

BASIC問題

- [1] $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ (2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\tan \theta = \sqrt{3}$

- [2] $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $2\cos \theta \leq -\sqrt{2}$ (2) $-\sqrt{2}\sin \theta + 1 \geq 0$ (3) $\sqrt{3}\tan \theta - 1 < 0$

- [3] α, β, γ は鋭角で、 $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = 5$, $\tan \gamma = 8$ であるとき、次の値を求めよ。

(1) $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$ (2) $\alpha + \beta + \gamma$

- [4] $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で、 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

- [5] 次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$ (2) $\sin \frac{5}{12}\pi - \cos \frac{5}{12}\pi$

- [6] $2\sin 4\theta \cos 2\theta$ を和の形、 $\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

Standard問題

- [7] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また、最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

- [8] 関数 $y = \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 1$ の最大値、最小値を求めよ。

- [9] 次の関数の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

- [10] $\theta = 18^\circ$ のとき、 $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また、これを利用して、 $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

- [11] 次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ (2) $\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

実戦問題

- [12] $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$

(4) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{1}{2}$

- [13] a を定数とする。 x についての方程式 $\cos^2 x + 2a \sin x - a - 1 = 0$ の $0 \leq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

- [14] 地上にいる人が、高さ 200 m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50 m の鉄塔を見る。鉄塔の上端を A、この人を B、鉄塔の下端を C とするとき、 $\angle ABC$ が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか。ただし、この人の身長は無視することとし、また、ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

- [15] 以下の問いに答えよ。必要ならば、等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ を利用してよい。

(1) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos \alpha)(x - 2\cos \beta)$ となる角度 α, β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

- [16] 次の関係式が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

BASIC問題

[1] (1) $\sqrt[3]{24} + \frac{4}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\frac{\sqrt{2^3} \times 2^2 \times (2^2 \times 3^2)^3}{6^5 \times 4^2} \div \frac{\sqrt{2} \times 2}{2^3}$ を簡単にせよ。

[2] 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{7}$

(2) $2^{30}, 3^{20}, 10^{10}$

[3] $x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = 3$ のとき, $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

[4] 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49 + \log_3 \frac{12}{7} - \log_3 \frac{4}{9}$$

[5] (1) $\log_5 2 = a$ とおくとき, $\log_{25} 64$ を a で表せ。

(2) $\log_2 3 = a, \log_3 7 = b$ とおくとき, $\log_6 84$ を a, b で表せ。

[6] 70 % の花粉を除去できるフィルターがある。99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには、このフィルターは最低何枚必要か。ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

[7] Standard問題篇

[8] $5^x = 7^y = 35^4$ のとき, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ の値を求めよ。

[9] 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $2^x - 24 \cdot 2^{-x} = 5$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} > \frac{2}{81}$

[10] 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leq 0$

(2) $2\log_3(x-4) - \log_3(x+6) \leq 2$

(3) $2 - \log_{\frac{1}{3}} x > (\log_3 x)^2$

[11] ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。

$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ として, n の値を求めよ。また, 2^n の末尾の数字を求めよ。

[12] 0.15^{70} を小数で表すとき, 次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において, その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

実戦問題篇

- [13] 連立方程式
$$\begin{cases} 8 \cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$$
 を解け。
- [14] 関数 $y = 8(2^x + 2^{-x}) - (4^x + 4^{-x}) - 10$ について、 $2^x + 2^{-x} = t$ とおくとき、 y を t の式で表せ。また、 y の最大値とそのときの x の値を求めよ。
- [15] 不等式 $\log_x(2x - y + 1) > 2$ が表す領域を図示せよ。ただし、 $x > 0$ かつ $x \neq 1$ とする。

BASIC問題

- [1] 2点 $A(-3)$, $B(5)$ について、次のものを求めよ。
- (1) 2点 A , B 間の距離
 - (2) 線分 AB を $3:1$ に内分, 外分する点の座標
 - (3) 線分 AB の中点
- [2] 次の直線の方程式を求めよ。
- (1) 点 $(6, -1)$ を通り, 直線 $2x - y + 4 = 0$ に平行な直線, 垂直な直線
 - (2) 点 $(-2, 3)$ を通り, 直線 $5x + 2y - 3 = 0$ に平行な直線, 垂直な直線
 - (3) 点 $(1, -1)$ を通り, 2点 $(-4, -5)$, $(8, 1)$ を通る直線に平行な直線, 垂直な直線
- [3] (1) 2点 $(3, 4)$, $(5, -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。
 (2) 3点 $(3, 1)$, $(6, -8)$, $(-2, -4)$ を通る円の方程式を求めよ。
- [4] k を定数とする。点 $(2, 1)$ から直線 $kx + y + 1 = 0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように, k の値を定めよ。

STANDARD問題

- [5] 直線 $3x - 4y - 1 = 0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 $A(2, 5)$ と対称な点を B , 点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき, 次のものを求めよ。
- (1) 点 B の座標
 - (2) 点 H の座標
- [6] 3直線 $x + 3y - 2 = 0$ …… ①, $x + y = 0$ …… ②, $ax - 2y + 4 = 0$ …… ③ が三角形を作らないとき, 定数 a の値を求めよ。
- [7] 点 $(-1, 2)$ を通り, x 軸, y 軸に接するような円の方程式を求めよ。
- [8] 円 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ と直線 $ax + y + a = 0$ が異なる2点 A, B で交わる。
- (1) $a = -1$ のとき, 弦 AB の長さを求めよ。
 - (2) 弦 AB の長さが最大となるとき, 定数 a の値を求めよ。
- [9] 2つの円 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ …… ①, $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ …… ② について, 次の問いに答えよ。
- (1) 2つの円 ①, ② は異なる2点で交わることを示せ。
 - (2) 2つの円 ①, ② の2つの交点と点 $(4, 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

- [10] 座標平面上に2点 $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$ と放物線 $y = x^2 - 8x + 15$ がある。点 P が放物線上の $1 \leq x \leq 7$ の範囲を動くとき、 $\triangle PAB$ の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。
- [11] 点 $P(7, 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 25$ に引いた2本の接線の接点を A, B とするとき、直線 AB の方程式を求めよ。
- [12] 円 $x^2 + y^2 = 4$ …… ① と円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ …… ② の共通接線の方程式を求めよ。