が決まれば，向かいの 5 個も決まるから，

$$\frac{5!}{2!3!}=10\text{ (通り)}$$

一方，左右対称でない円順列は裏返すと同じになるペアがあるから，2 で割る。

よって，求める方法は，$10+\dfrac{462-10}{2}=236$ (通り)

12 (1)　12 人から 5 人を選ぶ方法は　${}_{12}C_5$ 通り

そのどの場合に対しても，残りの 7 人から 4 人を選ぶ方法は　${}_7C_4$ 通り

残り 3 人を最後の 1 組とする。

よって，分け方の総数は　${}_{12}C_5\times{}_7C_4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=27720$ (通り)

(2)　A 組の 3 人の選び方は　${}_{12}C_3$ 通り

B 組の 3 人の選び方は残りの 9 人から選ぶので　${}_9C_3$ 通り

C 組の 3 人の選び方は残りの 6 人から選ぶので　${}_6C_3$ 通り

A 組，B 組，C 組の人が決まれば，残りの D 組の 3 人は決まる。

よって，分け方の総数は

$$ {}_{12}C_3 \times {}_9C_3 \times {}_6C_3 = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 369600 \text{（通り）} $$

(3)　(2) で，A，B，C，D の区別をなくすと，4! 通りずつ同じ組分けができる。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{369600}{4!} = \dfrac{369600}{24} = 15400$（通り）

(4)　A 組 2 人，B 組 2 人，C 組 8 人の 3 つの組に分けることを考え，A，B の区別をなくせばよい。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{{}_{12}C_2 \times {}_{10}C_2}{2!} = \dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1} \times \dfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1} \times \dfrac{1}{2\cdot 1} = 1485$（通り）

13　(1)　条件を満たす整数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の個数は，1，2，3，4 の 4 個の数字から重複を許して 5 個取る組合せの数であるから

$$ {}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56 \text{（個）} $$

(2)　$b_1 = a_1$，$b_2 = a_1 + a_2$，$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$，$b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$，

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ とおくと

$$ 1 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq b_4 \leqq b_5 \leqq 4 $$

よって，この不等式を満たす整数の組 $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ の個数は，(1) から

56 個

ここで，$(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ の 1 つの組に対して，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の組はただ 1 つに決まる。

したがって，求める組の個数は　56 個

$\boxed{\text{別解}}$　$a_1 - 1 = A$，$A + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$ とおく。

求める個数は，$S=0$，1，2，3 をそれぞれ満たす 0 以上の整数の組 $(A,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の総数に等しい。

$S=3$ のとき，異なる 5 種類のものから，重複を許して 3 個取る組合せの数を求めて

$$ {}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35 \text{（個）} $$

$S=2$ のとき，同様に考えて　${}_5H_2 = {}_{5+2-1}C_2 = {}_6C_2 = 15$（個）

$S=1$ のとき 5 個，$S=0$ のとき 1 個。　以上から　56 個

14　(1)　1 枚のカードを 3 つの箱 A，B，C に入れる方法は 3 通りある。

よって，10 枚のカードを 3 つの箱 A，B，C に入れる方法は

$$ 3^{10} = 59049 \text{（通り）} $$

(2)　A を空にして，10 枚のカードを 2 つの箱 B，C に入れる方法は

2^{10} 通り

この場合において，B，C のうち一方の箱が空になる場合を除いて

$2^{10}-2=1022$ (通り)

同様に，B だけ，C だけを空にする方法はそれぞれ　1022 (通り)

ゆえに，求める場合の数は

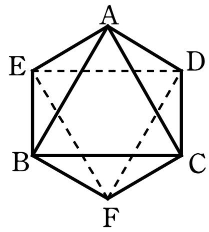
$1022\times3=3066$ (通り)

(3)　2 つの箱が空になる場合は　3 通り

よって，空の箱がない場合は

$59049-3066-3=55980$ (通り)

⑮ (1)　1 の番号を付けた頂点を A とし，残りの 5 つの頂点を，右の図のように B，C，D，E，F とする。



このとき，頂点 F の番号の付け方は 2 ～ 6 の　5 通り

残りの 4 つの頂点 B，C，D，E の番号の付け方は，残りの 4 つの数字の円順列であるから　$(4-1)!$ 通り

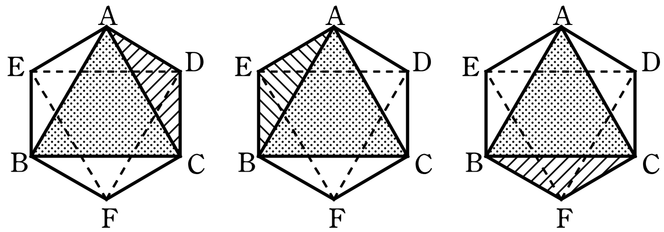
よって，求める総数は　$5\times(4-1)!=30$ (通り)

(2)　面 ABC を赤に塗るとすると，赤に塗るもう 1 つの選び方は，残りの 7 つの面の 7 通りある。

このうち，赤に塗るもう 1 つの面が，面 ABC と 1 辺を共有する面，すなわち

面 ACD または 面 AEB または 面 BCF

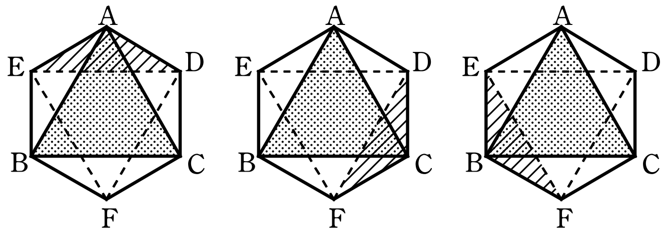
である場合，この 3 つの塗り方はすべて回転すると一致する。

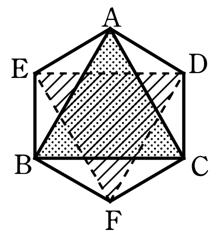


同様に，赤に塗るもう 1 つの面が，面 ABC と頂点のみを共有する面，すなわち

面 ADE または 面 CDF または 面 EBF

である場合，この 3 つの塗り方はすべて回転すると一致する。





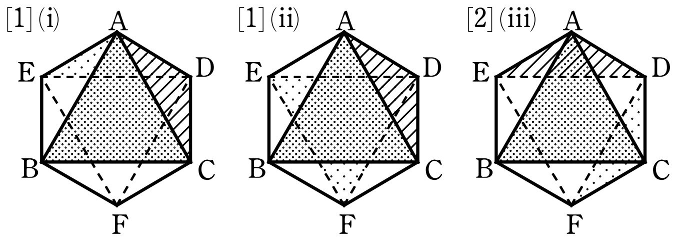
また，赤に塗るもう１つの面が，面 ABC の対面 DEF である場合，この塗り方は他のどの塗り方とも一致しない。
したがって，求める場合の数は　　3 通り

(3)　(2) の 3 通りの場合について，赤に塗るもう 1 つの面の選び方を考える。

[1]　面 ABC と，面 ABC と 1 辺を共有する面 ACD を赤に塗るとき
赤に塗るもう 1 つの面の選び方は，残りの 6 つの面の 6 通りあるが，回転しても一致しない塗り方は，次の (i)，(ii) の 2 通りある。
(i)　面 ADE または 面 AEB または 面 BCF または 面 CDF　の場合
(ii)　面 DEF または 面 EBF　の場合

[2]　面 ABC と，面 ABC と頂点のみを共有する面 ADE を赤に塗るとき
赤に塗るもう 1 つの面の選び方のうち，回転しても一致しない塗り方は，次の (i)，(ii)，(iii) の 3 通りある。
(i)　面 ACD または 面 AEB　の場合
(ii)　面 BCF または 面 DEF　の場合
(iii)　面 CDF または 面 EBF　の場合
ところが，[2] の (i) の塗り方は [1] の (i) の塗り方と同じであり，[2] の (ii) の塗り方は [1] の (ii) の塗り方と同じである。

[3]　面 ABC と対面 DEF を赤に塗るとき
赤に塗るもう 1 つの面をどのように選んでも，[1] の (ii) と同じ塗り方になる。



したがって，求める場合の数は　　3 通り

16　A 地点が原点，B 地点が (9，5)，各交差点が格子点になるように座標軸をとる。

(1)　A 地点から $y=1$ 上の格子点への上り方は　10 通り。
同様に，$y=k$ ($k=1，2，3，4$) 上の格子点から $y=k+1$ 上の格子点への上り方は，各 k に対して 10 通りずつある。
よって，求める総数は　　$10^5=100000$ (通り)

(2)　点 C (5，3) を通る行き方は，次の [1]，[2]，[3] のいずれかである。

[1]　(4，3) から C へ行く。

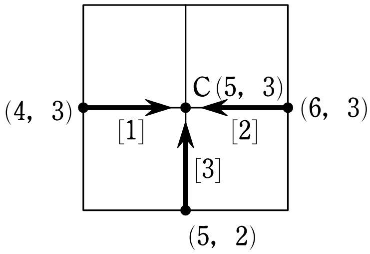
この行き方は　　$10^2\times5\times5\times10=25000$ (通り)

[2]　(6，3) から C へ行く。

この行き方は　　$10^2\times4\times6\times10=24000$ (通り)

[3]　(5，2) から C へ行く。

この行き方は　　$10^2\times1\times10^2=10000$ (通り)



以上から　　$25000+24000+10000=59000$ (通り)

(3)　北，東，西 に 1 区間進むことをそれぞれ↑，→，← で表すことにする。

16 区間で行く道順は ↑5 個，→ 10 個，← 1 個の順列で表される。また，「↑←↑」という並びが必ず 1 個あり，この並びの前後のそれぞれに → が少なくとも 1 個ある。

「↑←↑」1 個，→ 10 個，↑ 3 個の順列の総数は

$$\frac{14!}{10!3!}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=4004 \quad (通り)$$

このうち，「↑←↑」の前に → がない順列の総数は

「↑←↑」→→→→→→→→→→

の間と両端の 12 か所に ↑ 3 個をおく (1 か所に複数個おいてもよい) と考えて

$${}_{12}H_3={}_{12+3-1}C_3={}_{14}C_3=\frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2\cdot1}=364 \ (通り)$$

「↑←↑」の後ろに → がない順列の総数も同様に　　364 通り

よって，求める道順の総数は　　$4004-364\times2=3276$ (通り)

BASIC問題

1 男子 3 人と女子 2 人がくじ引きで順番を決めて横 1 列に並ぶとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 女子 2 人が隣り合う。　(2) 男女が交互に並ぶ。

2 赤玉と白玉が合わせて 10 個入った袋がある。この袋の中から玉を 3 個同時に取り出すとき，赤玉が出ない確率が $\frac{7}{10}$ であるという。袋の中に白玉は何個入っているか。

3 10 本のくじの中に，当たりくじが 3 本入っている。このくじを 3 本同時に引くとき，次の確率を求めよ。

(1) 3 本ともはずれる確率　(2) 少なくとも 1 本は当たる確率

4 3 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 出た目の最小値が 3 以上である確率

(2) 出た目の最小値が 3 である確率

5 A，B 2 社が同じ製品を製造している。A 社は全製品の 60 %，B 社は全製品の 40 % を生産している。また，A 社の製品中には 3 %，B 社の製品中には 6 % の不良品が混じっているという。全製品の中から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) それが不良品である確率

(2) 不良品であったときに，それが A 社の製品である確率

Standard問題

6 サイコロを続けて4回投げ，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目をそれぞれ a，b，c，d とする。次の問に答えよ。

(1) $a<b<c<d$ となる確率を求めよ。

(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる確率を求めよ。

7 箱に 2 個の赤い玉と $(n-2)$ 個の白い玉が入っている $(n=4, 5, 6, \cdots\cdots)$。

(1) 箱から 3 個の玉を同時に取り出すとき，2 個が白，1 個が赤となる確率 $P(n)$ を求めよ。

(2) (1) の $P(n)$ が最大になる n を求めよ。

8 硬貨を何回か投げ，先に表が 2 回出ると A の勝ちとし，先に裏が 4 回出ると B の勝ちとするゲームを考える。次の確率を求めよ。

(1) 5 回目に B が勝つ確率　(2) A，B それぞれの勝つ確率

$\boxed{9}$ 次の確率を求めよ.

(1)　2 人でジャンケンをするとき，2 回続けてアイコになる確率

(2)　3 人で 1 回 ジャンケンをして，1 人の勝者が決まる確率

(3)　5 人で 1 回ジャンケンをして，3 人の勝者が決まる確率

(4)　5 人で 1 回ジャンケンをして，複数の敗者がでて，複数の勝者が残り，次にその勝者のみで 2 回目のジャンケンをして，1 人の勝者が決まる確率

実戦問題

$\boxed{10}$ 4 つのさいころを同時に振るとき，次の確率を求めよ。

(1)　4 つとも同じ目が出る確率

(2)　3 つのさいころに同じ目が出て，他の 1 つにはその目と異なる目が出る確率

(3)　2 つの異なる目がそれぞれ 2 つずつ出る確率

(4)　2 つのさいころに同じ目が出て，他の 2 つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率

(5)　連続した 4 つの自然数の目が出る確率

$\boxed{11}$ 数直線上を点 P が 1 ステップごとに，$+1$ または -1 だけそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。数直線上の値が 3 の点を A として，P が A にたどり着くと停止する。

(1)　P が原点 O から出発して，ちょうど 5 ステップで A にたどり着く確率を求めよ。

(2)　P が原点 O から出発して，ちょうど 6 ステップで値が 2 の点 B にたどり着く確率を求めよ。

(3)　P が原点 O から出発して，8 ステップ以上移動する確率を求めよ。

$\boxed{12}$ 正四面体 ABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し，1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻 0 から時刻 n までの間に，4 頂点 A，B，C，D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ。ただし，n は 1 以上の整数とする。

$\boxed{1}$ 解答　(1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{1}{10}$

$\boxed{2}$ 解答　9 個

$\boxed{3}$ 解答　(1) $\dfrac{7}{24}$　(2) $\dfrac{17}{24}$

$\boxed{4}$ 解答　(1) $\dfrac{8}{27}$　(2) $\dfrac{37}{216}$

$\boxed{5}$ 解答　(1) $\dfrac{21}{500}$　(2) $\dfrac{3}{7}$

$\boxed{6}$ 解答　(1) $\dfrac{5}{432}$　(2) $\dfrac{7}{72}$

$\boxed{7}$ 解答　(1) $P(n)=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$　(2) $\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=\dfrac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$，$n=5$　(3) $n=5$，6

$\boxed{8}$ 解答　(1) $\dfrac{1}{8}$　(2) 順に $\dfrac{13}{16}$，$\dfrac{3}{16}$

$\boxed{9}$ 解答　(1) $\dfrac{1}{9}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{10}{81}$　(4) $\dfrac{10}{81}$

$\boxed{10}$ 解答　(1) $\dfrac{1}{216}$　(2) $\dfrac{5}{54}$　(3) $\dfrac{5}{72}$　(4) $\dfrac{5}{9}$　(5) $\dfrac{1}{18}$

$\boxed{11}$ 解答　(1) $\dfrac{3}{32}$　(2) $\dfrac{9}{64}$　(3) $\dfrac{91}{128}$

$\boxed{12}$ 解答　$1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{1}$ 5 人全員の並び方は　5! 通り

(1)　女子 2 人を 1 組と考えると，この 1 組と男子 3 人の並び方は　4! 通り

また，1 組にした女子 2 人の並び方は　2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4!\times 2}{5!}=\dfrac{2}{5}$

(2)　男女が交互に並ぶのは，男女男女男 となる場合である。

男子 3 人の並び方は　3! 通り，　女子 2 人の並び方は　2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3!\times 2}{5!}=\dfrac{2}{5\cdot 4}=\dfrac{1}{10}$

$\boxed{2}$ 白玉が n 個入っているとする。$(1\leqq n\leqq 10)$

起こりうる場合の総数は　${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り

赤玉が出ない場合は，白玉を 3 個取り出す場合であるから，その総数は　${}_n\mathrm{C}_3$ 通り

よって　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{10}$

ゆえに $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{7}{10}$

したがって $n(n-1)(n-2)=9\cdot 8\cdot 7$

$1\leqq n\leqq 10$ である自然数のうち，この等式を満たすものは $n=9$

よって，白玉は 9 個入っている。

$\boxed{3}$ (1) 「3 本ともはずれる」という事象を A とする。

くじを 3 本同時に引く方法は ${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ (通り)

3 本ともはずれる場合は ${}_{7}C_3=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$ (通り)

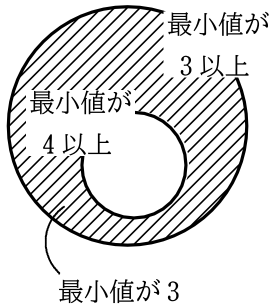
よって $P(A)=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$

(2) 「少なくとも 1 本は当たる」という事象を B とすると，余事象 $\overline{B}$ は，「3 本とも当たらない」，すなわち「3 本ともはずれる」という事象 A であるから $P(\overline{B})=P(A)$

よって，求める確率は $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A)=1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

$\boxed{4}$ (1) 出た目の最小値が 3 以上であるのは，3 個とも 3 以上の目が出る場合であるから，求める確率は $\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{8}{27}$

(2) 出た目の最小値が 4 以上であるのは，3 個とも 4 以上の目が出る場合である。



このときの確率は $\dfrac{3^3}{6^3}$

よって，出た目の最小値が 3 である確率は

$$\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$$

$\boxed{5}$ A 社の製品であるという事象を A，B 社の製品であるという事象を B，不良品であるという事象を E とする。

このとき，A と B は互いに排反であり

$$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ P_A(E)=\frac{3}{100},\ P_B(E)=\frac{6}{100}$$

(1) 取り出した 1 個が不良品であるという事象は，次の 2 つの事象の和事象である。

[1] 不良品が A 社の製品の場合

その確率は $P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{100}=\dfrac{9}{500}$

[2] 不良品が B 社の製品の場合

その確率は　$P(B\cap E)=P(B)P_B(E)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{6}{100}=\dfrac{12}{500}$

[1], [2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(E)=\frac{9}{500}+\frac{12}{500}=\frac{21}{500}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{9}{500}\div\frac{21}{500}=\frac{3}{7}$$

$\boxed{6}$ すべての目の出方は 6^4 通り

(1) $a<b<c<d$ を満たす目の出方は，1～6から4つの目を選ぶ方法であり，

${}_6C_4=15$ 通り。よって，求める確率は　$\dfrac{15}{6^4}=\dfrac{5}{432}$

(2) $a\leqq b\leqq c\leqq d$ を満たす目の出方は，1～6の目の出る回数の定め方である。
それは，1, 2, 3, 4, 5, 6 がそれぞれ x, y, z, u, v, w 回出るとすると
$x+y+z+u+v+w=4$　（x, y, z, u, v, w は非負整数）　を満たすような
$(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w)$ の組数である。これは4つの ◯ を6人で分ける＝5か所で仕切る方法，
つまり◯4つ，｜5つを並べる方法と同じ。

${}_9C_4=126$ 通り。よって，求める確率は　$\dfrac{126}{6^4}=\dfrac{7}{72}$

$\boxed{7}$ (1)　玉は全部で n 個あるから，3 個の玉の取り出し方は　${}_nC_3$ 通り。

2 個の白玉と 1 個の赤玉の取り出し方は　${}_{n-2}C_2\times{}_2C_1$（通り）

よって　$P(n)=\dfrac{{}_{n-2}C_2\times{}_2C_1}{{}_nC_3}=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\times2\div\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$

(2)　(1) より $P(n+1)=\dfrac{6\{(n+1)-3\}}{(n+1)\{(n+1)-1\}}=\dfrac{6(n-2)}{(n+1)n}$ であるから

$$\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{6(n-2)}{(n+1)n}\cdot\frac{n(n-1)}{6(n-3)}=\frac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n-3)}=\frac{n^2-3n+2}{n^2-2n-3}$$

$\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=1$ となるのは　$n^2-3n+2=n^2-2n-3$　　よって　$n=5$　のとき。

$n^2-3n+2-(n^2-2n-3)=5-n$ であるから

$n=4$ のとき　$n^2-3n+2>n^2-2n-3$，$n=5$ のとき　$n^2-3n+2=n^2-2n-3$，

$n\geqq6$ のとき　$n^2-3n+2<n^2-2n-3$

よって　$\dfrac{P(5)}{P(4)}>1$，$\dfrac{P(6)}{P(5)}=1$，$\dfrac{P(7)}{P(6)}<1$，$\dfrac{P(8)}{P(7)}<1$，……

すなわち　$P(4)<P(5)=P(6)>P(7)>P(8)>\cdots\cdots$

したがって，$P(n)$ が最大となる n は　$n=5,\ 6$

$\boxed{8}$ (1)　4回目までに表が1回，裏が3回出て，5回目に裏が出る場合である。

よって，求める確率は　${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2)　Bが勝つのは，4回目に勝つ場合と，5回目に勝つ場合がある。

Bが4回目に勝つのは，裏が4回続けて出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

Bが5回目に勝つ確率は，(1)から　$\frac{1}{8}$

よって，Bが勝つ確率は　$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

このゲームに引き分けはないから，Aが勝つ確率は　$1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

$\boxed{9}$ (1)　2人の1回のジャンケンの手の出し方は3^2通り．

1回ジャンケンをしてアイコになる場合は3通り．

よって，1回のジャンケンでアイコになる確率は　$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

ゆえに，2回続けてアイコになる確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(2)　3人のジャンケンの手の出し方は3^3通り．

勝者の決まり方は${}_3C_1$通りであり，勝者の手の出し方は3通りであるから，1人の勝者が決まる場合は${}_3C_1\times3$通り．

ゆえに　$\frac{{}_3C_1\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$

(3)　5人のジャンケンの手の出し方は3^5通り．

勝者の決まり方は${}_5C_3$通りであり，勝者の手の出し方は3通りであるから，3人の勝者が決まる場合は${}_5C_3\times3$通り．

ゆえに　$\frac{{}_5C_3\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

(4)　[1]　1回目の勝者が3人で，2回目に1人の勝者が決まる確率は，(2)，(3)から

$$\frac{10}{81}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{243}$$

[2]　1回目の勝者が2人となる確率は　$\frac{{}_5C_2\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

残った2人から1人の勝者が決まる確率は　$\frac{{}_2C_1\times3}{3^2}=\frac{2}{3}$

ゆえに，1回目の勝者が2人で，2回目に1人の勝者が決まる確率は

$$\frac{10}{81}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{243}$$

[1]，[2] から　$\frac{10}{243}+\frac{20}{243}=\frac{30}{243}=\frac{10}{81}$

10　4 つのさいころの目の出方は，全部で　6^4 通り

(1)　4 つとも同じ目が出る場合は，

$(1,\ 1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 2)$，……，$(6,\ 6,\ 6,\ 6)$

の 6 通りある。

よって，求める確率は　$\frac{6}{6^4}=\frac{1}{216}$

(2)　同じ目が出る 3 つのさいころを選ぶ方法は　${}_4C_3=4$ (通り)

その目の選び方は　6 通り

そのおのおのについて，残り 1 つのさいころの目の出方は　5 通り

よって，求める確率は　$\frac{4\times6\times5}{6^4}=\frac{5}{54}$

(3)　2 つの異なる目を選ぶ方法は　${}_6C_2=15$ (通り)

選んだ 2 つの目のうち一方の目が出る 2 つのさいころの選び方は　${}_4C_2=6$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{15\times6}{6^4}=\frac{5}{72}$

(4)　同じ目が出る 2 つのさいころを選ぶ方法は　${}_4C_2=6$ (通り)

その目の選び方は　6 通り

そのおのおのについて，残り 2 つのさいころの目の出方は　${}_5P_2=5\cdot4=20$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{6\times6\times20}{6^4}=\frac{5}{9}$

(5)　連続した 4 つの自然数となる目の組合せは

$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 3,\ 4,\ 5)$，$(3,\ 4,\ 5,\ 6)$

の 3 通りがあり，目の出方はこの各組の順列であるから　${}_4P_4\times3=4!\times3$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{4!\times3}{6^4}=\frac{1}{18}$

11 (1)　右の図のように，ステップの数を横軸に，点Ｐの数直線上の値を縦軸にとったとき，点Ｐが

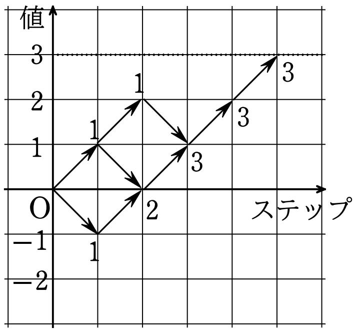
$+1$ だけ進むことは ↗，

-1 だけ進むことは ↘

が対応する。

ちょうど５ステップで値が３の点Ａにたどり着くのは図の実線の経路を通る場合で，全部で

３通り



１つの経路を通る確率は $\dfrac{1}{2^5}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2^5}\times 3=\frac{3}{32}$$

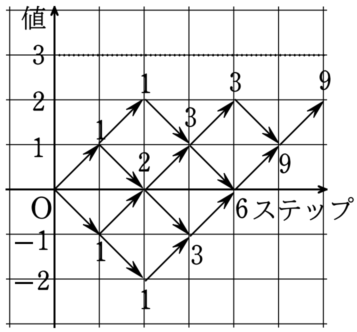
(2)　ちょうど６ステップで値が２の点Ｂにたどり着くのは，５ステップで値が１の点にたどり着いている場合である。

この場合の数は，右の図から全部で

９通り

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2^6}\times 9=\frac{9}{64}$$



(3)　８ステップ以上移動する事象は，７ステップ以下でＡにたどり着く場合の余事象である。

Ａにたどり着くのはステップが奇数回のときであるから，７ステップ以下なら次の [1]～[3] のいずれかになる。

[1]　３ステップでＡにたどり着く。

$+1$ が３回続く場合であるから，この確率は　$\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

[2]　５ステップでＡにたどり着く。

この確率は (1) から　$\dfrac{3}{32}$

[3]　７ステップでＡにたどり着く。

６ステップで値が２の点にたどり着いているから，この確率は (2) から

$$\frac{9}{64}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{128}$$

以上から，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{32}+\dfrac{9}{128}\right)=\dfrac{91}{128}$

12　時刻 1 で点 B，C，D に動く確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$

時刻 1 で点 B に動く場合，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は

$$\begin{aligned}&1-(\text{C または D に行かない確率})\\&=1-\{(\text{C に行かない確率})+(\text{D に行かない確率})\\&\qquad\qquad\qquad-(\text{C にも D にも行かない確率})\}\\&=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

時刻 1 で点 C，D に動く場合も，時刻 n までの間に 4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は同じである。

以上から，求める確率は　$\dfrac{1}{3}\cdot\left\{1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\times 3=1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

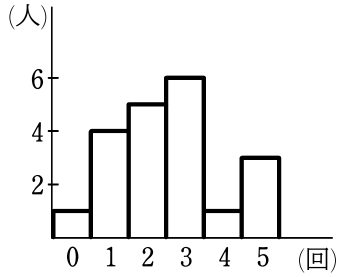
数学①　第８回試験　データの分析

$\boxed{1}$ 次のデータの第１四分位数，第２四分位数，第３四分位数を求めよ。

(1)　12，35，47，59，68，73，74，79，87，97

(2)　2，7，10，14，22，33，48，71，84，91，96，98

$\boxed{2}$ 右のヒストグラムは，ある高校の生徒 20 人について，ある５日間に校内の売店を利用した回数を調べた結果である。



(1)　利用回数の最頻値，中央値を求めよ。

(2)　利用回数の平均値を求めよ。

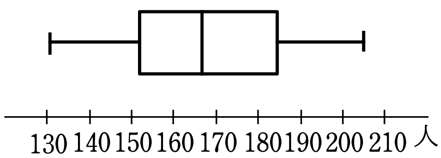
$\boxed{3}$ 次のデータは，ある 10 人の生徒の数学のテストの得点である。ただし，a の値は 0 以上の整数である。

60　74　66　62　82　38　45　41　67　a　(点)

(1)　a の値がわからないとき，このデータの中央値として何通りの値があり得るか。

(2)　このデータの平均値が 60.0 点のとき，このデータの中央値を求めよ。

$\boxed{4}$ 右の図は，ある店の 30 日間にわたる来客数のデータの箱ひげ図である。
この箱ひげ図から読み取れることとして正しいものを，次の ① ～ ③ から１つ選べ。



①　来客数 150 人以上 180 人未満のところには，半分以上の日が分布している。

②　来客数が 160 人以上の日が 15 日以上あった。

③　少なくとも２日は，来客数が 200 人以上である。

$\boxed{5}$ 次のデータは，あるパズルに挑戦した 10 人について，完成させるまでにかかった時間 x(分) をまとめたものである。ただし，x のデータの平均値を $\overline{x}$ で表し，20 分を超えた人はいなかったものとする。次の問いに答えよ。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
x	13	a	7	3	11	18	7	b	16	3
$(x-\overline{x})^2$	4	c	16	64	0	d	16	1	25	64

(1)　a，b，c，d の値を求めよ。

(2)　x のデータの分散と標準偏差を求めよ。ただし，小数第２位を四捨五入せよ。

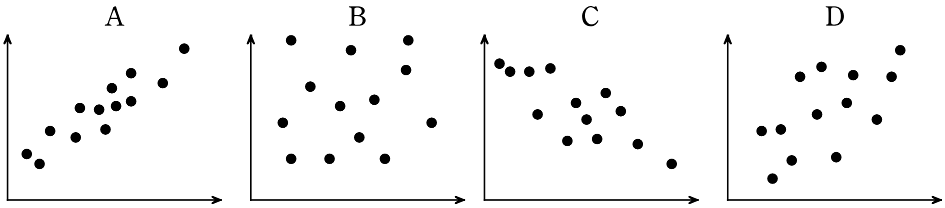
$\boxed{6}$ 下の A ～ D の散布図と対応する相関係数 r の値の組について適当なものを，次の ① ～ ④ の中から選べ。

① A：$r=0.8$　B：$r=0.6$　C：$r=-0.6$　D：$r=0.9$

② A：$r=0.9$　B：$r=0.1$　C：$r=-0.8$　D：$r=0.6$

③ A：$r=0.8$　B：$r=-0.1$　C：$r=0.7$　D：$r=0.7$

④ A：$r=-0.9$　B：$r=-0.1$　C：$r=0.8$　D：$r=0.8$



$\boxed{7}$ 下の表は，10 人の生徒に 30 点満点の 2 種類のテスト A，B を行った得点の結果である。テスト A，B の得点をそれぞれ x，y とするとき，x と y の相関係数 r を求めよ。ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	29	25	22	28	18	23	26	30	30	29
y	23	23	18	26	17	20	21	20	26	26

$\boxed{8}$ 30 個の値からなるデータがあり，そのうちの 20 個の値の平均値は 7，分散は 5，残り 10 個の値の平均値は 4，分散は 8 である。

(1)　このデータ全体の平均値を求めよ。　　(2)　このデータ全体の分散を求めよ。

$\boxed{9}$ n 個の値の組として与えられている 2 つの変量 X，Y に対し，新たな変量 X'，Y' を $X'=aX+b$，$Y'=cY+d$ (a，b，c，d は定数で，$a \fallingdotseq 0$，$c \fallingdotseq 0$) によって定義する。次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ⑦ のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ。

(1)　X' の分散は，X の分散の $\boxed{\text{ア}}$ 倍になる。

(2)　X' と Y' の共分散は，X と Y の共分散の $\boxed{\text{イ}}$ 倍である。

(3)　X' と Y' の相関係数は，X と Y の相関係数の $\boxed{\text{ウ}}$ 倍である。

⓪ a　① a^2　② ac　③ $\dfrac{ac}{|ac|}$　④ b　⑤ b^2　⑥ bd　⑦ $|bd|$

$\boxed{1}$ 解答　第1四分位数，第2四分位数，第3四分位数の順に

(1)　70.5，47，79　　(2)　40.5，12，87.5

$\boxed{2}$ 解答　(1)　最頻値3回，中央値2.5回　　(2)　2.55回

$\boxed{3}$ 解答　(1)　7通り　　(2)　63.5点

$\boxed{4}$ 解答　②

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$a=20$，$b=12$，$c=81$，$d=49$　　(2)　32，5.6分

$\boxed{6}$ 解答　②

$\boxed{7}$ 解答　0.77

$\boxed{8}$ 解答　(1)　6　　(2)　8

$\boxed{9}$ 解答　(ア)　①　　(イ)　②　　(ウ)　③

$\boxed{1}$ 第1四分位数 Q_1，第2四分位数 Q_2，第3四分位数 Q_3 は，それぞれ次のようになる。

(1)　$Q_2=\dfrac{68+73}{2}=70.5$，$Q_1=47$，$Q_3=79$

(2)　$Q_2=\dfrac{33+48}{2}=40.5$，$Q_1=\dfrac{10+14}{2}=12$，$Q_3=\dfrac{84+91}{2}=87.5$

$\boxed{2}$ (1)　ヒストグラムから，最頻値は　3回

利用回数が少ない方から10番目の生徒の利用回数は2回，11番目の生徒の利用回数は3回である。

よって，中央値は　$\dfrac{1}{2}(2+3)=2.5$ (回)

(2)　平均値は　$\dfrac{1}{20}(0\times1+1\times4+2\times5+3\times6+4\times1+5\times3)=\dfrac{51}{20}=2.55$ (回)

$\boxed{3}$ (1)　人数は10人であるから，小さい方から5番目と6番目の得点の平均値が中央値となる。

a 以外の得点を小さい順に並べると　38，41，45，60，62，66，67，74，82

[1]　$a\leqq60$ のとき

5番目の得点は60点，6番目の得点は62点であるから，中央値は

$$\frac{60+62}{2}=61 \text{ (点)}$$

[2]　$a\geqq66$ のとき

5番目の得点は62点，6番目の得点は66点であるから，中央値は

$$\frac{62+66}{2}=64 \text{ (点)}$$

[3]　$61\leqq a\leqq65$ のとき

5番目と6番目の得点は a 点と62点であるから，中央値は　$\dfrac{a+62}{2}$ (点)

これは，a の値によってすべて異なる。

ゆえに，中央値は，$2+(65-61+1)=7$ (通り) の値があり得る。

(2)　得点の平均値が60.0点であるとき

$$\frac{1}{10}(38+41+45+60+62+66+67+74+82+a)=60.0$$

これを解いて　　$a=65$

$61 \leqq a \leqq 65$ であるから，得点の中央値は　　$\dfrac{65+62}{2}=63.5$ (点)

$\boxed{4}$ ①　第 1 四分位数は 150 人以上であるが，第 3 四分位数は180 人より大きいから，150 人以上 180 人未満のところに半分以上の日が分布していることは読み取れない。

よって，① は正しくない。

②　中央値が 160 人以上であるから，半分以上の日にちで来客数が 160 人以上であることが読み取れる。

よって，② は正しい。

③　最大値が 200人以上であるから，200人以上の日が少なくとも 1 日あることが読み取れるが，2日あるかどうかは読み取れない。

よって，③ は正しくない。

以上から，正しいものは ②

$\boxed{5}$ (1)　番号 5 のデータに着目すると，$(11-\overline{x})^2=0$ であるから，平均値 $\overline{x}$ は 11 (分)

x のデータの総和は　$11 \times 10=110$

よって　　$13+a+7+3+11+18+7+b+16+3=110$

したがって　　$a=32-b$

(3)　番号 6 のデータに着目すると，

$d=(18-11)^2=7^2=49$

番号 8 のデータに着目すると，$(b-11)^2=1$ より　　$b-11=\pm 1$

よって　　$b=12$ または $b=10$

$b=12$ のとき，$a=32-12=20$ となり，$a \leqq 20$ に適する。

$b=10$ のとき，$a=32-10=22$ となり，$a \leqq 20$ に適さない。

よって　　$a=20$，$b=12$

$c=(20-11)^2=9^2=81$

したがって　　$a=20$，$b=12$，$c=81$，$d=49$

(4)　偏差の 2 乗の和は

$4+81+16+64+0+49+16+1+25+64=320$

よって，分散は　$\dfrac{1}{10} \times 320=32$

標準偏差は　$\sqrt{32}=4\sqrt{2} \fallingdotseq 5.6$ (分)

$\boxed{6}$ A と D の散布図では，正の相関関係があるから　　$r>0$

また，その傾向は A の方が著しいから，A の相関係数の方が D の相関係数よりも 1 に近い。

C の散布図では，負の相関関係があるから　　$r<0$

B の散布図では，相関が認められないから，相関係数は 0 に近い。

したがって　　②

$\boxed{7}$ x，y の平均をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{10}(29+25+22+28+18+23+26+30+30+29)=26$$

$$\overline{y}=\frac{1}{10}(23+23+18+26+17+20+21+20+26+26)=22$$

よって，次の表が得られる。

番号	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	3	1	9	1	3
2	-1	1	1	1	-1
3	-4	-4	16	16	16
4	2	4	4	16	8
5	-8	-5	64	25	40
6	-3	-2	9	4	6
7	0	-1	0	1	0
8	4	-2	16	4	-8
9	4	4	16	16	16
10	3	4	9	16	12
計			144	100	92

ゆえに　　$r=\dfrac{92}{\sqrt{144\times100}}=\dfrac{92}{12\times10}\fallingdotseq0.77$

$\boxed{8}$ (1)　30 個の値の和は　　$7\times20+4\times10=180$

よって，このデータ全体の平均値は　　$\dfrac{180}{30}=6$

(2)　20 個の値の 2 乗の平均値を a とすると　　$a-7^2=5$　　よって　$a=54$

残りの 10 個の値の 2 乗の平均値を b とすると　$b-4^2=8$　　よって　$b=24$

よって，30 個の値の 2 乗の和は　　$a\times20+b\times10=54\times20+24\times10=1320$

したがって，このデータ全体の分散は　　$\dfrac{1320}{30}-6^2=44-36=8$

$\boxed{9}$ X，Y，X'，Y' のそれぞれについて，

平均値を $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{X'}$，$\overline{Y'}$，

分散を　$s_X{}^2$，$s_Y{}^2$，$s_{X'}{}^2$，$s_{Y'}{}^2$　とする。

また，X と Y の共分散を s_{XY}，相関係数を r，X' と Y' の共分散を $s_{X'Y'}$，相関係数を r' とする。

(1)　$s_{X'}{}^2=a^2s_X{}^2$ が成り立つから，X' の分散は，X の分散の a^2 倍になる。　(ア ①)

(2)　$s_{X'Y'}=acs_{XY}$ が成り立つから，X' と Y' の共分散は，X と Y の共分散の ac 倍である。　(イ ②)

(3)　$r'=\dfrac{s_{X'Y'}}{s_{X'}s_{Y'}}=\dfrac{acs_{XY}}{|a|s_X\cdot|c|s_Y}=\dfrac{ac}{|ac|}r$

よって，X' と Y' の相関係数は，X と Y の相関係数の $\dfrac{ac}{|ac|}$ 倍である。　(ウ ③)

参考　(変量の変換)

変量 X，Y が，n 個の値の組 $(X_1,\ Y_1)$，$(X_2,\ Y_2)$，……，$(X_n,\ Y_n)$ であるとし，

$k=1$，……，n に対して，$X_k'=aX_k+b$，$Y_k'=cY_k+d$ が成り立つとき

$$ns_{X'}{}^2=(X_1'-\overline{X'})^2+\cdots\cdots+(X_n'-\overline{X'})^2$$
$$=\{(aX_1+b)-(a\overline{X}+b)\}^2+\cdots\cdots+\{(aX_n+b)-(a\overline{X}+b)\}^2$$
$$=a^2\{(X_1-\overline{X})^2+\cdots\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$
$$=a^2ns_X{}^2$$

よって，$s_{X'}{}^2=a^2s_X{}^2$ が成り立つ。

$$ns_{X'Y'}=(X_1'-\overline{X'})(Y_1'-\overline{Y'})+\cdots\cdots+(X_n'-\overline{X'})(Y_n'-\overline{Y'})$$
$$=\{(aX_1+b)-(a\overline{X}+b)\}\{(cY_1+d)-(c\overline{Y}+d)\}$$
$$+\cdots\cdots+\{(aX_n+b)-(a\overline{X}+b)\}\{(cY_n+d)-(c\overline{Y}+d)\}$$
$$=ac\{(X_1-\overline{X})(Y_1-\overline{Y})+\cdots\cdots+(X_n-\overline{X})(Y_n-\overline{Y})\}$$
$$=acns_{XY}$$

よって，$s_{X'Y'}=acs_{XY}$ が成り立つ。

改・数学②第１回テスト　三角関数　　　　1　/ 12

BASIC問題

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$2\cos\theta \leqq -\sqrt{2}$　　(2)　$-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

3　α，β，γ は鋭角で，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$，$\tan\gamma = 8$ であるとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha + \beta + \gamma)$　　(2)　$\alpha + \beta + \gamma$

4　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

5　次の式の値を求めよ。

(1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$　　(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi - \cos\dfrac{5}{12}\pi$

6　$2\sin 4\theta\cos 2\theta$ を和の形，$\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

Standard問題

7　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

8　関数 $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 1$ の最大値，最小値を求めよ。

9　次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

10　$\theta = 18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

11　次の値を求めよ。

(1)　$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$　　(2)　$\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

実戦問題

12 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$　　(4) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq -\dfrac{1}{2}$

13 a を定数とする。x についての方程式 $\cos^2 x + 2a\sin x - a - 1 = 0$ の $0 \leqq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

14 地上にいる人が，高さ 200 m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50 m の鉄塔を見る。鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか。ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

15 以下の問いに答えよ。必要ならば，等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を利用してよい。

(1) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

16 次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

改・数学②第１回テスト　三角関数

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$　(2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

(3) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{3}$ 解答 (1) 1　(2) $\frac{5}{4}\pi$

$\boxed{4}$ 解答 $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9},\ \cos 2\alpha=\frac{7}{9},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\sqrt{2}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$ 解答 順に　$\sin 6\theta+\sin 2\theta$，$2\cos 4\theta\cos\theta$

$\boxed{7}$ 解答 最大値 5，最小値 3　（後半）$\tan x=\frac{3}{4}$

$\boxed{8}$ 解答 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 $-\frac{1}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 $x=\frac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，$x=\frac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{10}$ 解答 (前半)　略　(後半)　$\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\frac{1}{8}$　(2) 0

$\boxed{12}$ 解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$　(2) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$　(4) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

$\boxed{13}$ 解答 $a<-\frac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個

$\boxed{14}$ 解答 $100\sqrt{5}$ m

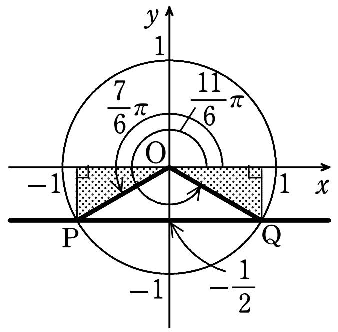
$\boxed{15}$ 解答 (1) 略　(2) $\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$

$\boxed{16}$ 解答 $\angle A=\frac{\pi}{2}$ または $\angle B=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形

1 (1)　直線 $y=-\frac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

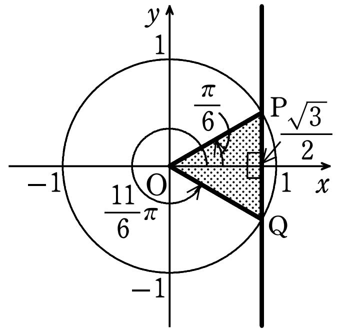
$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$



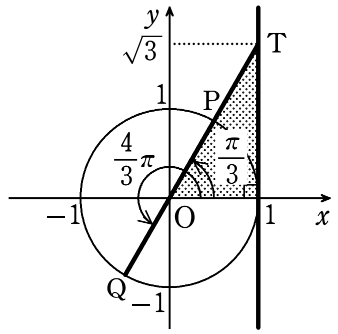
(2)　直線 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$



(3)　点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$



2 (1)　不等式を変形して　　$\cos\theta\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

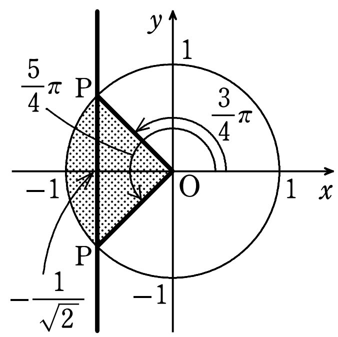
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の

値は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

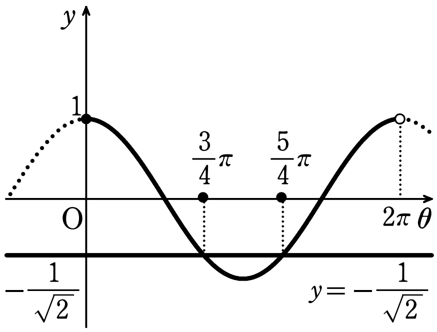
ゆえに，θ の値の範囲は

$$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$



(2)　不等式を変形して　$\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

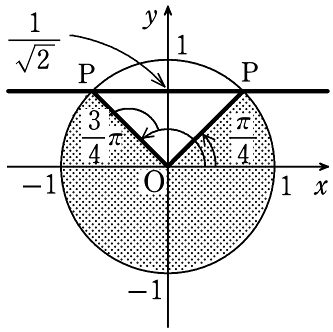
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

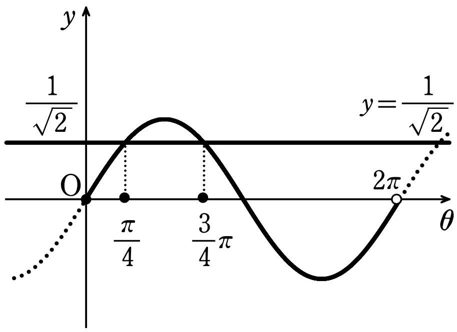
$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



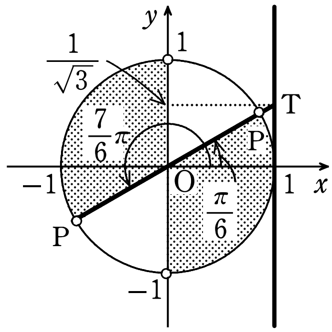
(3)　不等式を変形して　$\tan\theta<\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

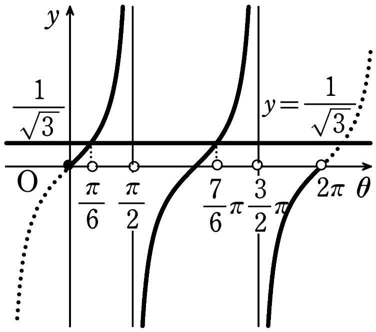


$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y = \tan\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$



3 (1) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+5}{1-2\cdot5} = -\frac{7}{9}$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\} = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 8} = 1$$

(2) α，β，γ は鋭角であるから　$0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{3}{2}\pi$

$\tan(\alpha+\beta) < 0$ であるから，$\alpha+\beta$ は第２象限にある。

さらに，$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\} > 0$ であるから，$(\alpha+\beta)+\gamma$ は第３象限にある。

よって，$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 1$ より　$\alpha+\beta+\gamma = \frac{5}{4}\pi$

4 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから　$\cos\alpha < 0$

ゆえに　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

また　$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

次に　$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\} = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より，$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\frac{\alpha}{2} > 0$

したがって　$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

5 (1) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(2) $\sin\frac{5}{12}\pi - \cos\frac{5}{12}\pi = \sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$ $2\sin 4\theta\cos 2\theta=2\cdot\frac{1}{2}\{\sin(4\theta+2\theta)+\sin(4\theta-2\theta)\}=\sin 6\theta+\sin 2\theta$

$\cos 5\theta+\cos 3\theta=2\cos\frac{5\theta+3\theta}{2}\cos\frac{5\theta-3\theta}{2}=2\cos 4\theta\cos\theta$

$\boxed{7}$ （前半）

$y=3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\alpha)$　　ただし　$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha$ より，$x+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき　最大値　5

$x+\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha$　つまり $x=\frac{\pi}{2}$ のとき　最小値　3

（後半）

$\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{4}$

$\boxed{8}$ $\sin x+\cos x=t$ とおく。

この式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$$

よって　　$2\sin x\cos x=t^2-1$

したがって

$$y=t+(t^2-1)+1=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

また，$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

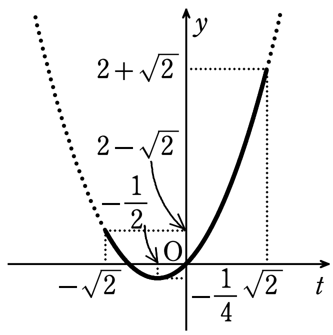
$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots ①$$

① の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，

$t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。



$\boxed{9}$ $y=\frac{1-\cos 2x}{2}+2\cdot\frac{\sin 2x}{2}+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\sin 2x+\cos 2x+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$

$2x+\frac{\pi}{4}=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ から　　$\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{9}{4}\pi$　$\cdots\cdots ①$

① の範囲において，$y=\sqrt{2}\sin t+2$ は

$t=\frac{\pi}{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$t=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

$t=\frac{\pi}{2}$ のとき $x=\frac{\pi}{8}$，$t=\frac{3}{2}\pi$ のとき $x=\frac{5}{8}\pi$ であるから，この関数は

$x=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$x=\dfrac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

10 $\theta=18^\circ$ のとき　$5\theta=90^\circ$　よって，$2\theta+3\theta=90^\circ$ より，$2\theta=90^\circ-3\theta$ であるから

$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ であるから

$$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ であるから　$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$　これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

参考　3 倍角の公式　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

[証明]　$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$
$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$
$$=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$$

11 (1)　$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cos 80^\circ$

$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 80^\circ$$
$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)$$
$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}\cos(180^\circ-80^\circ)+\frac{1}{8}$$
$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ-\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

(2)　$\sin 20^\circ+\sin 140^\circ+\sin 260^\circ=(\sin 20^\circ+\sin 260^\circ)+\sin 140^\circ$

$$=2\sin 140^\circ\cos 120^\circ+\sin 140^\circ$$
$$=-\sin 140^\circ+\sin 140^\circ=0$$

12 (1)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{3} < 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$　　すなわち　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t=-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$　　すなわち　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{3} < 2\cdot 2\pi+\dfrac{\pi}{3}$　　すなわち　$\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{13}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi,\ \dfrac{25}{6}\pi$

すなわち　$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi,\ \dfrac{25}{6}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

(3)　$\theta-\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\tan t>1$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{6} < 2\pi-\dfrac{\pi}{6}$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq t < \dfrac{11}{6}\pi$　……①

この範囲で，① を解くと　$\dfrac{\pi}{4} < t < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi < t < \dfrac{3}{2}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4} < \theta-\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi < \theta-\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\dfrac{5}{12}\pi < \theta < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi$

(4)　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t \leqq -\dfrac{1}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} < 2\cdot 2\pi+\dfrac{\pi}{6}$

すなわち　$\dfrac{\pi}{6} \leqq t < \dfrac{25}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　$\dfrac{7}{6}\pi \leqq t \leqq \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{19}{6}\pi \leqq t \leqq \dfrac{23}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{7}{6}\pi \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{19}{6}\pi \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{23}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{11}{6}\pi$

13　$\sin x=t$ とおくと，方程式は　$(t-a)^2-a^2+a=0$
また，$0 \leqq x < 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

よって，$f(t)=(t-a)^2-a^2+a=0$ の $-1\leqq t\leqq 1$ における実数解の個数を調べればよい。ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\fallingdotseq\pm1$ であれば 2 つあり，$t=\pm1$ であれば 1 つある。

[1]　$f(1)=-a+1=0$ のとき

$a=1$ であるから　　$f(t)=(t-1)^2$

よって，$f(t)=0$ は重解 $t=1$ をもつ。したがって，x の実数解は 1 個。

[2]　$f(-1)=3a+1=0$ のとき

$a=-\dfrac{1}{3}$ であるから　　$f(t)=\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}$

$f(t)=0$ すなわち $t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0$ を解くと　$t=-1,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，x の実数解は 3 個。

[3]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 2 つもつとき

$$\begin{cases} -1<a<1 \text{ かつ } -a^2+a<0 \text{（頂点の位置から）} \\ f(1)=-a+1>0 \\ f(-1)=3a+1>0 \end{cases}$$

この連立不等式を解くと　　$-\dfrac{1}{3}<a<0$

このとき，x の実数解は 4 個。

[4]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 1 つもつとき

このときは，次の (ア) か (イ) のどちらかである。

（ア）　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に重解をもつ。

（イ）　$f(1)f(-1)<0$

(ア) のとき，$-a^2+a=0$ を満たすから　　$a=0,\ 1$

$a=0$ のとき $f(t)=t^2$ であるから，確かに重解 $t=0$ を $-1<t<1$ にもつ。

このとき，x の実数解は 2 個。

$a=1$ のとき $f(t)=(t-1)^2$ であるから，$-1<t<1$ には解をもたない。

(イ) のとき　　$(-a+1)(3a+1)<0$

よって　　　$a<-\dfrac{1}{3},\ 1<a$

このとき，x の実数解は 2 個。

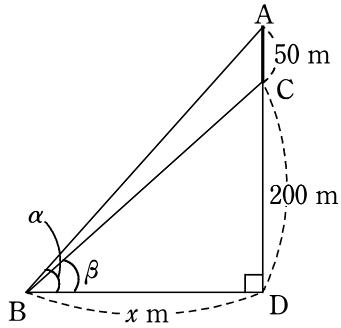
まとめると　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき 4 個，　$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき 3 個，

$a<-\dfrac{1}{3},\ a=0,\ 1<a$ のとき 2 個，

$a=1$ のとき 1 個，　$0<a<1$ のとき 0 個

以上より，解が2個となる条件は　$a<-\dfrac{1}{3},\ a=0,\ 1<a$

14 人がビルから x m 離れているとする。



また，ビルの下端を D とし，右の図のように，

$\angle ABD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$ とすると

$$\tan\alpha=\frac{250}{x},\ \tan\beta=\frac{200}{x}$$

したがって

$$\tan\angle ABC=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{250}{x}-\dfrac{200}{x}}{1+\dfrac{250}{x}\cdot\dfrac{200}{x}}=\frac{\dfrac{50}{x}}{1+\dfrac{50000}{x^2}}$$

$$=\frac{50}{x+\dfrac{50000}{x}}$$

$x>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{50000}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{50000}{x}}=200\sqrt{5}$$

等号が成り立つのは，$x=\dfrac{50000}{x}$ かつ $x>0$，すなわち $x=100\sqrt{5}$ のときである。

$0<\angle ABC<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\tan\angle ABC$ が最大のとき，$\angle ABC$ も最大である。

したがって，人がビルから $100\sqrt{5}$ m 離れたとき，$\angle ABC$ は最大となる。

15 参考 $\cos3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta$

$$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

(1) $(2\cos80^\circ)^3-3\cdot2\cos80^\circ+1$

$$=8\cos^3 80^\circ-6\cos80^\circ+1=2(4\cos^3 80^\circ-3\cos80^\circ)+1$$

$$=2\cos(3\times80^\circ)+1=2\cos240^\circ+1=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

よって，$2\cos80^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の解である。

(2) $(2\cos\theta)^3-3\cdot2\cos\theta+1=0$

$$\Longleftrightarrow 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1=0$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos3\theta+1=0\Longleftrightarrow\cos3\theta=-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，① を満たす θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ を求めると，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ であるから

$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ$　　よって　$\theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ゆえに，$2\cos40^\circ$，$2\cos160^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の $2\cos80^\circ$ 以外の 2 つの解である。

$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$

16 $A+B+C=\pi$ ……① であるから　$A+B=\pi-C$

よって　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

また　$\sin C=\sin\left(2\cdot\dfrac{C}{2}\right)=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

ゆえに，等式 $\cos A+\cos B=\sin C$ から　$2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\sin\dfrac{C}{2}\neq 0$ であるから　$\cos\dfrac{A-B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

この等式を更に変形すると　$\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{C}{2}=0$

$$-2\sin\frac{A-B+C}{4}\sin\frac{A-B-C}{4}=0$$

$$\sin\frac{(A+C)-B}{4}\sin\frac{A-(B+C)}{4}=0 \quad \text{……②}$$

A，B，C は三角形の内角であるから

$0<A+C<\pi$，$0<B<\pi$

したがって，$-\pi<(A+C)-B<\pi$ から

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{(A+C)-B}{4}<\frac{\pi}{4}$$

同様に考えて　$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{A-(B+C)}{4}<\dfrac{\pi}{4}$

よって，② から

$\dfrac{(A+C)-B}{4}=0$　すなわち　$A-B+C=0$　……③

$\dfrac{A-(B+C)}{4}=0$　すなわち　$A-B-C=0$　……④

①−③ から　$2B=\pi$　すなわち　$B=\dfrac{\pi}{2}$

①＋④ から　$2A=\pi$　すなわち　$A=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，△ABC は，∠A が直角または ∠B が直角の直角三角形である。

改・数学②第２回テスト　指数対数　　　１　／　９

BASIC問題

1 (1) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}$ を簡単にせよ。

2 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　　(2)　2^{30}，3^{20}，10^{10}

3 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

4 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

5 (1)　$\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2)　$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

6 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

7

Standard問題篇

8 $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

9 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2^x-24\cdot 2^{-x}=5$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3}>\dfrac{2}{81}$

10 次の不等式を解け。

(1)　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$　　　(2)　$2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq 2$

(3)　$2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

11 ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

12 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x-3^y=-27 \\ \log_2(x+1)-\log_2(y+3)=-1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})-10$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x\neq 1$ とする。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $3\sqrt[3]{3}$ (2) 12

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (2) $2^{30}<3^{20}<10^{10}$

$\boxed{3}$ 解答 順に 7，$\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ 解答 3

$\boxed{5}$ 解答 (1) $3a$ (2) $\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

$\boxed{6}$ 解答 8 枚

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{1}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $x=3$ (2) $x<1$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $1<x\leqq 2$ (2) $4<x\leqq 19$ (3) $\dfrac{1}{3}<x<9$

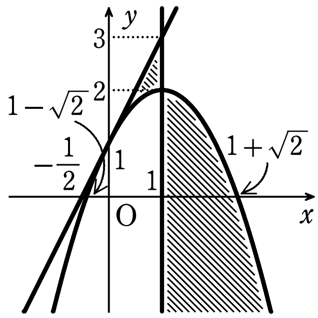
$\boxed{11}$ 解答 $n=72$，末尾の数字は 6

$\boxed{12}$ 解答 (ア) 58 (イ) 2

$\boxed{13}$ 解答 $x=3$，$y=5$

$\boxed{14}$ 解答 $y=-t^2+8t-8$，$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値 8

$\boxed{15}$ 解答 〔図〕 境界線を含まない



$\boxed{1}$ $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=3\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^{2\times 3}\times 3^{2\times 3}}{(2\times 3)^5\times(2^2)^2}\times\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}\times 2}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^6\times 3^6}{2^5\times 3^5\times 2^4}\times\frac{2^3}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}+2+6+3-5-4-\frac{3}{2}}\times 3^{6-5}=2^2\times 3^1=12$$

$\boxed{2}$ (1)　3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\ (\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9,\ (\sqrt[6]{7})^6=7$$

$7<8<9$ であるから　$(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　ゆえに　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

$7<8<9$ であるから　$7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　すなわち　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$8<9<10$ であるから　$8^{10}<9^{10}<10^{10}$　すなわち　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

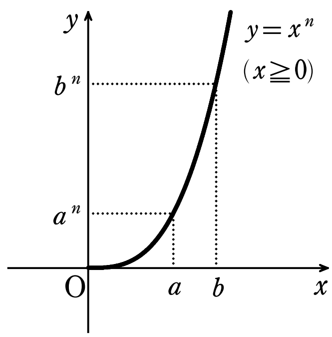
注意　解答では，次の事柄を使っている。

[1]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^n<b^n$$

[2]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$$



$\boxed{3}$ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\left(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)^2=x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}>0$ であるから　$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}=\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ $\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}=\log_3\left(49^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\div\frac{4}{9}\right)=\log_3\left\{(7^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right\}$

$=\log_3\left(7\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$

$\boxed{5}$ (1) $\log_{25}64=\dfrac{\log_5 64}{\log_5 25}=\dfrac{6\log_5 2}{2}=3\log_5 2=3a$

(2) $\log_6 84=\dfrac{\log_2(2^2\times3\times7)}{\log_2(2\times3)}=\dfrac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで　$\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 7=ab$　　よって　$\log_6 84=\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

$\boxed{6}$ 1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから，n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る.

よって，求める条件は　$0.3^n<1-0.9999$　すなわち　$0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

ゆえに　$n(\log_{10}3-1)<-4$ から　$n(-0.5229)<-4$

よって　$n>\dfrac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$　　したがって　8 枚.

$\boxed{7}$

$\boxed{8}$ $5^x=7^y=35^4$ から　$\log_{10}5^x=\log_{10}7^y=\log_{10}35^4$

よって　$x\log_{10}5=y\log_{10}7=4\log_{10}35$

したがって　$x=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}5}$，$y=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}7}$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}5+\log_{10}7}{4\log_{10}35}=\dfrac{\log_{10}35}{4\log_{10}35}=\dfrac{1}{4}$

$\boxed{9}$ (1) 方程式の両辺に 2^x (>0) を掛けて　$(2^x)^2-24=5\cdot2^x$

ゆえに　$(2^x)^2-5\cdot2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-5t-24=0$

よって　$(t+3)(t-8)=0$　　$t>0$ であるから　$t=8$

ゆえに　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(2) 不等式を変形すると　$\dfrac{1}{9}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\dfrac{2}{81}>0$

両辺に 81 を掛けて　$9\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2>0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$9t^2+3t-2>0$

よって　$(3t-1)(3t+2)>0$

$3t+2>0$ であるから　$3t-1>0$　すなわち　$t>\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x < 1$

10 (1)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より　$1<x<3$ ……①

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) = \dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2\frac{1}{2}} = -\log_2(3-x)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-1) - \log_2(3-x) \leqq 0$$

ゆえに　$\log_2(x-1) \leqq \log_2(3-x)$

底 2 は 1 より大きいから　$x-1 \leqq 3-x$

よって　$x \leqq 2$ ……②

①，② から，解は　$1 < x \leqq 2$

(2)　真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $x+6>0$ より　$x>4$ ……①

不等式から　$\log_3(x-4)^2 \leqq 2 + \log_3(x+6)$

すなわち　$\log_3(x-4)^2 \leqq \log_3 9(x+6)$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-4)^2 \leqq 9(x+6)$

整理して　$x^2-17x-38 \leqq 0$　ゆえに　$(x+2)(x-19) \leqq 0$

したがって　$-2 \leqq x \leqq 19$ ……②

①，② から，解は　$4 < x \leqq 19$

(3)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

$\log_{\frac{1}{3}} x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3\frac{1}{3}} = -\log_3 x$ であるから，不等式は　$2 + \log_3 x > (\log_3 x)^2$

ゆえに　$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 < 0$

したがって　$(\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) < 0$

よって　$-1 < \log_3 x < 2$　すなわち　$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$\frac{1}{3} < x < 9$　これは ① を満たす。

11 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 であるから　$4\times 10^{21} \leqq 2^n < 5\times 10^{21}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}(4\times 10^{21}) \leqq \log_{10} 2^n < \log_{10}(5\times 10^{21})$

$5\times 10^{21} = 10^{22} \div 2$ であるから　$2\log_{10}2 + 21 \leqq n\log_{10}2 < 22 - \log_{10}2$

$\log_{10}2 = 0.3010$ として計算すると　$21.6020 \leqq n \times 0.3010 < 21.6990$

よって　$71.76\cdots \leqq n < 72.08\cdots$

n は自然数であるから　$n = 72$

$2^4=16$ であるから，$(2^4)^m$ (m は自然数) の末尾の数字は常に 6 である。

$2^{72}=(2^4)^{18}$ であるから，2^{72} の末尾の数字は　6

$\boxed{12}$ (ア)　$\log_{10}0.15^{70}=70\log_{10}\dfrac{3}{20}=70(\log_{10}3-\log_{10}2-\log_{10}10)=70(0.4771-0.3010-1)$

$=-57.673$

よって　　$-58<\log_{10}0.15^{70}<-57$

ゆえに　　$10^{-58}<0.15^{70}<10^{-57}$

したがって，0.15^{70} を小数で表すと，小数第 ${}^{ア}58$ 位に 0 でない数字が現れる。

(イ)　$0.15^{70}=10^{-57.673}=10^{0.327}\times10^{-58}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より $10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ であるから

$2<10^{0.327}<3$

よって　　$2\times10^{-58}<0.15^{70}<3\times10^{-58}$

したがって，0.15^{70} を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　${}^{イ}2$

13 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 & \cdots\cdots ① \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

真数は正であるから　$x+1>0$，$y+3>0$

すなわち　$x>-1$，$y>-3$　……③

② から　$\log_2\dfrac{x+1}{y+3} = \log_2 2^{-1}$

よって　$\dfrac{x+1}{y+3} = \dfrac{1}{2}$ から　$y+3 = 2(x+1)$

ゆえに　$y = 2x-1$　……④

④ を ① に代入すると　$8\cdot 3^x - 3^{2x-1} = -27$

この式の両辺に 3 を掛けて整理すると　$(3^x)^2 - 24\cdot 3^x - 81 = 0$

ここで，$3^x = t$ とおくと，③ より $t > \dfrac{1}{3}$ である。

$t^2 - 24t - 81 = 0$ から　$(t-27)(t+3) = 0$

$t > \dfrac{1}{3}$ であるから　$t = 27$

ゆえに　$3^x = 27$　　したがって　$x = 3$

このとき，④ から　$y = 2\cdot 3 - 1 = 5$

これらはともに ③ を満たす。

14 $4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + 2^{-2x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2\cdot 2^x \cdot 2^{-x}$

$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$

ゆえに　$y = 8t - (t^2 - 2) - 10$　　よって　$y = -t^2 + 8t - 8$

$2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

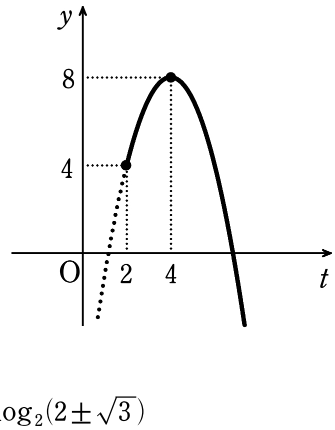
$$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$ のとき成り立つ。

ゆえに　$t \geqq 2$　……①

また　$y = -(t-4)^2 + 8$

① の範囲において，y は $t=4$ で最大値 8 をとる。



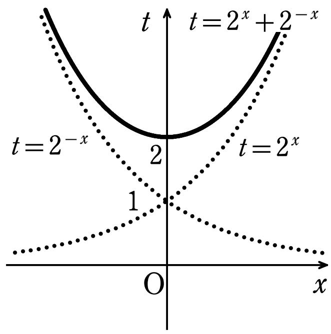
$t = 4$ のとき　$2^x + 2^{-x} = 4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2 - 4\cdot 2^x + 1 = 0$

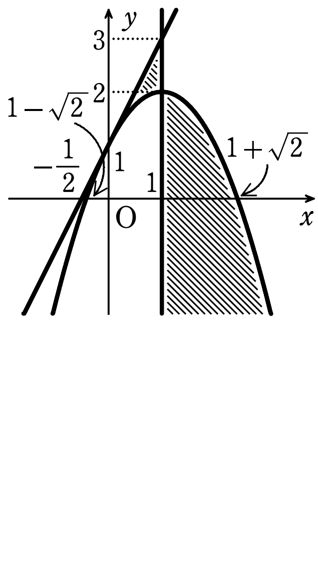
$2^x > 0$ であるから　$2^x = 2 \pm \sqrt{3}$　　よって　$x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$

したがって　$x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$ で最大値 8

参考　$t=2^x+2^{-x}$ のグラフは，右の図のようになり，
1つの t の値に対応する x の値の個数は
$t<2$ のとき　0個
$t=2$ のとき　1個
$t>2$ のとき　2個
となる。



15　真数は正であるから　$2x-y+1>0$
よって　$y<2x+1$　……①
また，$x>0$ かつ $x\neq 1$ は底の条件を満たす。
与えられた不等式を変形すると　$\log_x(2x-y+1)>\log_x x^2$
[1]　$x>1$ のとき　$2x-y+1>x^2$
ゆえに　$y<-x^2+2x+1$
すなわち　$y<-(x-1)^2+2$
[2]　$0<x<1$ のとき　$2x-y+1<x^2$
ゆえに　$y>-x^2+2x+1$
すなわち　$y>-(x-1)^2+2$
[1]，[2] より
直線 $x=1$ の右側と，放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の下側の共通部分
および
直線 $x=0$ の右側かつ $x=1$ の左側と，
放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の上側の共通部分
これと ① の共通部分が求める領域で，右の図の斜線部分。
ただし，境界線を含まない。



BASIC問題

$\boxed{1}$ 2 点 A(-3)，B(5) について，次のものを求めよ。

(1)　2 点 A，B 間の距離

(2)　線分 AB を 3 : 1 に内分，外分する点の座標

(3)　線分 AB の中点

$\boxed{2}$ 次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(6,\ -1)$ を通り，直線 $2x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線

(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $5x+2y-3=0$ に平行な直線，垂直な直線

(3)　点 $(1,\ -1)$ を通り，2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に平行な直線，垂直な直線

$\boxed{3}$ (1)　2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ k を定数とする。点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ。

STANDARD問題

$\boxed{5}$ 直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A$(2,\ 5)$ と対称な点を B，点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき，次のものを求めよ。

(1)　点 B の座標　　　　(2)　点 H の座標

$\boxed{6}$ 3 直線 $x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ と直線 $ax+y+a=0$ が異なる 2 点 A，B で交わる。

(1)　$a=-1$ のとき，弦 AB の長さを求めよ。

(2)　弦 AB の長さが最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 2 つの円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 つの円 ①，② の 2 つの交点と点 $(4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に２点 A$(-2,\ 3)$，B$(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点 P が放物線上の $1\leqq x\leqq 7$ の範囲を動くとき，△PAB の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

11 点 P$(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた２本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

12 円 $x^2+y^2=4$　……① と円 $(x-5)^2+y^2=1$　……② の共通接線の方程式を求めよ。

数学②　第３回試験　図形と式１

$\boxed{1}$ 解答 (1)　8　(2)　内分 3，外分 9　(3)　1

$\boxed{2}$ 解答 (1)　平行：$2x-y-13=0$，垂直：$x+2y-4=0$

(2)　平行：$5x+2y+4=0$，垂直：$2x-5y+19=0$

(3)　平行：$x-2y-3=0$，垂直：$2x+y-1=0$

$\boxed{3}$ 解答 (1)　$(x-4)^2+(y-1)^2=10$　(2)　$x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

$\boxed{5}$ 解答 (1)　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$　(2)　$\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

$\boxed{6}$ 解答 $a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

$\boxed{7}$ 解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

$\boxed{8}$ 解答 (1)　$2\sqrt{3}$　(2)　$a=-\dfrac{1}{3}$

$\boxed{9}$ 解答 (1)　略　(2)　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

$\boxed{10}$ 解答 $\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$\boxed{11}$ 解答 $7x+y=25$

$\boxed{12}$ 解答 $3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

$\boxed{1}$ (1)　$AB=|5-(-3)|=|8|=8$

(2)　3：1 に内分する点の座標は　$x=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot5}{3+1}=\dfrac{12}{4}=3$

3：1 に外分する点の座標は　$x=\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot5}{3-1}=\dfrac{18}{2}=9$

(3)　$x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

$\boxed{2}$ (1)　$2x-y+4=0$ から　$y=2x+4$

よって，与えられた直線の傾きは　2

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-(-1)=2(x-6)\quad \text{すなわち}\quad 2x-y-13=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$2m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=-\frac{1}{2}$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-6)\quad \text{すなわち}\quad x+2y-4=0$$

(2)　$5x+2y-3=0$ から　$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線の傾きは　$-\dfrac{5}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-3=-\frac{5}{2}\{x-(-2)\}\quad \text{すなわち}\quad 5x+2y+4=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{5}{2}m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=\frac{2}{5}$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-3=\frac{2}{5}\{x-(-2)\}\quad \text{すなわち}\quad 2x-5y+19=0$$

(3)　2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

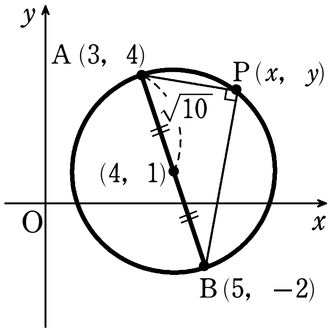
$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad x-2y-3=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$\frac{1}{2}m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=-2$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-(-1)=-2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad 2x+y-1=0$$



$\boxed{3}$ (1)　この円の中心は，2 点 (3，4)，(5，−2) を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　(4，1)

半径 r は中心 (4，1) と円上の点 (3，4) との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 (3，1) を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点 (6，−8) を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点 (−2，−4) を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると　$3l+m+n+10=0$

$6l-8m+n+100=0$

$2l+4m-n-20=0$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 題意を満たすための条件は　$\dfrac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$

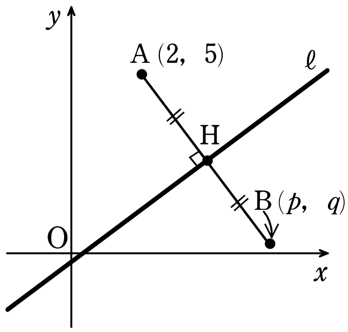
よって　$2|k+1|=\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}$

この両辺は負でないから，2 乗しても同値である。

ゆえに　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理して　$k^2+8k+1=0$

したがって　$k=-4\pm\sqrt{15}$



$\boxed{5}$ ⑴　点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-5}{p-2}$ である。

$AB \perp \ell$ であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

すなわち　　$4p+3q=23$　……①

[2]　線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+5}{2}-1=0$$

すなわち　　$3p-4q=16$　……②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{28}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$

したがって，点 B の座標は　　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

⑵　点 H は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+\frac{28}{5}}{2},\ \frac{5+\frac{1}{5}}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$$

$\boxed{6}$ 直線 ① の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　直線 ② の傾きは -1，　直線 ③ の傾きは $\dfrac{a}{2}$

3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないのは，次の [1]，[2]，[3] の場合である。

[1]　2 直線 ①，③ が平行　　　[2]　2 直線 ②，③ が平行

[3]　3 直線 ①，②，③ が 1 点で交わる。

[1] の場合　　$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$　　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$

[2] の場合　　$-1=\dfrac{a}{2}$　　　よって　$a=-2$

[3] の場合　　①，② を連立して解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，直線 ①，② の交点の座標は　　$(-1,\ 1)$

点 $(-1,\ 1)$ が直線 ③ 上にあるから　　$a\cdot(-1)-2\cdot1+4=0$

整理して　　$-a+2=0$　　　ゆえに　$a=2$

このとき，直線 ③ は $x-y+2=0$ となり，直線 ①，② とは一致しない。

したがって，求める a の値は　　$a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

7　円の中心は第 2 象限にあるので，半径を r とおくと中心の座標は $(-r,\ r)$ と表せる。

よって，求める円の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

式を整理して　$r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$ より　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

8 (1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

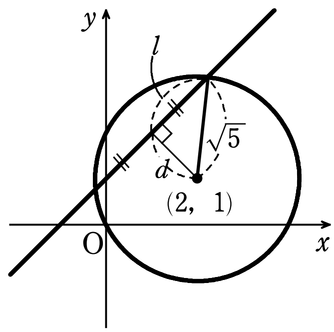
$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$

$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$



円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$

とすると　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{3}$　　よって　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　$2x^2-4x-1=0$　$\cdots\cdots ③$

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0 \qquad よって \quad a=-\frac{1}{3}$$

9 (1)　① を変形すると　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 ① の中心は点 (3，2)，半径は 1 である。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

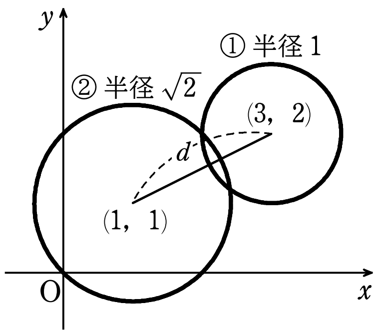
よって，円 ② の中心は点 (1，1)，半径は $\sqrt{2}$ である。

2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに　$\sqrt{2}-1<d<\sqrt{2}+1$

したがって，2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わる。



(2)　k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-6x-4y+12+k(x^2+y^2-2x-2y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。

(1) により，2 つの円 ①，② は 2 点で交わり，③ は 2 つの円 ①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ③ が点 (4，0) を通るとき　$4+8k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入して整理すると　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

これが求める円の方程式である。

10 (1)　$\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+15)$ とする。

直線 AB の方程式は

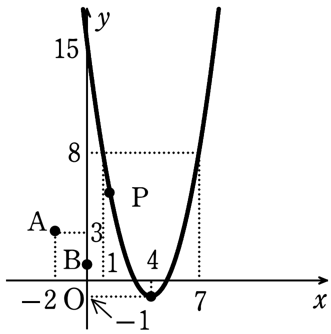
$$y=\frac{1-3}{0-(-2)}\{x-(-2)\}+3$$

すなわち　$y=-x+1$

点 P と直線 $y=-x+1$ の距離を d とすると

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times d$$

ゆえに，d が最小となるように P を定めればよい。



$$d=\frac{|t+t^2-8t+15-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2-7t+14|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

よって，d は $t=\dfrac{7}{2}$ で最小となる。

したがって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

11 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

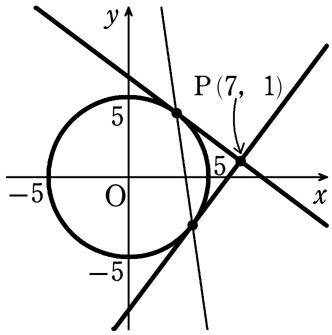
$$x_1x+y_1y=25,\quad x_2x+y_2y=25$$

これらがともに点 $P(7,\ 1)$ を通るから

$$7x_1+y_1=25 \ \cdots\cdots ①,\quad 7x_2+y_2=25 \ \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ は直線 $7x+y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$7x+y=25$



別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=25$ $\cdots\cdots$ ①

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 $P(7,\ 1)$ を通るから　$7x_1+y_1=25$

よって　$y_1=-7x_1+25$ $\cdots\cdots$ ②

② を ① に代入して　$x_1{}^2+(-7x_1+25)^2=25$

ゆえに　$50(x_1{}^2-7x_1+12)=0$　　これを解いて　$x_1=3,\ 4$

② から　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

よって，A，B の座標は　$(3,\ 4)$，$(4,\ -3)$

したがって，直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{-3-4}{4-3}(x-3) \quad すなわち \quad 7x+y-25=0$$

参考　直線 AB を点 P に関する円の **極線** といい，P を **極** という。

12 円 ① 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

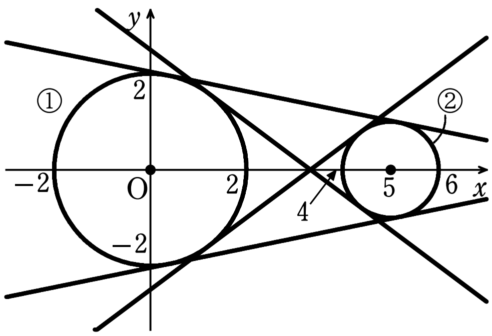
$$x_1{}^2+y_1{}^2=4 \quad \cdots\cdots③$$

接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=4 \quad \cdots\cdots④$$

直線 ④ が円 ② に接するとき，円 ② の中心 $(5,\ 0)$ と直線 ④ の距離は円 ② の半径に等しいから

$$\frac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$$



③ から　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$

③ から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$，$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって，求める接線の方程式は　$3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

BASIC問題

$\boxed{1}$ 次の 2 次方程式を解け。

(1) $6x^2-5x-6=0$ (2) $2x^2-6x+3=0$

$\boxed{2}$ 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 4x+1<3x-1 \\ 2x-1 \geqq 5x+6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+3>x+2 \\ 3x>4x+2 \end{cases}$

(3) $2(x-3)+5<5x-6 \leqq \dfrac{3x+4}{3}$

$\boxed{3}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-1|=2$ (2) $|x+4|<5$ (3) $|2x-3| \geqq 4$

$\boxed{4}$ 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

$\boxed{5}$ 実数 x，y が $x+y=3$，$xy=-2$ を満たすとき，x^2+y^2，x^3+y^3，x^5+y^5 の値を求めよ

$\boxed{6}$ 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ (2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$ (3) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

STANDARD問題

$\boxed{7}$ a を定数とするとき，次の不等式を解け。

(1) $ax \leqq 1$ (2) $ax+6>3x+2a$

$\boxed{8}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3-a^2c-ab^2+b^2c$ (2) $2x^2+3xy-2y^2+x+7y-3$

$\boxed{9}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-3|=2x$ (2) $|x-3|<2x$ (3) $|x|+|x-2|=6$

$\boxed{10}$ $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

$\boxed{11}$ $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^4+\dfrac{1}{x^4}$，$x^6+\dfrac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

実戦問題篇

$\boxed{12}$ a を定数とするとき，次の方程式を解け。

(1) $ax^2+(a^2-1)x-a=0$ (2) $a^2x+1=a(x+1)$

$\boxed{13}$ ＊ $2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものを求めよ。

$\boxed{14}$ ＊ 相異なる実数 α，β が $\begin{cases} \alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6} \\ \beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6} \end{cases}$ を満たすとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

15 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。

(1) a と b を求めよ。

(2) $a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

16 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x+2|-|x-1|>x$

(2) $||x-1|-2|-3=0$

17 x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a \geqq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど5個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{2}{3}$　(2) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $x\leqq-\dfrac{7}{3}$　(2) 解はない　(3) $\dfrac{5}{3}<x\leqq\dfrac{11}{6}$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $x=3,\ -1$　(2) $-9<x<1$　(3) $x\leqq-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\leqq x$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$　(2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$

$\boxed{5}$ 解答 $x^2+y^2=13,\ x^3+y^3=45,\ x^5+y^5=573$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$　(2) $3-\sqrt{6}$　(3) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $a>0$ のとき　$x\leqq\dfrac{1}{a}$

$a=0$ のとき　すべての実数

$a<0$ のとき　$x\geqq\dfrac{1}{a}$

(2) $a>3$ のとき　$x>2$

$a=3$ のとき　解はない

$a<3$ のとき　$x<2$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $(a+b)(a-b)(a-c)$　(2) $(x+2y-1)(2x-y+3)$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $x=1$　(2) $x>1$　(3) $x=-2,\ 4$

$\boxed{10}$ 解答 $\dfrac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$

$\boxed{11}$ 解答 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=10,\ x^4+\dfrac{1}{x^4}=98,\ x^6+\dfrac{1}{x^6}=970$

$\boxed{12}$ 解答 (1) $a\fallingdotseq 0$ のとき $x=-a,\ \dfrac{1}{a}$

$a=0$ のとき $x=0$

(2) $a\fallingdotseq 0,\ a\fallingdotseq 1$ のとき $x=\dfrac{1}{a}$

$a=0$ のとき 解はない

$a=1$ のとき すべての実数

$\boxed{13}$ 解答 73

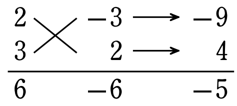
$\boxed{14}$ 解答 順に，$\sqrt{3}$，$3-\sqrt{6}$，$1+\sqrt{6}$

$\boxed{15}$ 解答 (1) $a=3,\ b=\sqrt{3}-1$　(2) 6

$\boxed{16}$ 解答 (1) $x<-3,\ -1<x<3$　(2) $x=6,\ -4$

$\boxed{17}$ 解答 $19\leqq a<21$

$\boxed{1}$ (1)　左辺を因数分解すると　$(2x-3)(3x+2)=0$



よって　$2x-3=0$　または　$3x+2=0$

したがって　$x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{2}{3}$

(2)　解の公式により　$x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$

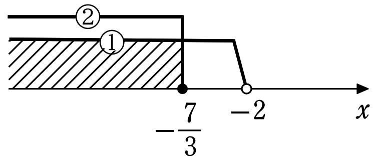
$=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

別解　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ (1)　$4x+1<3x-1$ から　$x<-2$　……①

$2x-1\geqq5x+6$ から　$-3x\geqq7$

よって　$x\leqq-\dfrac{7}{3}$　……②



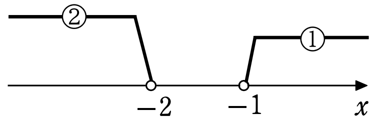
①と②の共通範囲を求めて　$x\leqq-\dfrac{7}{3}$

(2)　$2x+3>x+2$ から　$x>-1$　……①

$3x>4x+2$ から　$-x>2$

よって　$x<-2$　……②

①と②の共通範囲はないから，この連立不等式の解はない。



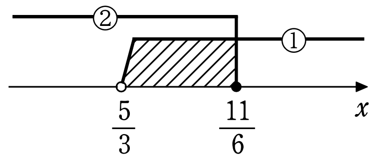
(3)　$2(x-3)+5<5x-6$ から　$-3x<-5$

よって　$x>\dfrac{5}{3}$　……①

$5x-6\leqq\dfrac{3x+4}{3}$ から　$15x-18\leqq3x+4$

よって　$12x\leqq22$

ゆえに　$x\leqq\dfrac{11}{6}$　……②



①と②の共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{3}<x\leqq\dfrac{11}{6}$

$\boxed{3}$ (1)　$|x-1|=2$ から　$x-1=\pm2$　　よって　$x=3,\ -1$

(2)　$|x+4|<5$ から　$-5<x+4<5$

各辺から4を引いて　$-9<x<1$

(3)　$|2x-3|\geqq4$ から　$2x-3\leqq-4$　または　$4\leqq2x-3$

よって　$2x\leqq-1$　または　$7\leqq2x$　　ゆえに　$x\leqq-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\leqq x$

$\boxed{4}$ (1)　$\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{3}$$

$$=\left(\frac{6}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}\right)\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$$

$\boxed{5}$ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot(-2)=13$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x^2y^3+x^3y^2)=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$

$=13\cdot45-(-2)^2\cdot3=573$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}=3\{13-(-2)\}=45$

$\boxed{6}$ (1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)-2\sqrt{7\cdot2}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}=\sqrt{15-2\sqrt{54}}=\sqrt{(9+6)-2\sqrt{9\cdot6}}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{6}=3-\sqrt{6}$

(3) $$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\cdot1}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{7}$ (1) [1]　$a>0$ のとき

両辺を正の数 a で割って　$x\leqq\dfrac{1}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

与えられた不等式 $0\cdot x\leqq1$ の解は

すべての実数

[3]　$a<0$ のとき

両辺を負の数 a で割って　$x \geqq \dfrac{1}{a}$

(2)　不等式を整理すると

$$(a-3)x > 2(a-3) \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$a-3>0$ すなわち $a>3$ のとき

両辺を正の数 $a-3$ で割って　$x > \dfrac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち　　$x>2$

[2]　$a-3=0$ すなわち $a=3$ のとき

不等式 ① は解がない。

[3]　$a-3<0$ すなわち $a<3$ のとき

両辺を負の数 $a-3$ で割って　$x < \dfrac{2(a-3)}{a-3}$

すなわち　　$x<2$

$\boxed{8}$ (1)　与式 $=(-a^2+b^2)c+a(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a-c)$

$=(a+b)(a-b)(a-c)$

(2)　与式 $=2x^2+(3y+1)x-(2y^2-7y+3)$

$=2x^2+(3y+1)x-(y-3)(2y-1)$

$=\{x+(2y-1)\}\{2x-(y-3)\}$

$=(x+2y-1)(2x-y+3)$

$$\begin{array}{llcl}
1 & 2y-1 & \longrightarrow & 4y-2 \\
2 & -(y-3) & \longrightarrow & -y+3 \\ \hline
2 & -(y-3)(2y-1) & & 3y+1
\end{array}$$

$\boxed{9}$ (1)　[1]　$x-3 \geqq 0$　すなわち　$x \geqq 3$ のとき

$|x-3|=x-3$ であるから，方程式は　　$x-3=2x$

これを解くと　$x=-3$　　　　これは $x \geqq 3$ を満たさない。

[2]　$x-3<0$　すなわち　$x<3$ のとき

$|x-3|=-(x-3)$ であるから，方程式は　　$-(x-3)=2x$

これを解くと　$x=1$　　　　これは $x<3$ を満たす。

[1], [2] から，求める解は　$x=1$

参考　$|A|=B$ は「$A=\pm B$　かつ　$B \geqq 0$」と同じであるから，次のように解くこともできる。

$|x-3|=2x$ から　　$x-3=\pm 2x$　かつ　$2x \geqq 0$

よって　　$x=-3$，1　かつ　$x \geqq 0$　　　　したがって　　$x=1$

(2)　[1]　$x \geqq 3$ のとき

不等式は　　$x-3<2x$　　　これを解くと　$x>-3$

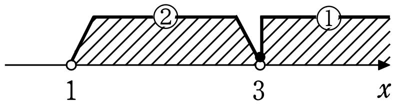
これと $x \geqq 3$ の共通範囲は　$x \geqq 3$　$\cdots\cdots$ ①

[2]　$x<3$ のとき

不等式は　　$-(x-3)<2x$　　　これを解くと　$x>1$

これと $x<3$ の共通範囲は

$$1<x<3 \quad \cdots\cdots ②$$



[1], [2] から，求める解は ① と ② を合わせた範囲で　$x>1$

(3) [1]　$x<0$ のとき

$|x|=-x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　$-x-(x-2)=6$

これを解くと　$x=-2$　　これは $x<0$ を満たす。

[2]　$0\leqq x<2$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　$x-(x-2)=6$

すなわち　$0\cdot x=4$　　この方程式の解はない。

[3]　$2\leqq x$ のとき

$|x|=x$，$|x-2|=x-2$ であるから，方程式は　$x+(x-2)=6$

これを解くと　$x=4$　　これは $2\leqq x$ を満たす。

以上から，求める解は　$x=-2,\ 4$

10

$$\frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$$

11　$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

よって　$x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

ゆえに　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{3})^2-2=10$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=10^2-2=98$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=10^3-3\cdot10=970$$

別解　$x^6+\dfrac{1}{x^6}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^4-1+\dfrac{1}{x^4}\right)=10(98-1)=970$

12 (1)　$ax^2+(a^2-1)x-a=0$ から

$$(x+a)(ax-1)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$a\neq0$ のとき

①の解は　　$x=-a,\ \dfrac{1}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

①は　$x\cdot(-1)=0$ となるから，解は

$x=0$

(2)　$a^2x+1=a(x+1)$ から

$a(a-1)x=a-1$　……①

$a(a-1)\neq 0$ すなわち $a\neq 0$，$a\neq 1$ のとき

$x=\dfrac{1}{a}$

$a=0$ のとき　①から　$0\cdot x=-1$

これを満たす x の値はない。すなわち，解はない。

$a=1$ のとき　①から　$0\cdot x=0$

これはすべての数 x について成り立つから，解は

すべての実数。

13　$a^{18}-b^{18}=(a^9)^2-(b^9)^2=(a^9+b^9)(^{ア}a^9-b^9)=\{(a^3)^3+(b^3)^3\}\{(a^3)^3-(b^3)^3\}$

$=(a^3+b^3)(^{イ}a^6-a^3b^3+b^6)(^{ウ}a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)$

この式で $a=2$，$b=1$ とおくと

$2^{18}-1=(8+1)(64-8+1)(8-1)(64+8+1)=9\times 57\times 7\times 73=3^3\times 7\times 19\times 73$

よって，$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものは $^{エ}73$ である。

14　$\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6}$　……①

$\beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6}$　……②

①−②より　　$\alpha^2-\beta^2-\sqrt{3}(\alpha-\beta)=0$

整理すると　　$(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\}=0$

$\alpha\neq\beta$ から　　$\alpha+\beta-\sqrt{3}=0$

したがって　　$\alpha+\beta=\sqrt{3}$

①+②より　　$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

よって　　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

ゆえに　　$(\sqrt{3})^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

したがって　　$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

$\alpha+\beta=\sqrt{3}$，$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$ から

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\sqrt{3})^2-2(3-\sqrt{6})}{3-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}-3}{3-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{3+3\sqrt{6}}{9-6}=1+\sqrt{6}$$

15 (1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=1.73\cdots\cdots$ であるから　$2+\sqrt{3}=3.73\cdots\cdots$

よって　$a=3$,

$b=(2+\sqrt{3})-a=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

(2) $a+2b+b^2+1=3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2+1$

$=3+2\sqrt{3}-2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+1$

$=6$

別解　$a+2b+b^2+1=a+(b+1)^2$

$=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2$

$=3+(\sqrt{3})^2$

$=6$

16 (1) $|x+2|-|x-1|>x$　……①

[1]　$x<-2$ のとき，① は　$-(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x<-3$

これと $x<-2$ との共通範囲は　$x<-3$

[2]　$-2\leqq x<1$ のとき，① は　$(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x>-1$

これと $-2\leqq x<1$ との共通範囲は　$-1<x<1$

[3]　$x\geqq 1$ のとき，① は　$(x+2)-(x-1)>x$

よって　$x<3$

これと $x\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq x<3$

[1]，[2]，[3] から，解は　$x<-3$，$-1<x<3$

(2) $||x-1|-2|-3=0$　……①

[1]　$x\geqq 1$ のとき　$|x-1|=x-1$ であるから，① は

$|(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x-3|=3$

よって　$x-3=\pm 3$　　これを解くと　$x=6$，0

$x\geqq 1$ を満たすのは　$x=6$

[2]　$x<1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$ であるから，① は

$|-(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x+1|=3$

よって　$x+1=\pm 3$　　これを解くと　$x=2$，-4

$x<1$ を満たすのは　$x=-4$

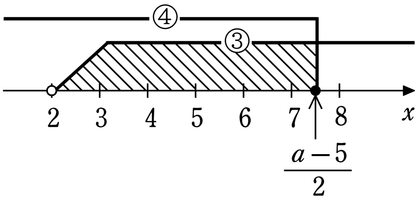
[1]，[2] から，解は　$x=6$，-4

17 $\begin{cases} 7x-5>13-2x & \cdots\cdots ① \\ x+a\geqq 3x+5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$9x>18$　　よって　$x>2$　……③

②から　$-2x \geqq -a+5$　　よって　$x \leqq \dfrac{a-5}{2}$　……④

条件を満たすのは，③と④を同時に満たす整数 x が 3，4，5，6，7 となるときであるから　$7 \leqq \dfrac{a-5}{2} < 8$



各辺に 2 を掛けて　$14 \leqq a-5 < 16$

各辺に 5 を加えて　$19 \leqq a < 21$

これが求める a の値の範囲である。

BASIC問題

$\boxed{1}$ 次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+8x+9$

(2)　$y=x^2-2x$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=-3x^2-2x+4$ $(-1<x<2)$

$\boxed{2}$ 次の不等式を解け。

(1)　$5<x^2+4x\leqq 21$　　(2)　$2x+3<x^2<5$

$\boxed{3}$ 2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフを y 軸方向に2だけ平行移動したあと，y 軸に関して対称移動させ，更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，$y=x^2$ のグラフと一致した．a，b の値を求めよ．

$\boxed{4}$ グラフが3点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような2次関数を求めよ。

STANDARD問題

$\boxed{5}$ 2次不等式 $4x^2+ax+b<0$ の解が $1<x<\dfrac{5}{4}$ であるとき，2次不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ の解を求めよ。

$\boxed{6}$ a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　2次不等式 $x^2-(m-1)x+3>0$ の解がすべての実数となる。

(2)　2次不等式 $-x^2+2mx+m\geqq 0$ が解をもつ。

$\boxed{8}$ 2次方程式 $x^2-(a+2)x+a(2a+1)=0$ の異なる2つの実数解を α，β とするとき，$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{9}$ 2次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる2つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ 2次方程式 $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ は，定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという．実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ．

$\boxed{11}$ $f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

12　x についての次の 2 つの不等式

$$2x^2-3x-5>0$$

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

を同時に満たす整数 x がただ 1 つ存在するとき，定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

13　2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で常に成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

14　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のとき，x の関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ.

$\boxed{1}$ 解答 (1) 最大値はない，$x=-2$ のとき最小値 1

(2) $x=3$ のとき最大値 3，$x=1$ のとき最小値 -1

(3) $x=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{3}$，最小値はない

$\boxed{2}$ 解答 (1) $-7 \leqq x < -5$，$1 < x \leqq 3$　(2) $-\sqrt{5} < x < -1$

$\boxed{3}$ 解答 $a=6$，$b=7$

$\boxed{4}$ 解答 $y=x^2-x+3$

$\boxed{5}$ 解答 $x \leqq \dfrac{4}{5}$，$1 \leqq x$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $a<0$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$，

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2-a$，

$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2) $a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $-9a+8$；

$a=1$ のとき $x=0$，2 で最大値 -1；

$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $1-2\sqrt{3} < m < 1+2\sqrt{3}$　(2) $m \leqq -1$，$0 \leqq m$

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < \dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 $3 < m < \dfrac{25}{8}$

$\boxed{10}$ 解答 $-2 < b < 2$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $-3 < a < 3$　(2) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

$\boxed{12}$ 解答 $-3 \leqq a < -2$ のとき $x=-2$，$3 < a \leqq 4$ のとき $x=3$

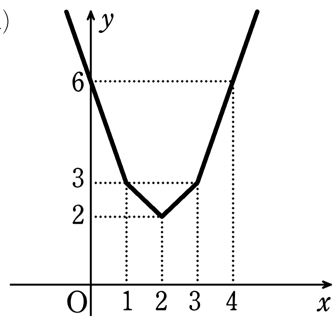
$\boxed{13}$ 解答 $-1 < a < 3$

$\boxed{14}$

解答 (1) 〔図〕

(2) $x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

(1)



1 (1)　$y=2x^2+8x+9$

$=2(x^2+2\cdot 2x+2^2)-2\cdot 2^2+9$

$=2(x+2)^2+1$

よって，$x=-2$ のとき最小値 1 をとる。

最大値はない。

(2)　$y=x^2-2x$

$=(x^2-2\cdot 1x+1^2)-1^2$

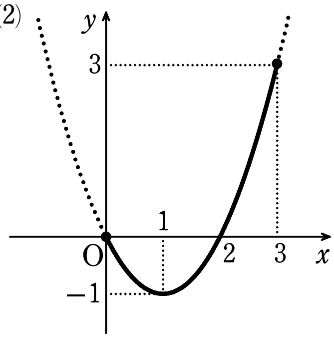
$=(x-1)^2-1$　$(0\leqq x\leqq 3)$

よって，グラフは［図］の実線部分である。

ゆえに，$x=3$ のとき最大値 3，

$x=1$ のとき最小値 -1　をとる。

(2)



(3)　$y=-3x^2-2x+4$

$=-3\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4$

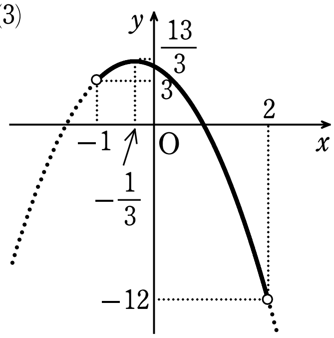
$=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3}$　$(-1<x<2)$

よって，グラフは［図］の実線部分である。

ゆえに，$x=-\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{13}{3}$ をとる。

最小値はない。

(3)



2 (1)　$5<x^2+4x\leqq 21$ から　$\begin{cases}5<x^2+4x & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x\leqq 21 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$x^2+4x-5>0$　　よって　$(x+5)(x-1)>0$

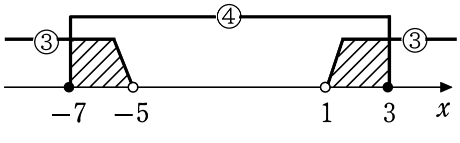
ゆえに　$x<-5,\ 1<x$　……③

② から　$x^2+4x-21\leqq 0$　　よって　$(x+7)(x-3)\leqq 0$

ゆえに　$-7\leqq x\leqq 3$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-7\leqq x<-5,\ 1<x\leqq 3$



(2)　$2x+3<x^2<5$ から　$\begin{cases}2x+3<x^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2<5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$x^2-2x-3>0$　　よって　$(x+1)(x-3)>0$

ゆえに　$x<-1,\ 3<x$　……③

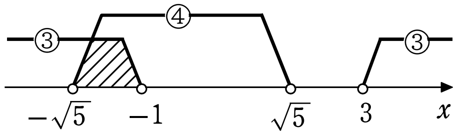
② から　$x^2-5<0$　　$x^2-5=0$ を解くと　$x=\pm\sqrt{5}$

よって，② の解は

$$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ④$$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$-\sqrt{5}<x<-1$$



[3] 移動を逆にたどる．

$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x-3)^2$

このグラフを y 軸に関して対称移動すると，グラフの方程式は　$y=(-x-3)^2$

すなわち　$y=(x+3)^2$

このグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，グラフの方程式は　$y=(x+3)^2-2$

すなわち　$y=x^2+6x+7$

これが $y=x^2+ax+b$ と一致するから　$a=6$，$b=7$

[4] 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 5=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \\ 9=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a+b+c=3 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=5 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　　$3a+b=2$　$\cdots\cdots$ ④

③−② から　　$5a+b=4$　$\cdots\cdots$ ⑤

⑤−④ から　　$2a=2$　　　よって　$a=1$

④ から　　$3+b=2$　　　よって　$b=-1$

① から　　$1-1+c=3$　　　よって　$c=3$

したがって，求める 2 次関数は　$y=x^2-x+3$

[5] 条件から，$y=4x^2+ax+b$ のグラフは $1<x<\dfrac{5}{4}$ の範囲で x 軸より下側にある。

すなわち，2 点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ を通るから　　$4+a+b=0$，$\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{4}a+b=0$

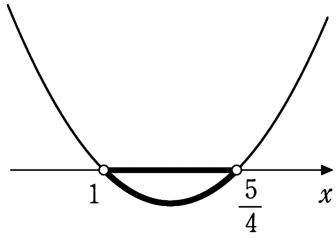
これを解くと　　$a=-9$，$b=5$

よって，不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ は

$$5x^2-9x+4\geqq 0$$

すなわち　　$(5x-4)(x-1)\geqq 0$

これを解くと　　$x\leqq\dfrac{4}{5}$，$1\leqq x$



[6] $y=2x^2-4ax-a$ を変形すると

$$y=2(x-a)^2-2a^2-a$$

この放物線の軸は直線 $x=a$ である。

(1)　[1]　$a<0$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

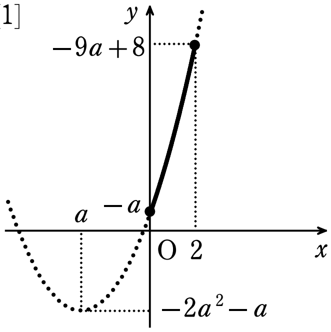
よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

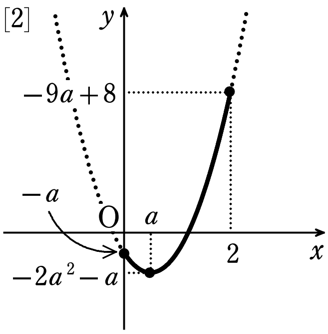
グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$ をとる。

[1]



[2]



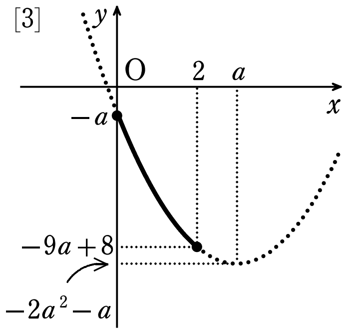
[3]　$2<a$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，

$x=2$ で最小値 $-9a+8$ をとる。

[3]



以上から

$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $-a$

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2-a$

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 $-9a+8$

(2)　定義域の中央の値は　1

[1]　$a<1$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

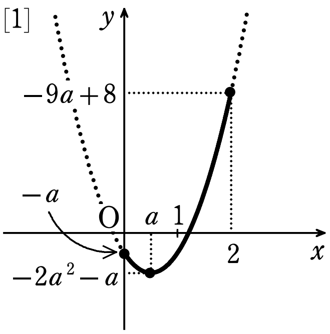
よって，$x=2$ で最大値 $-9a+8$ をとる。

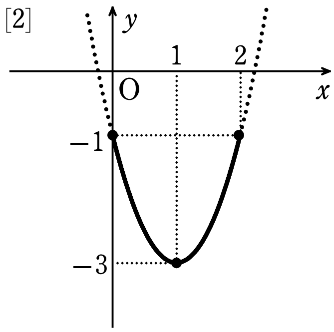
[2]　$a=1$ のとき

$y=2(x-1)^2-3$

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，$x=0$，2 で最大値 -1 をとる。





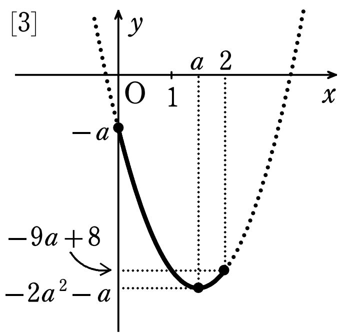
[3]　$1<a$ のとき

グラフは［図］の実線部分のようになる。

よって，

$x=0$ で最大値 $-a$

をとる。



以上から

$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $-9a+8$

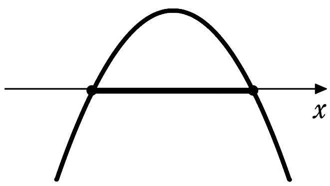
$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 -1

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $-a$

$\boxed{7}$ (1)　x^2 の係数は正であるから，この 2 次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は　$D=\{-(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot3<0$　すなわち　$m^2-2m-11<0$

これを解いて　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$

(2)　この 2 次不等式が解をもつための必要十分条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことである。



すなわち　$D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq0$

よって　$4(m^2+m)\geqq0$

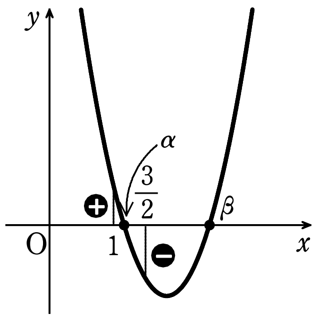
ゆえに　$m(m+1)\geqq0$

したがって　$m\leqq-1$，$0\leqq m$

8　$f(x)=x^2-(a+2)x+a(2a+1)$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，

$1<\alpha<\frac{3}{2}<\beta$ となる条件は，右の図より



$$f(1)>0 \quad かつ \quad f\left(\frac{3}{2}\right)<0$$

ここで　$f(1)=1^2-(a+2)\cdot 1+a(2a+1)=2a^2-1$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-(a+2)\cdot\frac{3}{2}+a(2a+1)$$

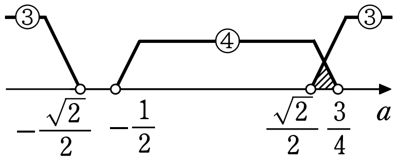
$$=\frac{1}{4}(8a^2-2a-3)$$

$$=\frac{1}{4}(2a+1)(4a-3)$$

であるから　$\begin{cases} 2a^2-1>0 & \cdots\cdots ① \\ (2a+1)(4a-3)<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}<a$　$\cdots\cdots$ ③

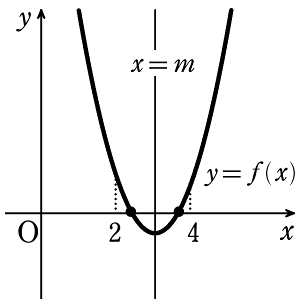
② から　$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$　$\cdots\cdots$ ④



③ と ④ の共通範囲を求めて　$\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{3}{4}$

9　$f(x)=x^2-2mx+9$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $2<x<4$ の範囲と異なる 2 点で交わることである。



$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D>0$

かつ　軸 $x=m$ について　$2<m<4$　$\cdots\cdots$ ①

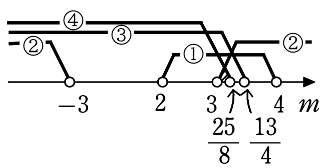
かつ　$f(2)>0$　かつ　$f(4)>0$

$\frac{D}{4}=m^2-9=(m+3)(m-3)$ であるから，$D>0$ より

$m<-3$，$3<m$　$\cdots\cdots$ ②

$f(2)>0$，$f(4)>0$ から　$-4m+13>0$，$-8m+25>0$

よって　$m<\frac{13}{4}$ $\cdots\cdots$ ③，$m<\frac{25}{8}$ $\cdots\cdots$ ④



①，②，③，④ の共通範囲を求めて

$3<m<\frac{25}{8}$

10　$x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_1 とすると　$\frac{D_1}{4}=a^2-(2a^2+2ab+4)<0$

すなわち　$a^2+2ab+4>0$

この不等式が，どのような a の実数値に対しても成り立つような b の値の範囲を求めればよい.

よって，$a^2+2ab+4=0$ の判別式を D_2 とすると　$\dfrac{D_2}{4}=b^2-4<0$

これを解いて　$-2<b<2$

11 (1)　$g(x)-f(x)=2x^2-2(a-1)x-a+5$

どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$，すなわち $g(x)-f(x)>0$ が成り立つための必要十分条件は　$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot2\cdot(-a+5)<0$

整理すると　$a^2-9<0$　よって　$(a+3)(a-3)<0$

したがって　$-3<a<3$

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は，$f(x)$ の最大値より $g(x)$ の最小値の方が大きいことである。

$$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a-2,\quad g(x)=\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+3$$

よって　$\dfrac{a^2}{4}+a-2<-\dfrac{(a-2)^2}{4}+3$　整理すると　$a^2-8<0$

ゆえに　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$　したがって　$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

12 $2x^2-3x-5>0$　……①，$x^2-(a+2)x+2a<0$　……②　とする。

① の左辺を因数分解すると　$(x+1)(2x-5)>0$

したがって，① の解は　$x<-1$ または $\dfrac{5}{2}<x$

② の左辺を因数分解すると　$(x-a)(x-2)<0$

② の解は，$a\neq2$ のとき存在し，

$a<2$ のとき　$a<x<2$

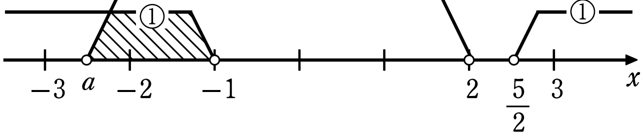
$a>2$ のとき　$2<x<a$

である。

よって，① と ② を同時に満たす整数 x がただ 1 つになるのは，次の各場合である。

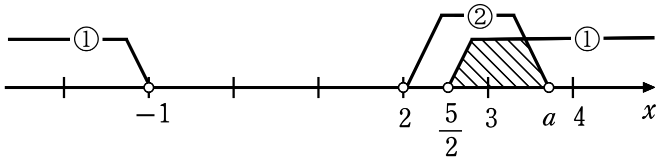
[1]　$-3\leqq a<-2$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $a<x<-1$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　-2



[2]　$3<a\leqq4$ のとき

① と ② の解の共通範囲は $\dfrac{5}{2}<x<a$ で，① と ② を同時に満たす整数 x は　3



13 2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で常に成り立つための条件は，関数 $y=x^2-2ax+a+2$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最小値が 0 より大きいことである。

$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とおくと　　$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

[1]　$a<-1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

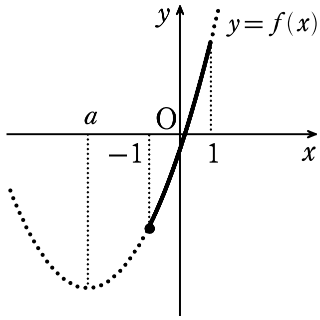
$$f(-1)=3a+3$$

よって，不等式が常に成り立つとき

$$3a+3>0$$

ゆえに　　$a>-1$

これは $a<-1$ を満たさない。



[2]　$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(a)=-a^2+a+2$$

よって，不等式が常に成り立つとき

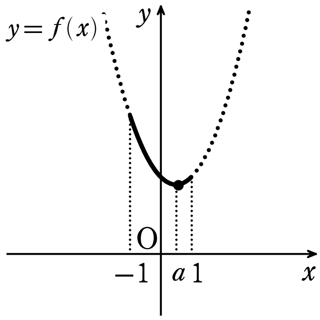
$$-a^2+a+2>0$$

すなわち　　$a^2-a-2<0$

よって　　$(a+1)(a-2)<0$

ゆえに　　$-1<a<2$

$-1 \leqq a \leqq 1$ との共通範囲は　　$-1<a \leqq 1$



[3]　$1<a$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は

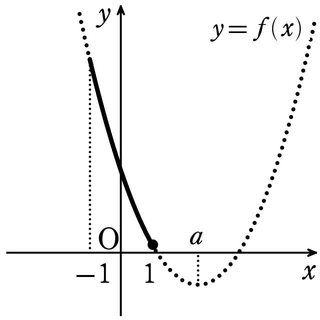
$$f(1)=-a+3$$

よって，不等式が常に成り立つとき

$$-a+3>0$$

よって　　$a<3$

$1<a$ との共通範囲は　　$1<a<3$



[1] ～ [3] より，求める a の値の範囲は　　$-1<a<3$

$\boxed{14}$ (1)　$x \leqq 1$ のとき

$y=(1-x)+(2-x)+(3-x)=-3x+6$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$y=(x-1)+(2-x)+(3-x)=-x+4$

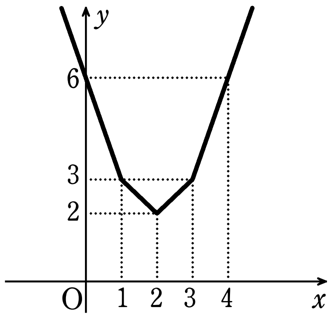
$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(3-x)=x$

$3 \leqq x$ のとき

$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

これらを図示すると図のようになる.



(2)　[1]　$x \leqq 1$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(k-x)=-(2n+1)x+(2n+1)(n+1)$$

$-(2n+1)<0$ であるから，$x=1$ のとき最小値

$-(2n+1)\cdot 1+(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる.

[2]　$l \leqq x \leqq l+1$ $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{l}(x-k)+\sum_{k=l+1}^{2n+1}(k-x)$$

$$=lx-\frac{1}{2}l(l+1)+\frac{1}{2}(2n+1-l)(2n+l+2)-(2n+1-l)x$$

$$=(2l-2n-1)x+\frac{1}{2}\{(2n-l+1)(2n+l+2)-l(l+1)\}$$

$$=\{2l-(2n+1)\}x+2n^2+3n-l^2-l+1$$

(i)　$1 \leqq l \leqq n$ のとき

$2l-(2n+1)<0$ であるから，$x=l+1$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}(l+1)+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2nl+2n^2+n$

$=(l-n)^2+n^2+n$ をとる.

更に，この式は $1 \leqq l \leqq n$ において，$l=n$ のとき最小値 n^2+n をとる.

(ii)　$n+1 \leqq l \leqq 2n$ のとき

$2l-(2n+1)>0$ であるから，$x=l$ で最小値

$\{2l-(2n+1)\}l+2n^2+3n-l^2-l+1$

$=l^2-2(n+1)l+2n^2+3n+1$

$=\{l-(n+1)\}^2+n^2+n$ をとる.

更に，この式は $n+1 \leqq l \leqq 2n$ において，$l=n+1$ のとき最小値 n^2+n をとる.

[3]　$2n+1 \leqq x$ のとき

$$y=\sum_{k=1}^{2n+1}(x-k)=(2n+1)x-(2n+1)(n+1)$$

$2n+1>0$ であるから，$x=2n+1$ のとき最小値

$(2n+1)(2n+1)-(2n+1)(n+1)=2n^2+n$ をとる.

[1]～[3] において　$2n^2+n>n^2+n$

ゆえに，$x=n+1$ のとき最小値 n^2+n

数学① 第３回試験 三角比

BASIC問題篇

1 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の三角比の値を求めよ。

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

(2) $\tan\theta = -3$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

2 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $3\tan\theta = \sqrt{3}$

(4) $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

3 △ABC において，$a = \sqrt{6}$，$A = 60°$，$C = 45°$ のとき，c と外接円の半径 R を求めよ。

4 △ABC において，次のものを求めよ。

(1) $c = 4$，$a = 6$，$B = 60°$ のとき　b

(2) $a = 3$，$b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{17}$ のとき　C

5 △ABC において，AB$=2$，BC$=\sqrt{7}$，CA$=3$ とする。△ABC の外接円の半径 R と，内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

6 θ が $0° < \theta < 90°$ かつ $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，$\cos\theta + \sin\theta$，$\cos^3\theta + \sin^3\theta$ の値を求めよ。

7 円に内接する四角形 ABCD において，AB$=2$，BC$=2$，CD$=3$，DA$=4$ とする。
次の値を求めよ。

(1) AC の長さ

(2) 四角形 ABCD の面積

(3) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とすると BE：ED の比

8 $a = 5$，$b = 6$，$c = 4$ の △ABC がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AD，AM の長さを求めよ。

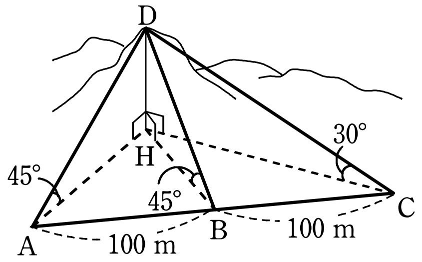
9 △ABC が次の条件を満たすとすれば，どんな三角形か。

(1) $\sin A = \sin B$

(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

実戦問題篇

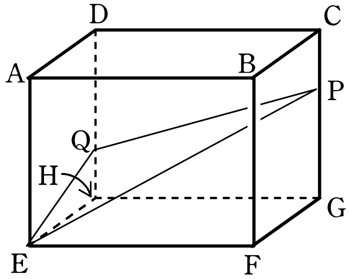
10 右の図のように１つの直線上に並ぶ水平面上の３点 A，B，C から山頂 D の仰角を測ると，それぞれ 45°，45°，30° であったという。
AB＝100 m，BC＝100 m であるとき，山の高さを求めよ。



11 AB＝4，AE＝AD＝3 である直方体 ABCD－EFGH において，辺 CG と辺 HD を１：2 に内分する点をそれぞれ P と Q とする。このとき，

EP＝ア［　　］で，cos∠EQP＝イ［　　］である。

さらに，△EPQ の面積はウ［　　］で，三角錐 AEPQ の体積はエ［　　］である。また，点 A から △EPQ に下ろした垂線の長さはオ［　　］である。



12 △ABC において，頂角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．次の関係式が成立するとき，△ABC はどのような形の三角形か．

$$a\sin A(\sin B-\sin C)=b\sin^2 B-(b+c)\sin B\sin C-c\cos^2 C+c$$

13 四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝8，CD＝4，対角線 AC の長さを AC=7 とする。

このとき，$\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の［オ］には下の ⓪～② から，［カ］には ③，④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

CD［オ］AB･sin∠ABC であるから，［カ］である。

⓪　＜　　①　＝　　②　＞

③　辺 AD と辺 BC が平行　　④　辺 AB と辺 CD が平行

したがって，BD＝$\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

数学①　第３回試験　三角比

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$　(2)　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$\theta=30^\circ$，150°　(2)　$\theta=135^\circ$　(3)　$\theta=30^\circ$　(4)　$\theta=60^\circ$，180°

$\boxed{3}$ 解答　$c=2$，$R=\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$b=2\sqrt{7}$　(2)　$C=135^\circ$

$\boxed{5}$ 解答　$R=\frac{\sqrt{21}}{3}$，$r=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ 解答　$\cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\cos^3\theta+\sin^3\theta=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$\frac{7}{2}$　(2)　$\frac{7\sqrt{15}}{4}$　(3)　$1:3$

$\boxed{8}$ 解答　$\mathrm{AD}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　BC＝CA の二等辺三角形

(2)　BC＝CA の二等辺三角形　または　∠C＝90° の直角三角形

$\boxed{10}$ 解答　100 m

$\boxed{11}$ 解答　(ア)　$\sqrt{29}$　(イ)　$-\frac{1}{\sqrt{170}}$　(ウ)　$\frac{13}{2}$　(エ)　6　(オ)　$\frac{36}{13}$

$\boxed{12}$ 解答　AB＝AC の二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形

$\boxed{13}$ 解答　$\frac{(ア)}{(イ)}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{\sqrt{(ウ)}}{(エ)}$　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(オ)　⓪　(カ)　④　(キ)$\sqrt{(ク)}$　$4\sqrt{7}$

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta>0$ であるから　$\cos\theta>0$ で

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ であるから　$\cos\theta<0$ で

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

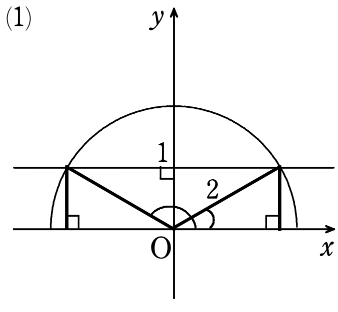
$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

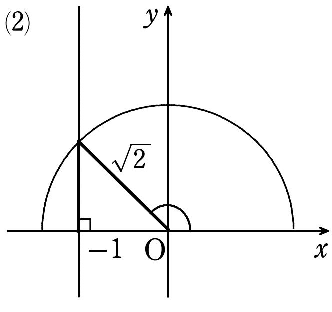
$\boxed{2}$ (1) $2\sin\theta-1=0$ から　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\theta=30°,\ 150°$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\theta=135°$





(3) $3\tan\theta=\sqrt{3}$ から　　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$\theta=30°$

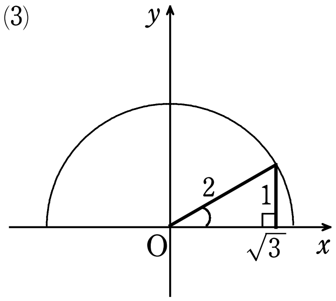
(4) $(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$ から　　$\cos\theta+1=0$　または　$2\cos\theta-1=0$

すなわち　　$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

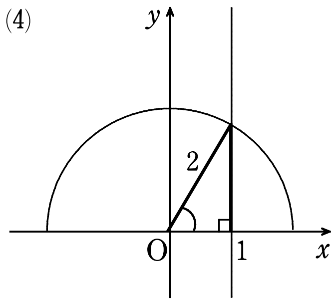
$\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180°$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=60°$

よって　　$\theta = 60^\circ$，180°

(3)



(4)



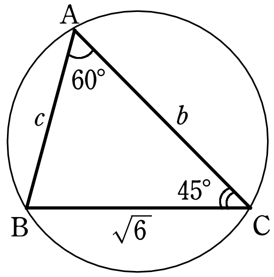
$\boxed{3}$ 正弦定理から　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{c}{\sin 45^\circ}$

$$c = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$



$\boxed{4}$ (1)　余弦定理により

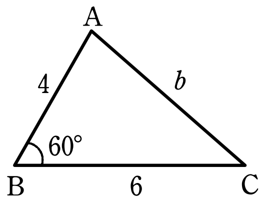
$$b^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 52 - 24 = 28$$

$b > 0$ であるから

$$b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

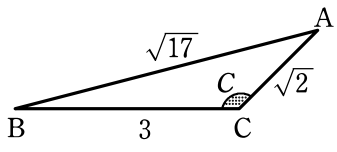


(2)　余弦定理により

$$\cos C = \frac{3^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{17})^2}{2 \cdot 3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{9 + 2 - 17}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　　$C = 135^\circ$



$\boxed{5}$ 余弦定理により　　$\cos A = \dfrac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2}$

よって　　$A = 60^\circ$

正弦定理により　　$2R = \dfrac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

ゆえに　　$R = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

また，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ に代入して　$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(\sqrt{7}+3+2)$

ゆえに　$r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}$$

すなわち　$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

ここで　$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

$$\cos\theta+\sin\theta>0$$

ゆえに　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

また　$\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$\boxed{7}$ (1)　△ABC に余弦定理を適用すると

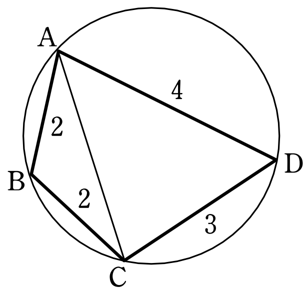
$AC^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos B=8-8\cos B$　…… ①

△ACD に余弦定理を適用すると

$AC^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cos D=25-24\cos D$　…… ②

四角形 ABCD は円に内接するから　$D=180^\circ-B$

…… ③



①，②，③ から　$8-8\cos B=25+24\cos B$

したがって　$32\cos B=-17$　　$\cos B=-\frac{17}{32}$

① に代入して　$AC^2=\frac{49}{4}$

$AC>0$ であるから　$AC=\frac{7}{2}$

(2)　(1) から　$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{17}{32}\right)^2}=\frac{7\sqrt{15}}{32}=\sin D$

よって　四角形 ABCD の面積を S とすると

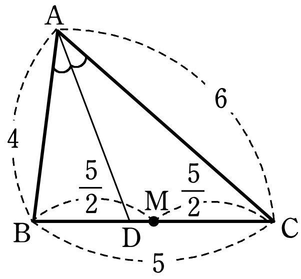
$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin B+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin D=8\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

(3)　BE：ED＝△ABC：△ACD

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin B : \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin D=2\sin B : 6\sin B=1:3$$

8　△ABC に余弦定理を適用して



$$\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8}$$

また　AD は頂角 A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝4：6＝2：3

したがって　$BD=\frac{2}{5}BC=\frac{2}{5}\cdot 5=2$

よって　△ABD に余弦定理を適用すると

$$AD^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{8}=18$$

$AD>0$ であるから　$AD=3\sqrt{2}$

△ABM に余弦定理を適用して

$$AM^2=4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{79}{4}$$

$AM>0$ であるから　$AM=\frac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ (1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$

$\sin A=\sin B$ から $\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b}{2R}$ すなわち $a=b$

よって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形である。

(2) 正弦定理により $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理により $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$ から $\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって $a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$ すなわち $a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$

ゆえに $(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)c^2=0$

よって $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a>0$，$b>0$ であるから $a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

したがって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形である。

$\boxed{10}$ 山の高さを DH＝x (m) とすると HA＝x，HB＝x，HC＝$\sqrt{3}\,x$

△HAB において，余弦定理により $\cos A=\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot100\cdot x}$ ……①

△HAC において，余弦定理により $\cos A=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot200\cdot x}$ ……②

①，② から $\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot100\cdot x}=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot200\cdot x}$

整理すると $x^2=10000$ $x>0$ であるから $x=100$

したがって，山の高さは 100 m

$\boxed{11}$ 条件から　CP＝HQ＝1，GP＝DQ＝2

(ア)　$EG=\sqrt{4^2+3^2}=5$ であるから

$$EP=\sqrt{EG^2+GP^2}=\sqrt{5^2+2^2}={}^{ア}\sqrt{\mathbf{29}}$$

(イ)　$EQ=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，　$PQ=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

△EPQ において，余弦定理により

$$\cos\angle EQP=\frac{EQ^2+PQ^2-EP^2}{2EQ\cdot PQ}=\frac{10+17-29}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}}={}^{イ}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{170}}}$$

(ウ)　$\sin\angle EQP>0$ であるから

$$\sin\angle EQP=\sqrt{1-\cos^2\angle EQP}=\sqrt{1-\frac{1}{170}}=\frac{13}{\sqrt{170}}$$

よって　$\triangle EPQ=\frac{1}{2}EQ\cdot PQ\sin\angle EQP=\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{13}{\sqrt{170}}={}^{ウ}\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}$

(エ)　三角錐 AEPQ の底面を △AEQ とすると，高さは 4 である。

よって，三角錐 AEPQ の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle AEQ\times 4=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 4={}^{エ}\mathbf{6}$$

(オ)　A から △EPQ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle EPQ\times h=\frac{13}{6}h$$

よって　$\frac{13}{6}h=6$　　ゆえに　$h={}^{オ}\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{13}}$

$\boxed{12}$ $\cos^2 C=1-\sin^2 C$

△ABC の外接円の半径を R とする．正弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a}{2R}\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right)=b\left(\frac{b}{2R}\right)^2-(b+c)\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}-c\left\{1-\left(\frac{c}{2R}\right)^2\right\}+c$$

両辺に $4R^2$ を掛けると　$a^2(b-c)=b^3-(b+c)bc+c^3$

ゆえに　$a^2(b-c)=b^2(b-c)-c^2(b-c)$

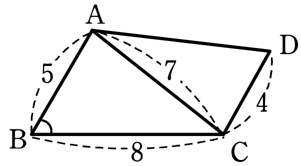
したがって　$(b-c)(a^2-b^2+c^2)=0$

よって　$b=c$　または　$a^2+c^2=b^2$

ゆえに，△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形.

$\boxed{13}$ △ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}$$
$$=\frac{40}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{1}{2}$$



よって，$\angle ABC=60°$ であるから　$\sin\angle ABC=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ここで　CD＝4

$$AB\cdot\sin\angle ABC=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{5\cdot 1.7}{2}=4.25$$

よって　$CD<AB\cdot\sin\angle ABC$　……①（⓪）

四角形 ABCD が台形であるとき AD∥BC または AB∥CD が成り立つ。

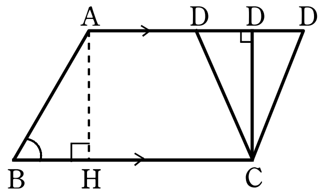
頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると，① から

$$AH=AB\cdot\sin\angle ABC>CD \quad \cdots\cdots ②$$

AD∥BC が成り立つと仮定すると，右の図のように

$$AH\leqq CD$$

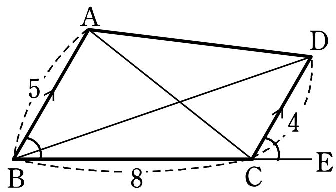
となるが，これは ② に矛盾する。



よって，AD∥BC は成り立たないから，AB∥CD となる。

すなわち，辺 AB と辺 CD が平行である。（④）

右の図のように，辺 BCの延長上に点 E をとる。



AB∥CD から　$\angle DCE=\angle ABC=60^\circ$

△BCD において，余弦定理により

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$$
$$=8^2+4^2-2\cdot 8\cdot 4\cos(180^\circ-60^\circ)=112$$

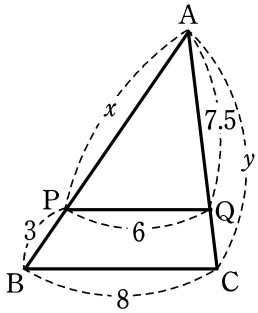
$BD>0$ であるから　$BD=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$

BASIC＋STANDARD問題

[1] 3辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形がある。このとき，a の値の範囲を求めよ。
また，この三角形が直角三角形となるとき，a の値を求めよ。

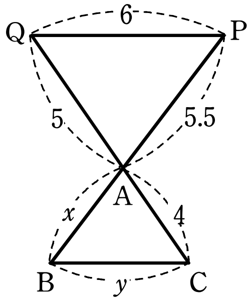
[2] 次の図において，x，y の値を求めよ。

(1)



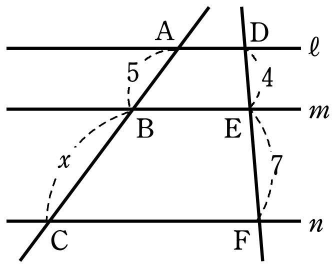
PQ∥BC

(2)



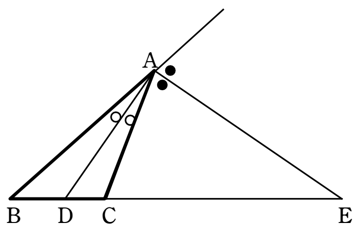
PQ∥BC

(3)



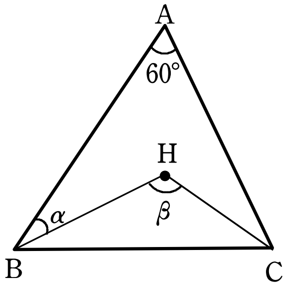
ℓ ∥ m ∥ n

[3] 下の図で，AB＝6，BC＝3，CA＝4 であり，AD は ∠BAC の二等分線，AE は∠BAC の外角の二等分線である。
BD の長さと BE の長さをそれぞれ求めよ。

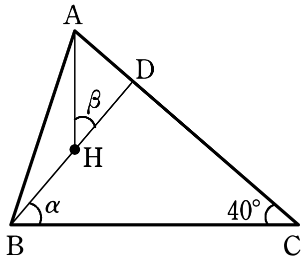


[4] 下の図において，点 H は △ABC の垂心である。角 α，β を求めよ。

(1)

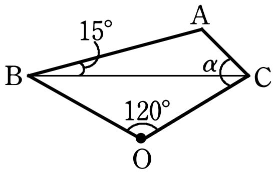


(2)

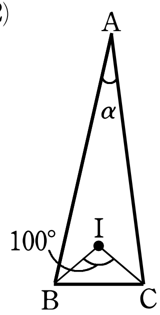


5　右の図で，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。α を求めよ。

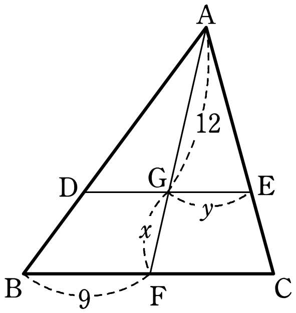
(1)



(2)



6　右の図において，点 G は △ABC の重心であり，DE∥BC である。このとき，x，y の値を求めよ。

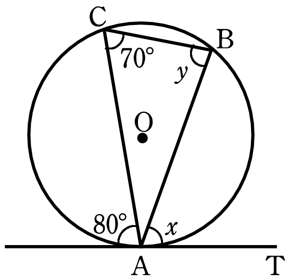


7　△ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 R，Q があり，AR：RB＝5：1，AQ：QC＝2：3 である。線分 BQ と CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とするとき，次の比を求めよ。

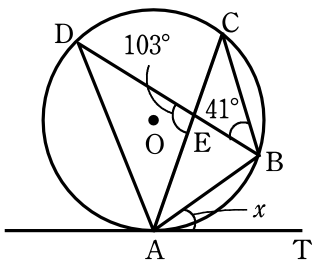
(1)　BP：PC　　(2)　AO：OP　　(3)　△ABC：△OBC

8　次の図において，直線 AT は点 A で円 O に接している。x と y を求めよ。

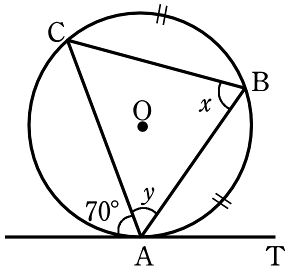
(1)



(2)

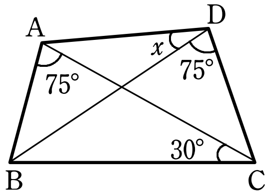


(3)

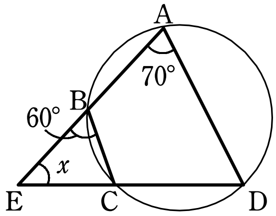


9　次の図において，角 x の大きさを求めよ。

(1)

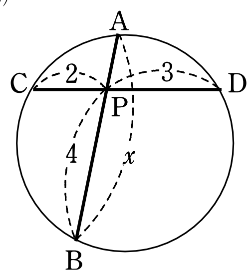


(2)

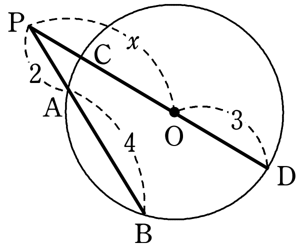


10　下の図において，x の値を求めよ。O は円の中心とする。

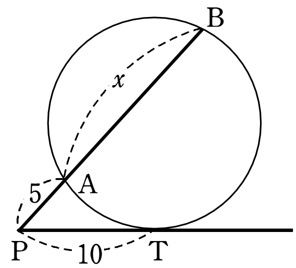
(1)



(2)

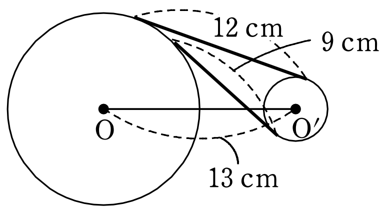


(3)



PT は円の接線

11　右の図のように，中心間の距離が 13 cm，共通外接線の長さが 12 cm，共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O，O′ がある。
この 2 つの円の半径を，それぞれ求めよ。



12　3 辺の長さが a，b，c の直角三角形の外接円の半径が $\frac{3}{2}$，内接円の半径が $\frac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　b と c の値を求めよ。

実戦問題

13 AB＝2，BC＝x，AC＝$4-x$ であるような △ABC がある。

(1)　x の値の範囲を求めよ。

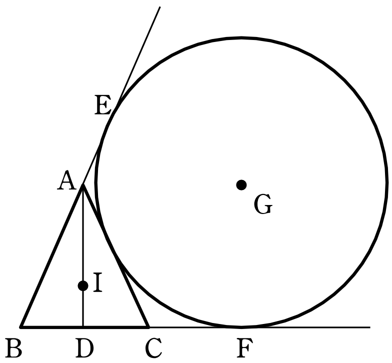
(2)　△ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

14 鋭角三角形 ABC において，AB＝8 とする。辺 AC を 1：2 に内分する点を D とし，辺 BC を 3：2 に内分する点を E とする。このとき，2 点 D，E を通る直線 ℓ と 2 点 A，B を通る直線の交点を P とすると，AP＝ア$\boxed{}$ である。また，直線 ℓ と三角形 ABC の外接円との 2 つの交点のうち P に近い方の交点を Q とし，他の交点を R とする。このとき，PQ＝3 ならば，QR＝イ$\boxed{}$ である。

15 AB＝AC である二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし，内接円と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で，辺 BC の延長と点 F で接し，辺 AC と接する ∠B 内の円の中心を G とする。

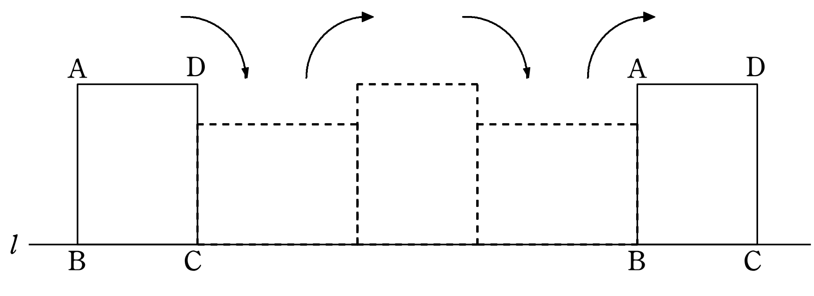
(1)　AD＝GF となることを証明せよ。

(2)　AB＝7，BD＝3 のとき，IG の長さを求めよ。



16 C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする．いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ．

17 （出典・2009常総学院高）
図のように，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CA＝5 cm である長方形 ABCD を直線 l に沿って，滑ることなくちょうど 1 回転するまで転がす。



頂点 B が動いた跡の線の長さはア$\boxed{}$$\pi$ cm であり，頂点 B が動いた跡の線と直線 l とで囲まれた部分の面積はイ$\boxed{}$ cm^2 である。ただし，π は円周率とする。

$\boxed{1}$ 解答　(前半)　$17<a<49$　　(後半)　$a=21,\ 41$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$x=9,\ y=10$　　(2)　$x=4.4,\ y=4.8$　　(3)　$x=8.75$

$\boxed{3}$ 解答　$\mathrm{BD}=\dfrac{9}{5},\ \mathrm{BE}=9$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$\alpha=30^\circ,\ \beta=120^\circ$　　(2)　$\alpha=50^\circ,\ \beta=40^\circ$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　75°　　(2)　20°

$\boxed{6}$ 解答　$x=6,\ y=6$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$2:15$　　(2)　$17:3$　　(3)　$20:3$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$x=70^\circ,\ y=80^\circ$　　(2)　$x=36^\circ$　　(3)　$x=70^\circ,\ y=55^\circ$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　$x=30^\circ$　　(2)　$x=50^\circ$

$\boxed{10}$ 解答　(1)　$x=\dfrac{11}{2}$　　(2)　$x=\sqrt{21}$　　(3)　$x=15$

$\boxed{11}$ 解答　$\left(\sqrt{22}+\dfrac{5}{2}\right)\mathrm{cm},\ \left(\sqrt{22}-\dfrac{5}{2}\right)\mathrm{cm}$

$\boxed{12}$ 解答　(1)　$a=3$　　(2)　$b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2},\ c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{13}$ 解答　(1)　$1<x<3$　　(2)　$\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

$\boxed{14}$ 解答　(ア)　4　　(イ)　13

$\boxed{15}$ 解答　(1)　略　　(2)　$\mathrm{IG}=\dfrac{7\sqrt{35}}{5}$

$\boxed{16}$ 解答　$a=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

$\boxed{17}$ 解答　(ア)　6　　(イ)　$\dfrac{25}{2}\pi+12$

$\boxed{1}$ (前半) 3辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形が存在するための条件は

$$a-(a-1)<50-a<a+(a-1)$$

すなわち $1<50-a<2a-1$

$1<50-a$ から $a<49$ $50-a<2a-1$ から $a>17$

よって，求める a の値の範囲は $17<a<49$ ……①

(後半) $a>a-1$ であるから，直角三角形となるのは次の [1]，[2] のどちらかである。

[1] 長さ a の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から $(a-1)^2+(50-a)^2=a^2$

整理すると $a^2-102a+2501=0$

$(a-41)(a-61)=0$

これを解くと $a=41$，61 ① を満たすのは $a=41$

[2] 長さ $50-a$ の辺が斜辺になる場合

三平方の定理から $(a-1)^2+a^2=(50-a)^2$

整理すると $a^2+98a-2499=0$

$(a-21)(a+119)=0$

これを解くと $a=21$，-119 ① を満たすのは $a=21$

したがって，求める a の値は $a=21$，41

$\boxed{2}$ (1) PQ∥BC であるから

AP：AB＝PQ：BC ……①， AQ：AC＝PQ：BC ……②

① から $x:(x+3)=6:8$ ゆえに $8x=6(x+3)$ よって $x=9$

② から $7.5:y=6:8$ ゆえに $6y=60$ よって $y=10$

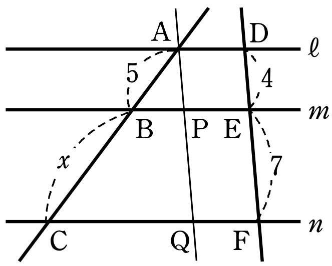
(2) PQ∥BC であるから

AP：AB＝AQ：AC ……①， PQ：BC＝AQ：AC ……②

① から $5.5:x=5:4$ ゆえに $5x=22$ よって $x=4.4$

② から $6:y=5:4$ ゆえに $5y=24$ よって $y=4.8$

(3) 点 A を通り，DF に平行な直線を引き，m，n との交点をそれぞれ P，Q とする。



BP∥CQ であるから

AB：BC＝AP：PQ ……①

また，四角形 APED，PQFE は，ともに2組の対辺が平行であるから平行四辺形である。

よって AP＝DE＝4，PQ＝EF＝7

ゆえに，① から $5:x=4:7$

よって $4x=35$ ゆえに $x=8.75$

$\boxed{3}$ BD の長さを x とおく。

AB：AC＝BD：DC が成り立つから $6:4=x:(3-x)$

よって　$2x=3(3-x)$　ゆえに　$x=\frac{9}{5}$

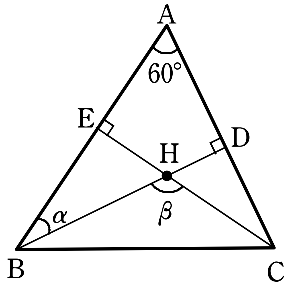
また，BE の長さを y とおく。

AB : AC＝BE : EC が成り立つから　$6:4=y:(y-3)$

よって　$2y=3(y-3)$　ゆえに　$y=9$

したがって　$\mathrm{BD}=\frac{9}{5}$，$\mathrm{BE}=9$

$\boxed{4}$ (1) 線分 BH の延長と辺 AC の交点を D，線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。



H は △ABC の垂心であるから

$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AEC}=90^\circ$

△ABD の内角の和は 180° であるから

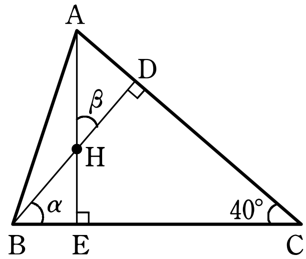
$\alpha+60^\circ+90^\circ=180^\circ$

よって　$\alpha=30^\circ$

また，$\angle\mathrm{BHC}=\angle\mathrm{BEH}+\angle\mathrm{EBH}$ であるから

$\beta=90^\circ+30^\circ=120^\circ$

(2) 線分 AH の延長と辺 BC の交点を E とする。



H は △ABC の垂心であるから

$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AEB}=90^\circ$

△BDC の内角の和は 180° であるから

$\alpha+90^\circ+40^\circ=180^\circ$

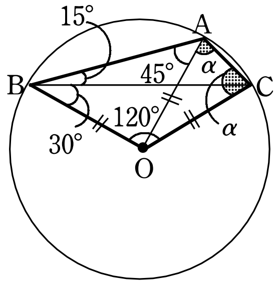
よって　$\alpha=50^\circ$

また，$\angle\mathrm{AHD}=\angle\mathrm{BHE}$ であり，△BHE の内角の和は 180° であるから

$50^\circ+90^\circ+\beta=180^\circ$

よって　$\beta=40^\circ$

$\boxed{5}$ (1) OB＝OC であるから



$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OCB}=(180^\circ-120^\circ)\div2=30^\circ$

よって　$\angle\mathrm{ABO}=15^\circ+30^\circ=45^\circ$

O と A を結ぶと，OA＝OB であるから

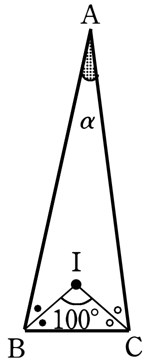
$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABO}=45^\circ$

ゆえに　$\angle\mathrm{BOA}=180^\circ-2\times45^\circ=90^\circ$

よって　$\angle\mathrm{AOC}=120^\circ-90^\circ=30^\circ$

また，OA＝OC であるから　$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}=\alpha$

したがって　$\alpha=(180^\circ-30^\circ)\div2=75^\circ$



(2) △IBC において

$\angle IBC + \angle ICB = 180° - 100° = 80°$ …… ①

BI は ∠B の二等分線であるから

$\angle B = 2\angle IBC$ …… ②

CI は ∠C の二等分線であるから

$\angle C = 2\angle ICB$ …… ③

よって $\alpha = 180° - (\angle B + \angle C)$

②，③ を代入して

$\alpha = 180° - (2\angle IBC + 2\angle ICB)$

$= 180° - 2(\angle IBC + \angle ICB)$

① を代入して $\alpha = 180° - 2 \times 80° = 20°$

6 重心 G は中線 AF を 2：1 に内分するから $12 : x = 2 : 1$

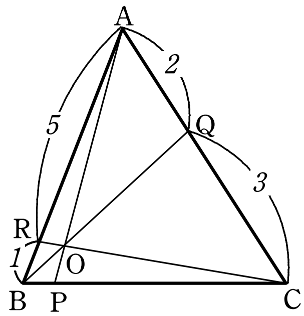
よって $2x = 12$ したがって $x = 6$

また，F は辺 BC の中点であるから $FC = BF = 9$

GE∥FC であるから $GE : FC = AG : AF = 2 : 3$

よって $y : 9 = 2 : 3$ ゆえに $3y = 18$ したがって $y = 6$

7 (1) △ABC と点 O にチェバの定理を用いると



$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

よって $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{1} = 1$ ゆえに $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{15}$

したがって $BP : PC = 2 : 15$

(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BR}{RA} = 1$$

ここで，(1) の結果から $PC : CB = 15 : 17$

よって $\frac{AO}{OP} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{5} = 1$ ゆえに $\frac{AO}{OP} = \frac{17}{3}$

したがって $AO : OP = 17 : 3$

(3) 辺 BC は △ABC と △OBC の共通の底辺であるから

$\triangle ABC : \triangle OBC = AP : OP$

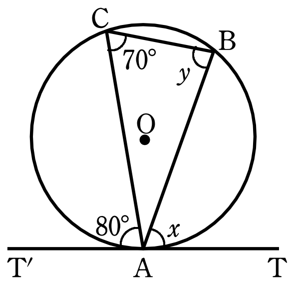
(2) の結果から $AP : OP = 20 : 3$

したがって $\triangle ABC : \triangle OBC = 20 : 3$

8 (1)　右の図において，接線と弦の作る角により

$x=\angle \mathrm{ACB}=70°$

$y=\angle \mathrm{CAT'}=80°$



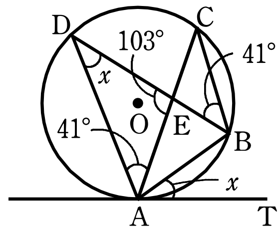
(2)　接線と弦の作る角により　$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{BAT}=x$

また，円周角の定理により　$\angle \mathrm{DAC}=\angle \mathrm{DBC}=41°$

よって，△ADE において

$x=180°-(\angle \mathrm{DAE}+\angle \mathrm{DEA})$

$=180°-(41°+103°)=36°$



(3)　右の図において，接線と弦の作る角により

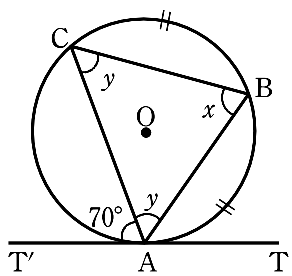
$x=\angle \mathrm{CAT'}=70°$　…… ①

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ であるから　$\angle \mathrm{BCA}=\angle \mathrm{CAB}=y$

よって，△ABC において　$x+y+y=180°$

これと ① から　$70°+2y=180°$

したがって　$y=55°$



9 (1)　$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDC}$ $(=75°)$ から，弧 BC に対する円周角が等しいので，四角形 ABCD は円に内接する。よって　$x=\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ACB}=30°$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているので，$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{EBC}=60°$

よって，△AED において　$x+70°+60°=180°$

したがって　$x=50°$

10 (1)　方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$　すなわち　$(x-4)\cdot 4=2\cdot 3$

整理して　$4x=22$　よって　$x=\dfrac{11}{2}$

(2)　CO は円 O の半径であるから　$\mathrm{CO}=3$　よって　$\mathrm{PC}=x-3$

方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$　すなわち　$2\cdot(2+4)=(x-3)(x+3)$

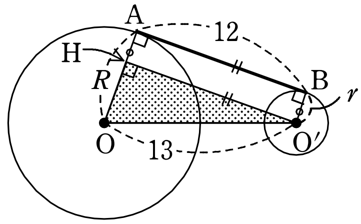
整理して　$x^2=21$　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{21}$

(3)　方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$　すなわち　$5(5+x)=10^2$

整理して　$5x=75$　よって　$x=15$

11 円 O の半径を R cm，円 O′ の半径を r cm $(R>r)$ とする。

円 O，O′ と共通外接線との接点を，それぞれ A，B とする。



O′ から OA に引いた垂線を O′H とすると，

∠A＝∠B＝90° であるから

$$\mathrm{HO'}=\mathrm{AB}=12\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BO'}=r\ (\mathrm{cm})$$

よって　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}-\mathrm{AH}=R-r\ (\mathrm{cm})$

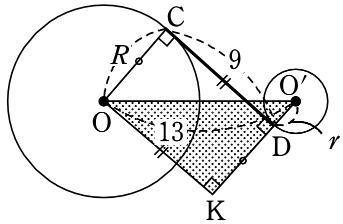
△OO′H において，∠H＝90° であるから　$\mathrm{OH}^2+\mathrm{HO'}^2=\mathrm{OO'}^2$

すなわち　$(R-r)^2+12^2=13^2$

ゆえに　$(R-r)^2=25$

$R-r>0$ であるから　$R-r=5$　……①

円 O，O′ と共通内接線との接点を，それぞれ C，D とする。



O から O′D の延長に引いた垂線を OK とすると，

∠C＝∠D＝90° であるから

$$\mathrm{OK}=\mathrm{CD}=9\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{KD}=\mathrm{OC}=R\ (\mathrm{cm})$$

よって　$\mathrm{KO'}=\mathrm{KD}+\mathrm{DO'}=R+r\ (\mathrm{cm})$

△O′OK において，∠K＝90° であるから　$\mathrm{OK}^2+\mathrm{KO'}^2=\mathrm{OO'}^2$

すなわち　$9^2+(R+r)^2=13^2$

ゆえに　$(R+r)^2=88$

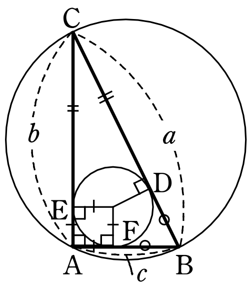
$R+r>0$ であるから　$R+r=2\sqrt{22}$　……②

①＋② から　$2R=2\sqrt{22}+5$　よって　$R=\sqrt{22}+\dfrac{5}{2}$ (cm)

②－① から　$2r=2\sqrt{22}-5$　よって　$r=\sqrt{22}-\dfrac{5}{2}$ (cm)

12 (1)　$a \geqq b \geqq c$ であるから，直角三角形の斜辺の長さは a である。直角三角形の斜辺の長さは外接円の直径の長さと等しいから

$$a=2\times\frac{3}{2}=3$$



(2)　直角三角形を右の図のように △ABC と表し，内接円との接点を D，E，F と定める。

$\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{AF}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BF}=c-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=b-\frac{1}{2}$$

$\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}$ であるから　$b+c-1=3$

よって　$b+c=4$　……①

また，三平方の定理から　$b^2+c^2=3^2$　……②

①，② から，c を消去して　$b^2+(4-b)^2=9$

ゆえに　$2b^2-8b+7=0$

よって　$b=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$

このとき，① から　$c=\dfrac{4\mp\sqrt{2}}{2}$（上の b と複号同順）

$b\geqq c$ であるから　$b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，$c=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

13 (1)　2，x，$4-x$ が三角形の 3 辺の長さとなるための条件は，次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2+x>4-x$　……①

$x+(4-x)>2$　……②

$(4-x)+2>x$　……③

① を解くと　$x>1$

② は，$4>2$ となり常に成り立つ。

③ を解くと　$x<3$

よって，求める x の値の範囲は　$1<x<3$　……④

(2)　△ABC が鋭角三角形となるための条件は，④ および次の 3 つの不等式が同時に成り立つことである。

$2^2<x^2+(4-x)^2$　……⑤

$x^2<(4-x)^2+2^2$　……⑥

$(4-x)^2<x^2+2^2$　……⑦

⑤ から　$2(x^2-4x+6)>0$

$x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ であるから，⑤ は常に成り立つ。

⑥ から　$8x-20<0$　よって　$x<\dfrac{5}{2}$　……⑥′

⑦ から　$8x-12>0$　よって　$x>\dfrac{3}{2}$　……⑦′

④，⑥′，⑦′ の共通範囲を求めて　$\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

14 △ABC と直線 PE にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PA}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$$

ゆえに，$\dfrac{BP}{PA}=3$ から　　BP：PA＝3：1

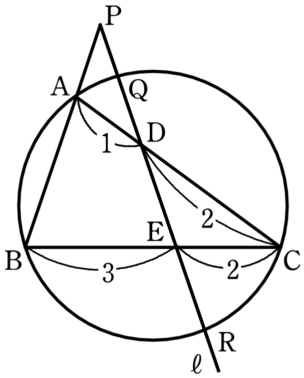
よって，AB：AP＝2：1 であり，AB＝8 であるから

AP＝^{ア}4

方べきの定理により　　PA・PB＝PQ・PR

すなわち　　4・12＝3・(3＋QR)

よって　　QR＝^{イ}13



15 (1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから，

∠DAB＝α とおくと　∠DAC＝α

また，AE，AC は円 G の接線であるから，

∠EAG＝β とおくと　∠CAG＝β

ここで，

∠BAD＋∠DAC＋∠CAG＋∠GAE＝180°

であるから　$\alpha+\alpha+\beta+\beta=180°$

よって　　$\alpha+\beta=90°$

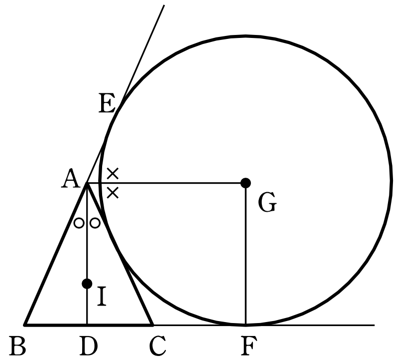
すなわち

∠DAG＝∠DAC＋∠CAG＝90°　……①

また　∠ADF＝90°，∠GFD＝90°　……②

よって，①，② より，四角形 ADFG は長方形である。

したがって　AD＝GF



(2)　$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

BI は ∠ABD の二等分線であるから

AI：ID＝AB：BD＝7：3

よって　$AI=\dfrac{7}{10}AD=\dfrac{7}{10}\times2\sqrt{10}=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$

(1) より，四角形 ADFG は長方形であるから

AG∥BF

ゆえに　∠AGB＝∠GBF

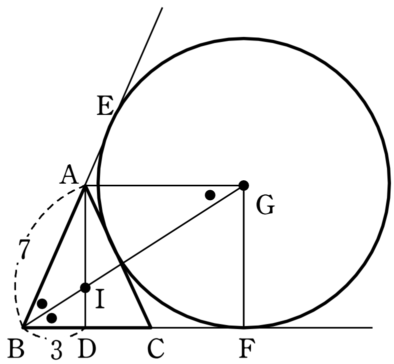
また　　∠ABG＝∠GBF

よって　∠AGB＝∠ABG

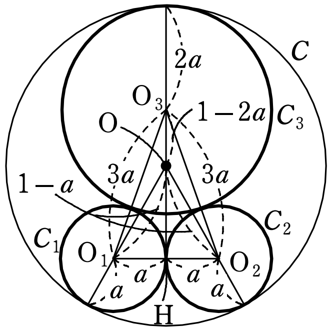
したがって，△ABG は二等辺三角形であるから　AG＝AB＝7

△AIG において，三平方の定理により

$$IG=\sqrt{AI^2+AG^2}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)^2+7^2}=\frac{7\sqrt{35}}{5}$$



16 円 C，C_1，C_2，C_3 の中心をそれぞれ O，O_1，O_2，O_3 とし，2 円 C_1，C_2 の接点を H とする．



このとき　$OO_1=1-a$，$O_1O_3=a+2a=3a$

$\triangle OO_1H$ において，三平方の定理から

$OH=\sqrt{(1-a)^2-a^2}=\sqrt{1-2a}$

また　$OO_3=1-2a$

$\triangle O_3O_1H$ において，三平方の定理から

$O_3H=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}\,a$

$OH+OO_3=O_3H$ であるから　$\sqrt{1-2a}+(1-2a)=2\sqrt{2}\,a$

ゆえに　$\sqrt{1-2a}=2(1+\sqrt{2})a-1$ ……①

① の左辺の根号内が 0 以上であることから　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$

① の右辺が 0 以上であることから　$a\geqq\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

よって　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ ……②

① の両辺を平方し，整理すると　$2(3+2\sqrt{2})a^2=(1+2\sqrt{2})a$

$a>0$ であるから　$2(3+2\sqrt{2})a=1+2\sqrt{2}$

よって　$a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

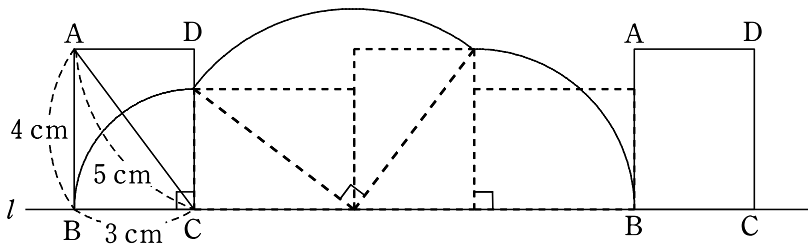
これは ② を満たす．

17 求める長さは，下の図の 3 つの弧の長さの和であるから

$$2\pi\times3\times\frac{90}{360}+2\pi\times5\times\frac{90}{360}+2\pi\times4\times\frac{90}{360}$$
$$=6\pi\,(\mathrm{cm})$$

求める面積は，3 つのおうぎ形と長方形 1 個分であるから

$$\pi\times3^2\times\frac{90}{360}+\pi\times5^2\times\frac{90}{360}+\pi\times4^2\times\frac{90}{360}+3\times4$$
$$=\frac{25}{2}\pi+12\,(\mathrm{cm}^2)$$


A
D
A
D
4 cm
5 cm
l
B
3 cm
C
B
C

BASIC+Standard問題

1 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $28x+95y=3$　　(2) $103x-75y=7$

3 (1) 方程式 $xy-2x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $3xy+3x+y=5$ を満たす 2 つの整数 x，y の組をすべて求めよ。

4 n は自然数とする。$n^2-28n+160$ が素数となるような n をすべて求めよ。

5 (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。

6 n を正の整数とする。$N=1890n$ とすると，$\sqrt{N}$ が整数になるような最小の n の値を求めよ。

7 $5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ.

8 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1) $xyz=x+y+z$　$(x<y<z)$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　$(x\leqq y\leqq z)$

実践問題

9 $\dfrac{40}{21}$，$\dfrac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

10 方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

11 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

12 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ になり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

13 100! を素因数分解すると，$2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^{16}\cdot11^9\cdot13^7\cdots\cdots$ となる。a，b，c の値を求めよ。

14 素数 p，q，r に対して $2p^3qr+19p^2q^2r-10pq^3r=111111$ が成り立つとき，p，q，r の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　173

$\boxed{2}$ 解答　k は整数とする。

(1)　$x=95k+51$，$y=-28k-15$　　(2)　$x=75k-56$，$y=103k-77$

$\boxed{3}$ 解答　$(x,\ y)=(-4,\ -7)$，$(-2,\ -1)$，$(4,\ 1)$，$(-6,\ 11)$，$(-8,\ 5)$，$(-14,\ 3)$

解答　$(x,\ y)=(-1,\ -4)$，$(0,\ 5)$

$\boxed{4}$ 解答　$n=7$，21

$\boxed{5}$ 解答　(1)　24　　(2)　5130

$\boxed{6}$ 解答　210

$\boxed{7}$ 解答　$(x,\ y)=(1,\ -2)$，$(1,\ -4)$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{9}$ 解答　$\dfrac{273}{8}$

$\boxed{10}$ 解答　$x=-77+539t,\ y=7-48t$ (t は整数)

$\boxed{11}$ 解答　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 6,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 6)$，$(3,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 2,\ 3)$，$(6,\ 3,\ 2)$，
$(2,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{12}$ 解答　$a=2$，$b=3$，$c=1$；$N=66$

$\boxed{13}$ 解答　$a=97$，$b=48$，$c=24$

$\boxed{14}$ 解答　(ア)　7　　(イ)　3　　(ウ)　13

$\boxed{1}$

$$\begin{aligned}32351&=23009\cdot1+9342\\23009&=9342\cdot2+4325\\9342&=4325\cdot2+692\\4325&=692\cdot6+173\\692&=173\cdot4+0\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 6 & 2 & 2 & 1\\ 173\,\overline{)\,692} & \overline{)\,4325} & \overline{)\,9342} & \overline{)\,23009} & \overline{)\,32351}\\ \underline{692} & \underline{4152} & \underline{8650} & \underline{18684} & \underline{23009}\\ 0 & 173 & 692 & 4325 & 9342 \end{array}$$

よって，最大公約数は　173

$\boxed{2}$ (1)　　$28x+95y=3$　　…… ①

$x=17$，$y=-5$ は，$28x+95y=1$ の整数解の1 つである。

よって　　$28\cdot17+95\cdot(-5)=1$

両辺に 3 を掛けると

$$28\cdot51+95\cdot(-15)=3 \quad\text{…… ②}$$

①−② から　$28(x-51)+95(y+15)=0$　…… ③

28 と 95 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$$x-51=95k,\ \ y+15=-28k\ \ (k\text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=95k+51,\ \ y=-28k-15\ \ (k\text{ は整数})$$

$\boxed{\text{参考}}$1　28 と 95 に互除法を用いると

$95=28\cdot3+11$　　移項すると　$11=95-28\cdot3$

$28=11\cdot2+6$　　移項すると　$6=28-11\cdot2$

$11=6\cdot1+5$　　移項すると　$5=11-6\cdot1$

$6=5\cdot1+1$　　移項すると　$1=6-5\cdot1$

よって

$$\begin{aligned}1&=6-5\cdot1=6-(11-6\cdot1)\cdot1\\&=6\cdot2-11\cdot1=(28-11\cdot2)\cdot2-11\cdot1\\&=28\cdot2-11\cdot5=28\cdot2-(95-28\cdot3)\cdot5\\&=28\cdot17+95\cdot(-5)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{参考}}$2　$a=28$，$b=95$ とおく。

$11=95-28\cdot3$ より　$11=b-a\cdot3=-3a+b$

$6=28-11\cdot2$ より　$6=a-(-3a+b)\cdot2$

$=7a-2b$

$5=11-6\cdot1$ より　$5=(-3a+b)-(7a-2b)$

$=-10a+3b$

$1=6-5\cdot1$ より　$1=(7a-2b)-(-10a+3b)$

$=17a-5b$

よって，$17a-5b=1$ より　$28\cdot17+95\cdot(-5)=1$

(2)　　$103x-75y=7$　　…… ①

$x=-8$，$y=-11$ は，$103x-75y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

両辺に 7 を掛けると

$103\cdot(-56)-75\cdot(-77)=7$ ……②

①－② から　$103(x+56)-75(y+77)=0$ ……③

103 と 75 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x+56=75k$，$y+77=103k$　(k は整数)

したがって，① のすべての整数解は

$x=75k-56$，$y=103k-77$　(k は整数)

$\boxed{\text{参考}}$ 1　103 と 75 に互除法を用いると

$103=75\cdot1+28$　移項すると　$28=103-75\cdot1$

$75=28\cdot2+19$　移項すると　$19=75-28\cdot2$

$28=19\cdot1+9$　移項すると　$9=28-19\cdot1$

$19=9\cdot2+1$　移項すると　$1=19-9\cdot2$

よって　$1=19-9\cdot2=19-(28-19\cdot1)\cdot2$

$=19\cdot3-28\cdot2=(75-28\cdot2)\cdot3-28\cdot2$

$=75\cdot3-28\cdot8=75\cdot3-(103-75\cdot1)\cdot8$

$=103\cdot(-8)-75\cdot(-11)$

$\boxed{\text{参考}}$ 2　$a=103$，$b=75$ とおく。

$28=103-75\cdot1$ より　$28=a-b$

$19=75-28\cdot2$ より　$19=b-(a-b)\cdot2$

$=-2a+3b$

$9=28-19\cdot1$ より　$9=(a-b)-(-2a+3b)$

$=3a-4b$

$1=19-9\cdot2$ より　$1=(-2a+3b)-(3a-4b)\cdot2$

$=-8a+11b$

よって，$-8a+11b=1$ より　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

$\boxed{3}$ $xy-2x+5y=(x+5)(y-2)+10$ であるから，方程式 $xy-2x+5y=1$ を変形すると

$(x+5)(y-2)+10=1$　すなわち　$(x+5)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+5$，$y-2$ はともに整数である。

積が -9 になる整数 $x+5$，$y-2$ の組 は

$(x+5,\ y-2)=(1,\ -9),\ (3,\ -3),\ (9,\ -1),\ (-1,\ 9),\ (-3,\ 3),\ (-9,\ 1)$

よって，求める整数解は

$(x,\ y)=(-4,\ -7),\ (-2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-6,\ 11),\ (-8,\ 5),\ (-14,\ 3)$

$3xy+3x+y=5$ から　$(3x+1)(y+1)=6$

xは整数であるから，$3x+1$ は 3 で割ると 1 余る整数である。

よって　$(3x+1,\ y+1)=(-2,\ -3),\ (1,\ 6)$

したがって　$(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$

$\boxed{4}$ $n^2-28n+160=(n-8)(n-20)$　または　$n^2-28n+160=(8-n)(20-n)$

$n-8>n-20$，$8-n<20-n$ であるから，$n^2-28n+160$ が素数であるとき

$n-20=1$　または　$8-n=1$

$n-20=1$ より　$n=21$，　$8-n=1$ より　$n=7$

$n=21$ のとき　$n^2-28n+160=13\cdot 1=13$　(素数)

$n=7$ のとき　$n^2-28n+160=1\cdot 13=13$　(素数)

よって，求める自然数 n は　$n=7,\ 21$

5　1960 を素因数分解すると　$1960=2^3\cdot 5\cdot 7^2$

よって，1960 のすべての正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)$ を展開したときの項として 1 つずつ出てくる。

(1)　1960 の正の約数の個数は　$(3+1)(1+1)(2+1)=4\times 2\times 3=24$ (個)

(2)　1960 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)=(1+2+4+8)(1+5)(1+7+49)$$
$$=15\times 6\times 57=5130$$

6　1890 を素因数分解すると　$1890=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$

1890 に $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ を掛けると，$2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2$ すなわち $(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)^2$ になる。

よって，n の最小値は　$n=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

7　左辺を y について整理すると　$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0$ ……①

y は整数であるから，判別式 D について，$D\geqq 0$ であることが必要.

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7)\geqq 0$$

すなわち　$4x^2-8x+3\leqq 0$

よって　$(2x-1)(2x-3)\leqq 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$　これを満たす整数 x は　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$

ゆえに　$(y+2)(y+4)=0$　よって　$y=-2,\ -4$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

8　(1)　$x<y<z$ であるから　$xyz=x+y+z<z+z+z=3z$

よって，$xyz<3z$ の両辺を正の数 z で割ると　$xy<3$

これを満たす $x<y$ である自然数 x，y の組は　$x=1,\ y=2$

このとき，与えられた等式は　$2z=1+2+z$

よって　$z=3$

このとき，$y<z$ を満たす。

したがって　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$1\leqq x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　……①

よって　$\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=\dfrac{11}{6x}$

したがって　$x\leqq\dfrac{11}{8}$

x は自然数であるから　　$x=1$

このとき，与えられた等式は　　$\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{3}$　……②

① から　　$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}\leqq\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{5}{6y}$

したがって　　$y\leqq\dfrac{5}{2}$

y は自然数で，$1=x\leqq y$ であるから　　$y=1，2$

$y=1$ のとき，② から　　$\dfrac{1}{3z}=-\dfrac{1}{6}$

これを満たす自然数 z はない。

$y=2$ のとき，② から　　$\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{12}$

よって　　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

したがって　　$(x，y，z)=(1，2，4)$

$\boxed{9}$ 求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{40}{21}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　　a は 21 の倍数，b は 40 の約数　……①

$\dfrac{16}{39}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　　a は 39 の倍数，b は 16 の約数　……②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

①，② から

　　a は 21 と 39 の最小公倍数，b は 40 と 16 の最大公約数

とすればよい。

よって　　$a=273$，$b=8$

したがって，求める分数は　　$\dfrac{273}{8}$

$\boxed{10}$ 方程式を変形して　$48x=77(1-7y)$

48 と 77 は互いに素であるから，$x=77s$ (s は整数) とおける．ゆえに　$48s=1-7y$

よって　$7y=1-48s=(1+s)-49s$

ここで，$s+1=7t$ (t は整数) とおけるから $y=t-7s=t-7(7t-1)=7-48t$

したがって　$x=77s=77(7t-1)=-77+539t$ (t は整数)

$\boxed{11}$ x，y，z を入れ替えても，もとの式と変わらない。

x，y，z は自然数であるから，$1\leqq x\leqq y\leqq z$　……① と仮定する。

$$\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{x}\quad\cdots\cdots②$$

よって　$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

$\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

ゆえに　$x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき

与式から，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ となり，これを満たす自然数 $y,\ z$ はない。

[2]　$x=2$ のとき

与式から　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$　…… ③

② から　$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$

ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で $2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき　③ から　$\frac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき　③ から　$\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$　　よって　$z=6$　($y\leqq z$ を満たす)

$y=4$ のとき　③ から　$\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　　よって　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

[3]　$x=3$ のとき

与式から　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$　…… ④

② から　$\frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$

ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき ④ から　$\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$　　よって　$z=3$　($y\leqq z$ を満たす)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

よって，① の条件をはずして考えると，求める $x,\ y,\ z$ の組は

$(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),\ (6,\ 3,\ 2),\ (2,\ 4,\ 4),$
$(4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$

12　$abc_{(5)}$ は 3 桁の 5 進数であるから　　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 0\leqq c\leqq 4$

$cab_{(7)}$ は 3 桁の 7 進数であるから　　$1\leqq c\leqq 6,\ 0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6$

よって　　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 1\leqq c\leqq 4$　…… ①

N を 10 進法で表すと

$$N=abc_{(5)}=a\cdot 5^2+b\cdot 5^1+c\cdot 5^0=25a+5b+c$$

$$N=cab_{(7)}=c\cdot 7^2+a\cdot 7^1+b\cdot 7^0=49c+7a+b$$

よって　　$25a+5b+c=49c+7a+b$

整理すると　　$9a+2b=24c$　……②

ここで，①から

$$24c=9a+2b\leqq 9\cdot 4+2\cdot 4=44$$

ゆえに　　$c\leqq\dfrac{11}{6}=1.8\cdots\cdots$

よって，①から　　$c=1$

②に代入すると　　$9a+2b=24$

これと①を満たす整数 a，b は　　$a=2$，$b=3$

したがって　　$a=2$，$b=3$，$c=1$

また　　$N=25\cdot 2+5\cdot 3+1=66$

13　1から100までの自然数うち

2 の倍数の個数は，100を 2 で割った商で　　50

2^2 の倍数の個数は，100を 2^2 で割った商で　　25

2^3 の倍数の個数は，100を 2^3 で割った商で　　12

2^4 の倍数の個数は，100を 2^4 で割った商で　　6

2^5 の倍数の個数は，100を 2^5 で割った商で　　3

2^6 の倍数の個数は，100を 2^6 で割った商で　　1

$100<2^7$ であるから，$2^n\ (n\geqq 7)$ の倍数はない。

よって　　$a=50+25+12+6+3+1=97$

次に，1から100までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，100を 3 で割った商で　　33

3^2 の倍数の個数は，100を 3^2 で割った商で　　11

3^3 の倍数の個数は，100を 3^3 で割った商で　　3

3^4 の倍数の個数は，100を 3^4 で割った商で　　1

$100<3^5$ であるから，$3^n\ (n\geqq 5)$ の倍数はない。

よって　　$b=33+11+3+1=48$

更に，1から100までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，100を 5 で割った商で　　20

5^2 の倍数の個数は，100を 5^2 で割った商で　　4

$100<5^3$ であるから，$5^n\ (n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって　　$c=20+4=24$

14　与えられた等式から　　$pqr(2p-q)(p+10q)=3\times 7\times 11\times 13\times 37$　……①

p，q，r は素数であるから，3，7，11，13，37のいずれかである。

また，$2p-q\geqq 1$ であることがわかる。

もし $2p-q=1$ であるとすると，これを満たすのは $p=7$，$q=13$ のときだけである。

このとき $p+10q=137$ となり，① を満たさない。

よって，$2p-q$ は 3，7，11，13，37 のいずれかであり，更に，

$p+10q \geqq 7+10\cdot 3=37$ であるから　　$p+10q=37$

これを満たすのは　　$p={}^{ア}7$，$q={}^{イ}3$

このとき，$2p-q=11$ であるから　　$r={}^{ウ}13$