数学②　第１回試練　三角関数　　1 / 9

1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2)　$\tan\theta = -1$

2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。(1)　$\sin\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2)　$\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(4)　$2\sin\theta + \sqrt{3} \leqq 0$　(5)　$2\cos\theta > \sqrt{3}$　(6)　$\tan\theta + 1 \geqq 0$

3 次の値を求めよ。(1)　$\sin 15°$　(2)$\tan 105°$

4 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。(1)$\cos 2\alpha$　(2)$\sin 2\alpha$　(3)$\sin\dfrac{\alpha}{2}$

5 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$とする。$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　　(2)　$\sin\beta$　　(3)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha+\beta)$

6 関数 $y = 2\sin x - \sqrt{5}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

7 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。$\sin 2\theta + \sin\theta > 0$

8 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。$\sqrt{3}\sin x + \cos x < \sqrt{2}$

9 次の関数の最大値，最小値を求めよ。$y = 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x$

10 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 5 - a = 0$ の異なる解の個数を，定数 a の値の範囲によって調べよ。

11 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。(1)　$\cos\left(\theta + \dfrac{3}{4}\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\tan\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$　(3)　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4)　$\tan\left(\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right) \leqq -1$

12 $0 \leqq x \leqq \pi$ における 関数 $y = 12\sin x + 5\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。
また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

13 $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の範囲で，関数 $f(\theta) = \sqrt{6}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta$，$g(\theta) = \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{6}\sin\theta$ を
考える．(1)　$f(60°) = \sqrt{\square^{ア}}$ である．

(2)　$\theta = \square^{イウ}°$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{\square^{エ}}$ をとる．

(3)　$g(\theta) = \square^{オ}\sqrt{\square^{カ}}\cos\left(\theta + \square^{キク}°\right)$ と表せる．とくに，$g(\theta) = -\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，$f(\theta)$
$= \dfrac{\square^{ケ}\sqrt{\square^{コ}}}{\square^{サ}}$，$\sin\theta = \dfrac{\square^{シ} + \square^{ス}\sqrt{\square^{セ}}}{10}$ となる．

14　$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，次の問いに答えよ。(1)　$\sin\theta$，$\cos\theta$ を t の式で表せ。

(2)　関数 $y = \dfrac{\sin\theta - 1}{\cos\theta + 1}$ について，y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ とする。

1 解答 (1) $\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　(2) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

2 解答 (1) $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$　(2) $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$　(3) $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

(4) $\frac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$　(5) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(6) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

3 解答 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　(3) $-2-\sqrt{3}$

4 解答 (1) $\frac{7}{25}$　(2) $-\frac{24}{25}$　(3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

5 解答 (1) $-\frac{4}{5}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(3) $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$　(4) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

6 解答 最大値 3，最小値 -3

7 解答 $0<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

8 解答 $0\leqq x<\frac{\pi}{12},\ \frac{7}{12}\pi<x<2\pi$

9 解答 最大値は 6，最小値は -4

10 解答 $a<2$，$11<a$ のとき 0 個；　$a=2$，$3<a<11$ のとき 2 個；
$2<a<3$ のとき 4 個；　$a=3$ のとき 3 個；　$a=11$ のとき 1 個

11 解答 (1) $\theta=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(3) $0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi<\theta<2\pi$　(4) $\frac{\pi}{6}<\theta\leqq\frac{5}{12}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta\leqq\frac{17}{12}\pi$

12 解答 最大値 13，最小値 -12　（後半） $\tan x=\frac{5}{12}$

13 解答 $\sqrt{(ア)}$　$\sqrt{6}$　(イウ)°　90°　$\sqrt{(エ)}$　$\sqrt{2}$

(オ)$\sqrt{(カ)}\cos(\theta+(キク)°)$　$2\sqrt{2}\cos(\theta+60°)$　$\frac{(ケ)\sqrt{(コ)}}{(サ)}$　$\frac{6\sqrt{2}}{5}$

$\frac{(シ)+(ス)\sqrt{(セ)}}{10}$　$\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

14 解答 (1) $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$　(2) $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　(3) $y=-\frac{1}{2}(t-1)^2$

(4) $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 0，$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

1 (1)　図のように，単位円上で y 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である点 P，Q をとる。

求める θ の動径は　OP，OQ

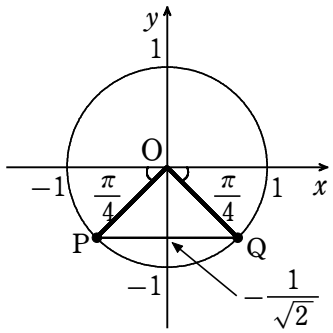
よって　$\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$2\pi-\dfrac{\pi}{4}$　　すなわち　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

(2)　図のように，点 $(1,\ -1)$ と原点を通る直線と，単位円の交点を P，Q とする。

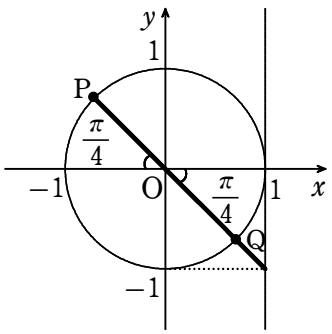
求める θ の動径は　OP，OQ

よって　$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}$，$2\pi-\dfrac{\pi}{4}$　　すなわち　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

(1)



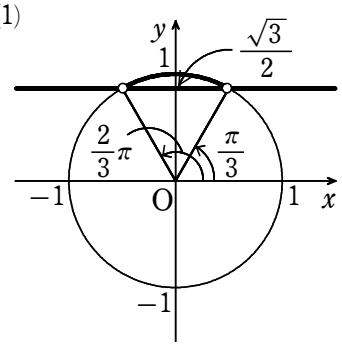
(2)



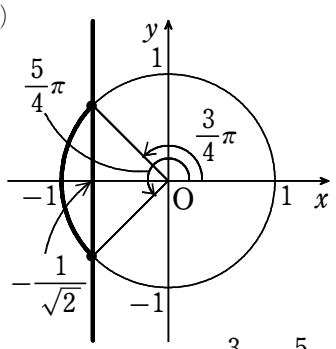
2 (1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

(1)



(2)



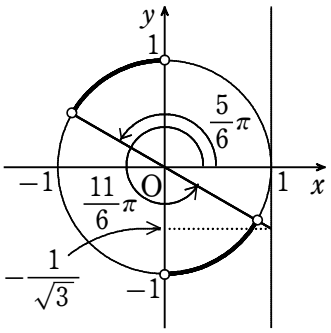
(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

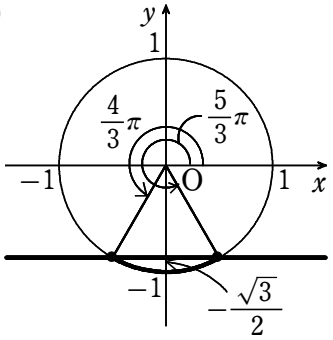
(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

(3)



(4)



(4)　不等式を変形すると　　$\sin\theta \leqq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

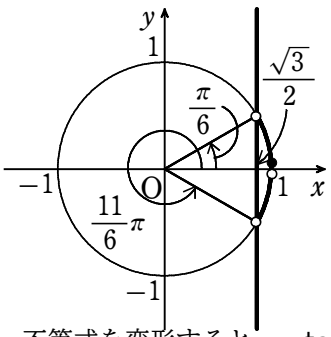
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

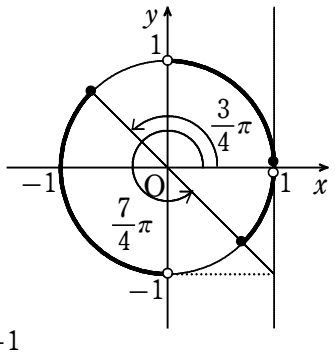
よって，不等式の解は，図から　　$\frac{4}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$

(5)　不等式を変形すると　　$\cos\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$





(6)　不等式を変形すると　　$\tan\theta \geqq -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -1$ となる θ は　　$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$

3　(1)　$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ\cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(3)　$\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$

4　(1)　$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{7}{25}$

(2)　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より，$\cos\alpha < 0$ であるから

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

よって　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

(3)　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right\} = \dfrac{9}{10}$

$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

5　(1)　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より，$\cos\alpha < 0$ であるから　　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{4}{5}$

(2)　$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\sin\beta > 0$ であるから　　$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3)　$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

(4)　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6　$y = 2\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2}\sin(x+\alpha) = 3\sin(x+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

$-1 \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$ であるから，y の最大値は 3，最小値は -3

7　$2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta > 0$ から　$\sin\theta(2\cos\theta+1) > 0$

よって　「$\sin\theta > 0$　かつ　$\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$」

または「$\sin\theta < 0$　かつ　$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$」　　したがって　$0 < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$，$\pi < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$

8　　$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) < \sqrt{2}$ より　　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6} \leqq x+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi < x+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$

よって　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi < x < 2\pi$

9　$y = 5\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2} + 6\cdot\dfrac{\sin 2x}{2} - 3\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$= 3\sin 2x + 4\cos 2x + 1$

$= 5\sin(2x+\alpha) + 1$　　ただし　$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

$-1 \leqq \sin(2x+\alpha) \leqq 1$ であるから　$-5+1 \leqq y \leqq 5+1$　すなわち　$-4 \leqq y \leqq 6$

したがって　最大値は 6，最小値は -4

10　方程式を変形すると　$2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 5 - a = 0$

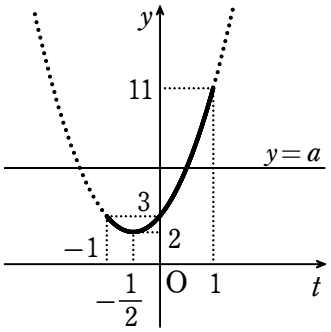
よって　$4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 3 = a$

$y = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 3$，$\cos\theta = t$ とおくと

$y = 4t^2 + 4t + 3 = 4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2$　……①

また　$-1 \leqq t \leqq 1$

$-1 \leqq t \leqq 1$ における，関数①のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べると，図から



$a < 2$，$11 < a$ のとき　0 個

$a = 2$，$3 < a < 11$ のとき　$-1 < t < 1$ の範囲に 1 個

$2 < a < 3$ のとき　$-1 < t < 1$ の範囲に 2 個

$a = 3$ のとき　$-1 < t < 1$ の範囲に 1 個と，$t = -1$ のときの 1 個

$a = 11$ のとき　$t = 1$ のときの 1 個

$\cos\theta = t$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の解の個数は，

$t = \pm 1$ のとき 1 個，$-1 < t < 1$ のとき 2 個

であるから，求める解の個数は

$a < 2$，$11 < a$ のとき 0 個；　$a = 2$，$3 < a < 11$ のとき 2 個；

$2 < a < 3$ のとき 4 個；　$a = 3$ のとき 3 個；

$a = 11$ のとき 1 個

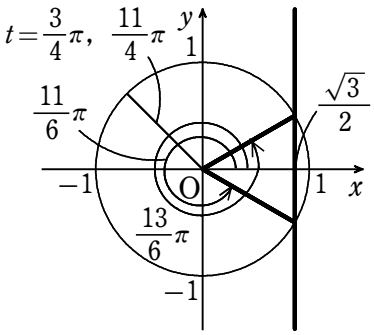
11 (1)　$\theta+\frac{3}{4}\pi=t$ ……① とおくと　$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta+\frac{3}{4}\pi<2\pi+\frac{3}{4}\pi$

すなわち　$\frac{3}{4}\pi\leqq t<\frac{11}{4}\pi$ ……②

② の範囲で $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の解は　$t=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

① より，$\theta=t-\frac{3}{4}\pi$ であるから　$\theta=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$



(2)　$2\theta-\frac{\pi}{3}=t$ ……① とおくと　$\tan t=\sqrt{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{3}\leqq2\theta-\frac{\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{3}$

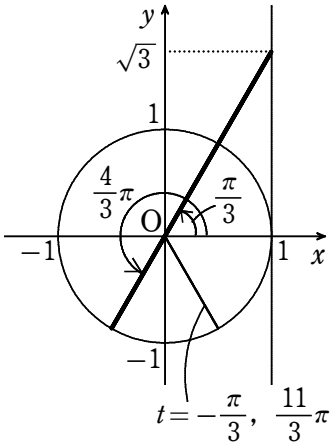
すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{11}{3}\pi$ ……②

② の範囲で $\tan t=\sqrt{3}$ の解は

$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi$

① より，$\theta=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}$ であるから

$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$



(3)　$\theta-\frac{\pi}{3}=t$ ……① とおくと　$\sin t<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}$

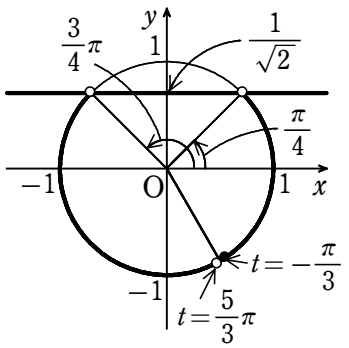
すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{5}{3}\pi$ ……②

② の範囲で $\sin t<\frac{1}{\sqrt{2}}$ の解は

$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi<t<\frac{5}{3}\pi$

① より，$\theta=t+\frac{\pi}{3}$ であるから

$0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi<\theta<2\pi$



(4)　$\theta-\frac{2}{3}\pi=t$ ……① とおくと　$\tan t \leqq -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\frac{2}{3}\pi \leqq \theta-\frac{2}{3}\pi < 2\pi-\frac{2}{3}\pi$

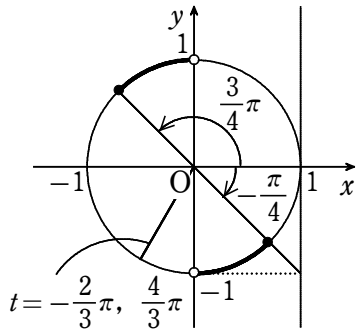
すなわち　$-\frac{2}{3}\pi \leqq t < \frac{4}{3}\pi$ ……②

② の範囲で $\tan t \leqq -1$ の解は

$$-\frac{\pi}{2} < t \leqq -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < t \leqq \frac{3}{4}\pi$$

① より，$\theta = t+\frac{2}{3}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6} < \theta \leqq \frac{5}{12}\pi,\ \frac{7}{6}\pi < \theta \leqq \frac{17}{12}\pi$$



12　（前半）

$y=5\sin x+12\cos x=13\sin(x+\alpha)$　　ただし　$\sin\alpha=\frac{12}{13},\ \cos\alpha=\frac{5}{13}$

$\alpha \leqq x+\alpha \leqq \pi+\alpha$ より，$x+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき　最大値　13

$x+\alpha=\pi+\alpha$　つまり $x=\pi$ のとき　最小値　-12

（後半）

$\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{5}{12}$

13　(1)　$f(60^\circ)=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{^{ア}6}$

(2)　$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+60^\circ),\ 60^\circ \leqq \theta+60^\circ \leqq 150^\circ$ であるから $\theta=^{イウ}90^\circ$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{^{エ}2}$ をとる．

(3)　$g(\theta)=^{オ}2\sqrt{^{カ}2}\cos(\theta+^{キク}60^\circ)$ と表される．

特に $g(\theta)=-\frac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば　$\cos(\theta+60^\circ)=-\frac{4}{5}$

よって　$\sin(\theta+60^\circ)=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

ゆえに　$f(\theta)=2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{^{ケ}6\sqrt{^{コ}2}}{^{サ}5}$

また，連立方程式 $\sin(\theta+60^\circ)=\frac{3}{5},\ \cos(\theta+60^\circ)=-\frac{4}{5}$

すなわち　$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{3}{5},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=-\frac{4}{5}$ を解いて

$$\sin\theta=\frac{^{シ}3+^{ス}4\sqrt{^{セ}3}}{10}$$

14 (1)　$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$

(2)　$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　(1), (2) から　　$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}-1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\frac{2t-(1+t^2)}{1-t^2+1+t^2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2$

(4)　$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ から　$0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{3}$　　ゆえに，$t=\tan\frac{\theta}{2}$ から　$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$

よって，(3) から，$t=1$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 0,

$t=0$ すなわち $\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。

別解　$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta-(-1)}$

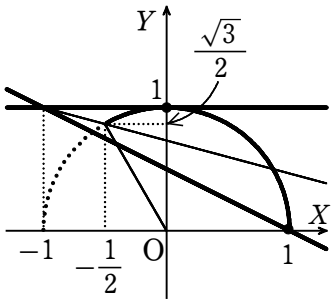
よって，y は 2 点 $(-1,\ 1)$，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通る直線の傾きを表す。

点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)\left(0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$ は円 $X^2+Y^2=1$ 上にある。

右の図から，直線の傾きは，2 点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を通るとき最大，2 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 0)$ を通るとき最小となる。

したがって

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 0，$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$



BASIC問題

1 (1) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}$ を簡単にせよ。

2 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

3 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

4 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

5 (1) $\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

6 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

Standard問題篇

8 $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ の値を求めよ。

9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x-24\cdot 2^{-x}=5$　　(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}>\frac{2}{81}$

10 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$　　(2) $2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq 2$

(3) $2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

11 ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

12 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。
(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。
(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^{x}-3^{y}=-27 \\ \log_2(x+1)-\log_2(y+3)=-1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^{x}+2^{-x})-(4^{x}+4^{-x})-10$ について，$2^{x}+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x\neq 1$ とする。

1 解答 (1) $3\sqrt[3]{3}$ (2) 12

2 解答 (1) $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (2) $2^{30}<3^{20}<10^{10}$

3 解答 順に 7，$\sqrt{5}$

4 解答 3

5 解答 (1) $3a$ (2) $\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

6 解答 8 枚

8 解答 $\dfrac{1}{4}$

9 解答 (1) $x=3$ (2) $x<1$

10 解答 (1) $1<x\leqq 2$ (2) $4<x\leqq 19$ (3) $\dfrac{1}{3}<x<9$

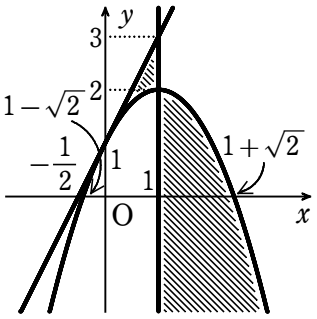
11 解答 $n=72$，末尾の数字は 6

12 解答 (ア) 58 (イ) 2

13 解答 $x=3$，$y=5$

14 解答 $y=-t^2+8t-8$，$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値 8

15 解答 〔図〕 境界線を含まない



1 $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=3\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^{2\times 3}\times 3^{2\times 3}}{(2\times 3)^5\times(2^2)^2}\times\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}\times 2}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^6\times 3^6}{2^5\times 3^5\times 2^4}\times\frac{2^3}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}+2+6+3-5-4-\frac{3}{2}}\times 3^{6-5}=2^2\times 3^1=12$$

2 (1)　3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$，$(\sqrt[6]{7})^6=7$

$7<8<9$ であるから　$(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　ゆえに　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

$7<8<9$ であるから　$7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　すなわち　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$8<9<10$ であるから　$8^{10}<9^{10}<10^{10}$　すなわち　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

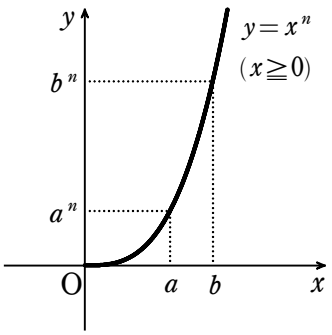
注意　解答では，次の事柄を使っている。

[1]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^n<b^n$$

[2]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$$



3 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\left(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)^2=x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}>0$ であるから　$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}=\sqrt{5}$

4 $\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}=\log_3\left(49^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\div\frac{4}{9}\right)=\log_3\left\{(7^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right\}$

$=\log_3\left(7\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$

5 (1)　$\log_{25}64=\dfrac{\log_5 64}{\log_5 25}=\dfrac{6\log_5 2}{2}=3\log_5 2=3a$

(2)　$\log_6 84=\dfrac{\log_2(2^2\times 3\times 7)}{\log_2(2\times 3)}=\dfrac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで　$\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 7=ab$　よって　$\log_6 84=\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

6 1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから，n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る.

よって，求める条件は　$0.3^n<1-0.9999$ すなわち $0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

ゆえに　$n(\log_{10}3-1)<-4$ から　$n(-0.5229)<-4$

よって　$n>\dfrac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$　したがって　8 枚.

7

8 $5^x=7^y=35^4$ から　$\log_{10}5^x=\log_{10}7^y=\log_{10}35^4$

よって　$x\log_{10}5=y\log_{10}7=4\log_{10}35$

したがって　$x=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}5}$，$y=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}7}$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}5+\log_{10}7}{4\log_{10}35}=\dfrac{\log_{10}35}{4\log_{10}35}=\dfrac{1}{4}$

9 (1)　方程式の両辺に 2^x (>0) を掛けて　$(2^x)^2-24=5\cdot 2^x$

ゆえに　$(2^x)^2-5\cdot 2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-5t-24=0$

よって　$(t+3)(t-8)=0$　$t>0$ であるから　$t=8$

ゆえに　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(2)　不等式を変形すると　$\dfrac{1}{9}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\dfrac{2}{81}>0$

両辺に 81 を掛けて　$9\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2>0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$9t^2+3t-2>0$

よって　$(3t-1)(3t+2)>0$

$3t+2>0$ であるから　$3t-1>0$　すなわち　$t>\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<1$

10 (1)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より　$1<x<3$　……①

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\frac{\log_2(3-x)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(3-x)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$$

ゆえに　$\log_2(x-1)\leqq\log_2(3-x)$

底 2 は 1 より大きいから　$x-1\leqq 3-x$

よって　$x\leqq 2$　……②

①，② から，解は　$1<x\leqq 2$

(2)　真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $x+6>0$ より　$x>4$　……①

不等式から　$\log_3(x-4)^2\leqq 2+\log_3(x+6)$

すなわち　$\log_3(x-4)^2\leqq\log_3 9(x+6)$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-4)^2\leqq 9(x+6)$

整理して　$x^2-17x-38\leqq 0$　　ゆえに　$(x+2)(x-19)\leqq 0$

したがって　$-2\leqq x\leqq 19$　……②

①，② から，解は　$4<x\leqq 19$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$\log_{\frac{1}{3}}x=\frac{\log_3 x}{\log_3\frac{1}{3}}=-\log_3 x$ であるから，不等式は　$2+\log_3 x>(\log_3 x)^2$

ゆえに　$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2<0$

したがって　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-2)<0$

よって　$-1<\log_3 x<2$　すなわち　$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$\frac{1}{3}<x<9$　　これは ① を満たす。

11 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 であるから　$4\times10^{21}\leqq 2^n<5\times10^{21}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}(4\times10^{21})\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}(5\times10^{21})$

$5\times10^{21}=10^{22}\div 2$ であるから　$2\log_{10}2+21\leqq n\log_{10}2<22-\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$ として計算すると　$21.6020\leqq n\times 0.3010<21.6990$

よって　$71.76\cdots\leqq n<72.08\cdots$

n は自然数であるから　$n=72$

$2^4=16$ であるから，$(2^4)^m$（m は自然数）の末尾の数字は常に 6 である。

$2^{72}=(2^4)^{18}$ であるから，2^{72}の末尾の数字は　6

12（ア）　$\log_{10}0.15^{70}=70\log_{10}\dfrac{3}{20}=70(\log_{10}3-\log_{10}2-\log_{10}10)=70(0.4771-0.3010-1)$

$=-57.673$

よって　　$-58<\log_{10}0.15^{70}<-57$

ゆえに　　$10^{-58}<0.15^{70}<10^{-57}$

したがって，0.15^{70} を小数で表すと，小数第 ア 58 位に 0 でない数字が現れる。

（イ）　$0.15^{70}=10^{-57.673}=10^{0.327}\times10^{-58}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より $10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ であるから

$2<10^{0.327}<3$

よって　　$2\times10^{-58}<0.15^{70}<3\times10^{-58}$

したがって，0.15^{70} を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　イ 2

13 $\begin{cases} 8\cdot 3^x-3^y=-27 & \cdots\cdots ① \\ \log_2(x+1)-\log_2(y+3)=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

真数は正であるから　$x+1>0$，$y+3>0$

すなわち　$x>-1$，$y>-3$　……③

②から　$\log_2\dfrac{x+1}{y+3}=\log_2 2^{-1}$

よって　$\dfrac{x+1}{y+3}=\dfrac{1}{2}$ から　$y+3=2(x+1)$

ゆえに　$y=2x-1$　……④

④を①に代入すると　$8\cdot 3^x-3^{2x-1}=-27$

この式の両辺に3を掛けて整理すると　$(3^x)^2-24\cdot 3^x-81=0$

ここで，$3^x=t$ とおくと，③より $t>\dfrac{1}{3}$ である。

$t^2-24t-81=0$ から　$(t-27)(t+3)=0$

$t>\dfrac{1}{3}$ であるから　$t=27$

ゆえに　$3^x=27$　　したがって　$x=3$

このとき，④から　$y=2\cdot 3-1=5$

これらはともに③を満たす。

14 $4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$

$=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

ゆえに　$y=8t-(t^2-2)-10$　　よって　$y=-t^2+8t-8$

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

ゆえに　$t\geqq 2$　……①

また　$y=-(t-4)^2+8$

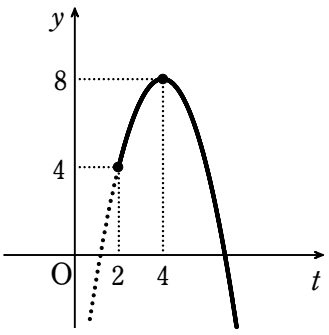
①の範囲において，y は $t=4$ で最大値8をとる。

$t=4$ のとき　$2^x+2^{-x}=4$

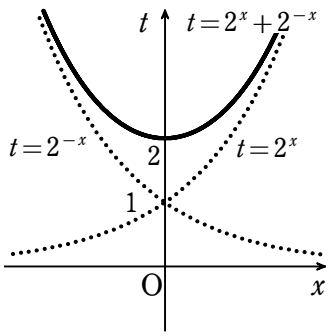
両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$

$2^x>0$ であるから　$2^x=2\pm\sqrt{3}$　　よって　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

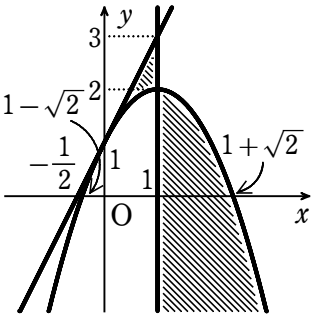
したがって　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値8



参考　$t=2^x+2^{-x}$ のグラフは，右の図のようになり，
1つの t の値に対応する x の値の個数は
$t<2$ のとき　0個
$t=2$ のとき　1個
$t>2$ のとき　2個
となる。



15　真数は正であるから　　$2x-y+1>0$
よって　　$y<2x+1$　……①
また，$x>0$ かつ $x\neq 1$ は底の条件を満たす。
与えられた不等式を変形すると　　$\log_x(2x-y+1)>\log_x x^2$
[1]　$x>1$ のとき　$2x-y+1>x^2$
ゆえに　　$y<-x^2+2x+1$
すなわち　$y<-(x-1)^2+2$
[2]　$0<x<1$ のとき　$2x-y+1<x^2$
ゆえに　　$y>-x^2+2x+1$
すなわち　$y>-(x-1)^2+2$
[1]，[2] より
直線 $x=1$ の右側と，放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の
下側の共通部分
および
直線 $x=0$ の右側かつ $x=1$ の左側と，
放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の上側の共通部分
これと①の共通部分が求める領域で，右の図の斜線部分。
ただし，境界線を含まない。



数学②　第３回試練　図形と式１

BASIC問題

1 2点A(-3)，B(5)について，次のものを求めよ。

(1) 2点A，B間の距離

(2) 線分ABを3：1に内分，外分する点の座標

(3) 線分ABの中点

2 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点$(6,\ -1)$を通り，直線$2x-y+4=0$に平行な直線，垂直な直線

(2) 点$(-2,\ 3)$を通り，直線$5x+2y-3=0$に平行な直線，垂直な直線

(3) 点$(1,\ -1)$を通り，2点$(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$を通る直線に平行な直線，垂直な直線

3 (1) 2点$(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2) 3点$(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$を通る円の方程式を求めよ。

4 kを定数とする。点$(2,\ 1)$から直線$kx+y+1=0$へ下ろした垂線の長さが$\sqrt{3}$となるように，kの値を定めよ。

STANDARD問題

5 直線$3x-4y-1=0$をℓとする。直線ℓに関して点A$(2,\ 5)$と対称な点をB，点Aからℓに下ろした垂線とℓとの交点をHとするとき，次のものを求めよ。

(1) 点Bの座標　　(2) 点Hの座標

6 3直線$x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③が三角形を作らないとき，定数aの値を求めよ。

7 点$(-1,\ 2)$を通り，x軸，y軸に接するような円の方程式を求めよ。

8 円$x^2+y^2-4x-2y=0$と直線$ax+y+a=0$が異なる2点A，Bで交わる。

(1) $a=-1$のとき，弦ABの長さを求めよ。

(2) 弦ABの長さが最大となるとき，定数aの値を求めよ。

9 2つの円$x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1) 2つの円①，②は異なる2点で交わることを示せ。

(2) 2つの円①，②の2つの交点と点$(4,\ 0)$を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に 2 点 A $(-2,\ 3)$，B $(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点 P が放物線上の $1 \leqq x \leqq 7$ の範囲を動くとき，△PAB の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

11 点 P $(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた 2 本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

12 円 $x^2+y^2=4$ ……① と円 $(x-5)^2+y^2=1$ ……② の共通接線の方程式を求めよ。

数学②　第３回試練　図形と式１

1 解答 (1) 8　(2) 内分 3，外分 9　(3) 1

2 解答 (1) 平行：$2x-y-13=0$，垂直：$x+2y-4=0$
(2) 平行：$5x+2y+4=0$，垂直：$2x-5y+19=0$
(3) 平行：$x-2y-3=0$，垂直：$2x+y-1=0$

3 解答 (1) $(x-4)^2+(y-1)^2=10$　(2) $x^2+y^2-6x+8y=0$

4 解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

5 解答 (1) $\left(\frac{28}{5},\ \frac{1}{5}\right)$　(2) $\left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$

6 解答 $a=-2,\ -\frac{2}{3},\ 2$

7 解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

8 解答 (1) $2\sqrt{3}$　(2) $a=-\frac{1}{3}$

9 解答 (1) 略　(2) $x^2+y^2-10x-6y+24=0$

10 解答 $\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$

11 解答 $7x+y=25$

12 解答 $3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

数学②　第３回試練　図形と式１

1 (1)　$AB=|5-(-3)|=|8|=8$

(2)　3：1 に内分する点の座標は　　$x=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot5}{3+1}=\dfrac{12}{4}=3$

3：1 に外分する点の座標は　　$x=\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot5}{3-1}=\dfrac{18}{2}=9$

(3)　$x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

2 (1)　$2x-y+4=0$ から　　$y=2x+4$

よって，与えられた直線の傾きは　2

[1]　平行な直線の方程式は

$y-(-1)=2(x-6)$　　すなわち　　$2x-y-13=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$2m=-1$　　よって　　$m=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-(-1)=-\dfrac{1}{2}(x-6)$　　すなわち　　$x+2y-4=0$

(2)　$5x+2y-3=0$ から　　$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線の傾きは　$-\dfrac{5}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{5}{2}\{x-(-2)\}$　　すなわち　　$5x+2y+4=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$-\dfrac{5}{2}m=-1$　　よって　　$m=\dfrac{2}{5}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=\dfrac{2}{5}\{x-(-2)\}$　　すなわち　　$2x-5y+19=0$

(3)　2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは　　$\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-1)$　　すなわち　　$x-2y-3=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$\dfrac{1}{2}m=-1$　　よって　　$m=-2$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

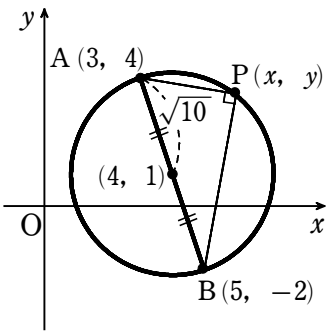
$y-(-1)=-2(x-1)$　　すなわち　　$2x+y-1=0$

3 (1)　この円の中心は，2点(3，4)，(5，−2)を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　(4，1)

半径 r は中心(4，1)と円上の点(3，4)との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$(x-4)^2+(y-1)^2=10$



(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点(3，1)を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点(6，−8)を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点(−2，−4)を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると　$3l+m+n+10=0$

$6l-8m+n+100=0$

$2l+4m-n-20=0$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

4 題意を満たすための条件は　$\dfrac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$

よって　$2|k+1|=\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}$

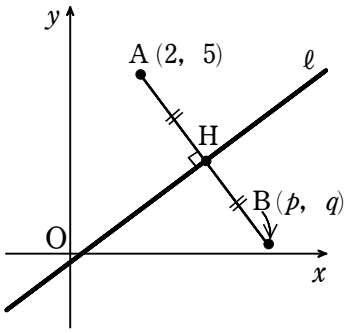
この両辺は負でないから，2乗しても同値である。

ゆえに　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理して　$k^2+8k+1=0$

したがって　$k=-4\pm\sqrt{15}$

5 (1)　点Bの座標を $(p,\ q)$ とする。



[1]　直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$，直線ABの傾きは $\dfrac{q-5}{p-2}$

である。

AB$\perp\ell$ であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

すなわち　　$4p+3q=23$　……①

[2]　線分ABの中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+5}{2}-1=0$$

すなわち　　$3p-4q=16$　……②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{28}{5},\ q=\dfrac{1}{5}$

したがって，点Bの座標は　　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2)　点Hは線分ABの中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+\frac{28}{5}}{2},\ \frac{5+\frac{1}{5}}{2}\right)$$

すなわち　　$\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

6 直線①の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　直線②の傾きは -1，　直線③の傾きは $\dfrac{a}{2}$

3直線①，②，③が三角形を作らないのは，次の[1]，[2]，[3]の場合である。

[1]　2直線①，③が平行　　[2]　2直線②，③が平行

[3]　3直線①，②，③が1点で交わる。

[1]の場合　　$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$

[2]の場合　　$-1=\dfrac{a}{2}$　　よって　$a=-2$

[3]の場合　　①，② を連立して解くと　$x=-1,\ y=1$

よって，直線①，② の交点の座標は　　$(-1,\ 1)$

点 $(-1,\ 1)$ が直線③上にあるから　　$a\cdot(-1)-2\cdot1+4=0$

整理して　　$-a+2=0$　　ゆえに　$a=2$

このとき，直線③は $x-y+2=0$ となり，直線①，② とは一致しない。

したがって，求める a の値は　　$a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

7　円の中心は第２象限にあるので，半径を r とおくと中心の座標は $(-r,\ r)$ と表せる。

よって，求める円の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

式を整理して　　$r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$ より　　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

8　(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

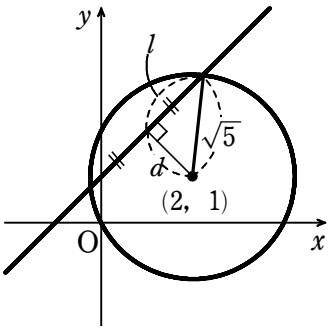
$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$

$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$



円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$

とすると　　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{3}$　　よって　　$AB=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　　$2x^2-4x-1=0 \quad \cdots\cdots ③$

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は２次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　　$AB^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$AB>0$ であるから　　$AB=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0 \qquad \text{よって} \qquad a=-\frac{1}{3}$$

9 (1)　① を変形すると　　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 ① の中心は点 (3，2)，半径は 1 である。

② を変形すると　　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

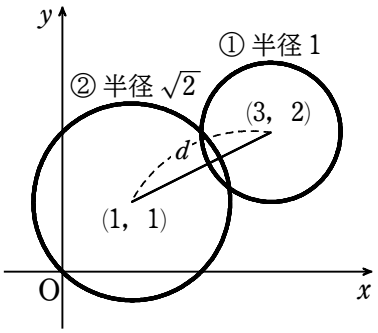
よって，円 ② の中心は点 (1，1)，半径は $\sqrt{2}$ である。

2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに　　$\sqrt{2}-1<d<\sqrt{2}+1$

したがって，2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わる。



(2)　k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-6x-4y+12+k(x^2+y^2-2x-2y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。

(1) により，2 つの円 ①，② は 2 点で交わり，③ は 2 つの円 ①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ③ が点 (4，0) を通るとき　　$4+8k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入して整理すると　　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

これが求める円の方程式である。

10 (1)　$\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+15)$ とする。

直線 AB の方程式は

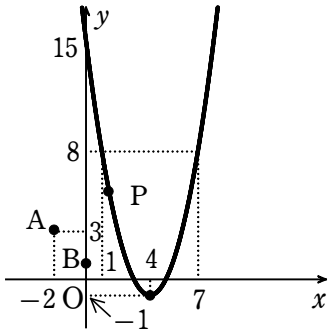
$$y=\frac{1-3}{0-(-2)}\{x-(-2)\}+3$$

すなわち　$y=-x+1$

点 P と直線 $y=-x+1$ の距離を d とすると

$$\triangle \mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times d$$

ゆえに，d が最小となるように P を定めればよい。



$$d=\frac{|t+t^2-8t+15-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2-7t+14|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

よって，d は $t=\dfrac{7}{2}$ で最小となる。

したがって　　$\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

数学②　第３回試練　図形と式１

11 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

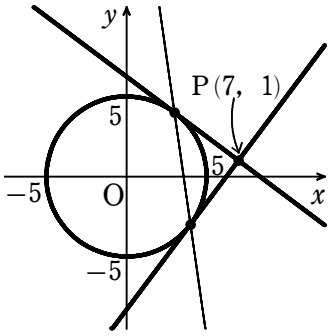
$$x_1x+y_1y=25,\quad x_2x+y_2y=25$$

これらがともに点 P$(7,\ 1)$ を通るから

$$7x_1+y_1=25 \cdots\cdots ①,\quad 7x_2+y_2=25 \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ は直線 $7x+y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$7x+y=25$



別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=25 \cdots\cdots ①$

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 P$(7,\ 1)$ を通るから　$7x_1+y_1=25$

よって　$y_1=-7x_1+25 \cdots\cdots ②$

② を ① に代入して　$x_1^{\,2}+(-7x_1+25)^2=25$

ゆえに　$50(x_1^{\,2}-7x_1+12)=0$　　これを解いて　$x_1=3,\ 4$

② から　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

よって，A，B の座標は　$(3,\ 4),\ (4,\ -3)$

したがって，直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{-3-4}{4-3}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad 7x+y-25=0$$

参考　直線 AB を点 P に関する円の **極線** といい，P を **極** という。

12 円 ① 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=4 \cdots\cdots ③$$

接線の方程式は

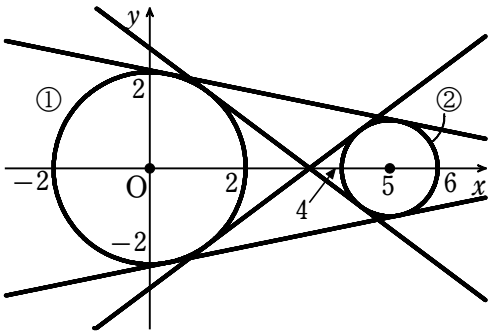
$$x_1x+y_1y=4 \cdots\cdots ④$$

直線 ④ が円 ② に接するとき，円 ② の中心 $(5,\ 0)$ と直線 ④ の距離は円 ② の半径に等しいから

$$\frac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}}=1$$

③ から　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$



③ から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$，$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって，求める接線の方程式は　$3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

BASIC問題

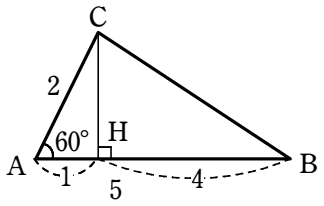
1 △ABCにおいて，辺BCを2：1に内分する点をD，外分する点をEとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とするとき，次のベクトルを$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{BD}$　(5) $\overrightarrow{GD}$

2 右の図は，AB＝5，AC＝2，∠BAC＝60°の△ABCの頂点Cから，底辺ABに垂線CHを下ろしたものである。次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CH}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$　(4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$



3 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$とする。$\vec{x}$と$\vec{a}-\vec{b}$が平行で，$\vec{x}-\vec{b}$と$\vec{a}$が垂直であるとき，p，qの値を求めよ。

4 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3\sqrt{2}$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$のとき，次のものを求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　(2) $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角θ

5 $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$とする。$|\vec{c}|$の最小値と，そのときのtの値を求めよ。ただし，tは実数とする。

6 平行四辺形ABCDの辺ABを3：2に内分する点をE，辺ADを2：1に内分する点をF，線分BFと線分CEの交点をKとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{AK}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

STANDARD問題

7 三角形ABCの内心をIとし，辺BC，CA，ABの長さを，それぞれa，b，cとする。$\overrightarrow{AI}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$となる実数$r$，$s$を，$a$，$b$，$c$を用いて表せ。

8 三角形ABCの3辺の長さをAB＝4，BC＝3，CA＝2とする。この三角形の外心をOとおく。$\overrightarrow{CO}$を$\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$で表せ。

9 △ABCと点Pがあり，$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たしている。

(1) △PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

(2) 直線AP上に点Qをとり，△QABと△QBCの面積比が3：1になるようにする。このとき，$\overrightarrow{QA}$，$\overrightarrow{QB}$，$\overrightarrow{QC}$が満たす関係式を求めよ。

10 △OABにおいて，OA＝3，OB＝4，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=8$とする。$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$で，$s$，$t$が$3s+t\leqq 3$，$s+t\geqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$を満たしながら動くとき，点Pが描く図形の面積を求めよ。

11 A $(-1,\ 5)$，B $(2,\ 4)$，$\vec{d}=(1,\ -2)$ とする。次の直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

(1) A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線　　(2) 2 点 A，B を通る直線

12 次のような直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) 点 A $(5,\ 3)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ -2)$ に垂直な直線

(2) O は原点とする。点 A $(3,\ -1)$ を通り，OA に垂直な直線

13 平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $\left|2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right|=4$　　(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$

実戦問題

14 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ。

15 △ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に引いた垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする．$0<t<1$ の範囲で関係式 $(t+1)\overrightarrow{OP}+(t-1)\overrightarrow{OQ}-t(t+1)\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2) ∠BAC の大きさを求めよ．

16 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A, B, C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}\leqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$

1 解答 (1) $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$ (2) $-\vec{b}+2\vec{c}$ (3) $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ (4) $-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\frac{1}{3}\vec{c}$

2 解答 (1) 5 (2) -3 (3) 0 (4) 20

3 解答 $p=1$，$q=3$

4 解答 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ (2) $\theta=45°$

5 解答 $t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$

6 解答 $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{13}{19}\vec{a}+\frac{4}{19}\vec{b}$

7 解答 $r=\frac{b}{a+b+c}$，$s=\frac{c}{a+b+c}$

8 解答 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\frac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

9 解答 (1) 4：2：3

(2) $4\overrightarrow{\mathrm{QA}}+9\overrightarrow{\mathrm{QB}}+12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$ または $4\overrightarrow{\mathrm{QA}}-9\overrightarrow{\mathrm{QB}}-12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

10 解答 $4\sqrt{5}$

11 解答 (1) $\begin{cases}x=-1+t\\y=5-2t\end{cases}$；$2x+y-3=0$ (2) $\begin{cases}x=-1+3t\\y=5-t\end{cases}$；$x+3y-14=0$

12 解答 (1) $x-2y+1=0$ (2) $3x-y-10=0$

13 解答 (1) 線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円

(2) 線分 OA を直径とする円

14 解答 19：3

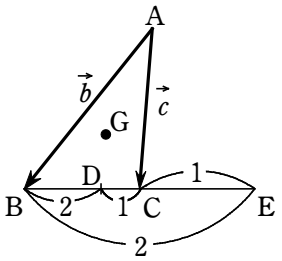
15 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (2) 135°

16 解答 (1) 線分 BC を 2：1 の比に内分する点

(2) B を通り，直線 AB に垂直な直線

(3) 線分 BC を直径とする円周とその内部

1 点 A に関する位置ベクトルと考える。



(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{-\vec{b}+2\vec{c}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

(3) 辺 BC の中点を M とすると

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

別解 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{c}$

2 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ=5\times 2\times\dfrac{1}{2}=5$

(2) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CH}$ の始点をそろえると，なす角は 150° である。

また，$CH=AC\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CH}|\cos 150^\circ=2\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$

(3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CH}$ の始点をそろえると，なす角は 90° であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CH}|\cos 90^\circ=5\times\sqrt{3}\times 0=0$

(4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC$

頂点 C から直線 AB に垂線 CH をおろすと $|\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC=BH$

また，$AH=AC\cos 60^\circ=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ により

$BH=AB-AH=5-1=4$

したがって，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot(|\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC)=BA\cdot BH=5\times 4=20$

3 $\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 2)-(3,\ -1)=(1,\ 3)$

$\vec{x}-\vec{b}=(p,\ q)-(3,\ -1)=(p-3,\ q+1)$

条件より $\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{x}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから $(p,\ q)\neq(0,\ 0),(3,\ -1)$ ……①

このとき，$\vec{x}\parallel(\vec{a}-\vec{b})$ から $p\times 3-q\times 1=0$

よって $3p-q=0$ ……②

また，$(\vec{x}-\vec{b})\perp\vec{a}$ から $(p-3)\times 4+(q+1)\times 2=0$

よって $2p+q=5$ ……③

②，③ を解いて $p=1$，$q=3$ これは ① を満たす。

4 (1)　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9\times1^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+(3\sqrt{2})^2$

$=9-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18=27-6\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ より，$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9$ であるから　　$27-6\vec{a}\cdot\vec{b}=9$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2)　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{1\times3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=45°$

5 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(9,\ 3)+t(-1,\ -2)=(9-t,\ 3-2t)$

$|\vec{c}|^2=(9-t)^2+(3-2t)^2=5t^2-30t+90$

$=5(t-3)^2+45$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。

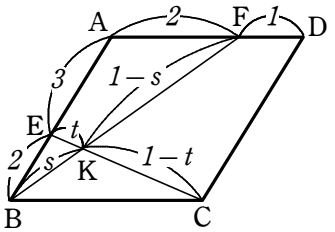
$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，$|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となり，最小値は $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

したがって　　$t=3$ で　最小値 $3\sqrt{5}$

6 BK：KF＝s：$(1-s)$，EK：KC＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{AK}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}$

$\overrightarrow{AK}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AC}=(1-t)\dfrac{3}{5}\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$



よって　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}=\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}t\right)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}t$，　$\dfrac{2}{3}s=t$

これを解いて　$s=\dfrac{6}{19}$，$t=\dfrac{4}{19}$　　よって　$\overrightarrow{AK}=\dfrac{13}{19}\vec{a}+\dfrac{4}{19}\vec{b}$

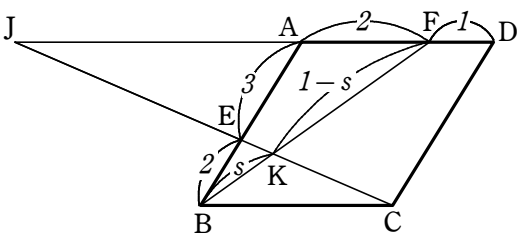
別解　△ABF と直線 CE について，メネラウスの定理を利用する。

DA と CE の交点を J とすると

△EBC∽△EAJ

BC：AJ＝2：3 から

$AJ=\dfrac{3}{2}BC=\dfrac{3}{2}AD$



よって　$\dfrac{FJ}{JA}=\dfrac{FA+AJ}{JA}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}AD+\frac{3}{2}AD}{\frac{3}{2}AD}=\dfrac{\frac{13}{6}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{13}{9}$

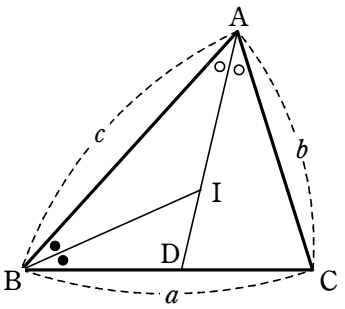
メネラウスの定理から

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BK}{KF}\cdot\frac{FJ}{JA}=\frac{3}{2}\cdot\frac{s}{1-s}\cdot\frac{6.5}{4.5}=1$$

よって　$s=\dfrac{6}{19}$　　したがって　$\overrightarrow{AK}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}=\left(1-\dfrac{6}{19}\right)\vec{a}+\dfrac{6}{19}\cdot\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$$=\frac{13}{19}\vec{a}+\frac{4}{19}\vec{b}$$

7 △ABCの ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると　BD：DC＝AB：AC＝c：b



よって　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

また，$BD=a\cdot\dfrac{c}{b+c}=\dfrac{ac}{b+c}$ であるから

$AI：ID=BA：BD=c：\dfrac{ac}{b+c}=(b+c)：a$

よって　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ であるから　$r=\dfrac{b}{a+b+c}$，$s=\dfrac{c}{a+b+c}$

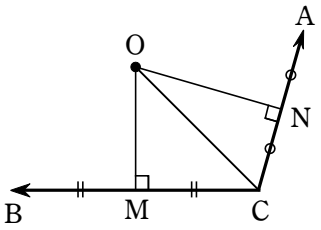
8 $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ とすると　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=|\vec{b}-\vec{a}|=4$

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=16$ であるから　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=16$

よって　$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=16$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$　　すなわち　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\dfrac{3}{2}$

外心 O は 3 辺の垂直二等分線の交点である。
よって，辺 BC，CA の中点をそれぞれ M，N とすると，$\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{MO}$，$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{NO}$ である。



$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}$$

$$=a\overrightarrow{CA}+\left(b-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}=\left(a-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}$$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$ であるから　$a\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{CB}|^2=0$

よって　$-\dfrac{3}{2}a+9\left(b-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　ゆえに　$-a+6b-3=0$　……①

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{NO}=0$ であるから $\left(a-\frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{CA}|^2+b\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

よって $4\left(a-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}b=0$ ゆえに $8a-3b-4=0$ …… ②

①，② から $a=\frac{11}{15}$，$b=\frac{28}{45}$ ∴ $\overrightarrow{CO}=\frac{11}{15}\overrightarrow{CA}+\frac{28}{45}\overrightarrow{CB}$

9 (1) $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ から $2(-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

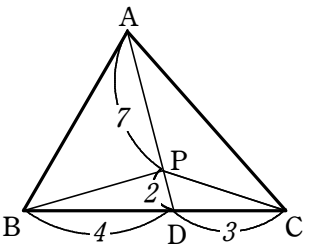
ゆえに $-9\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ よって $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{7}{9}\left(\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}\right)$

辺 BC を 4：3 に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$ であるから

$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}$

ゆえに，点 P は線分 AD を 7：2 に内分する点であるから，△ABC の面積を S とすると $\triangle PBC=\frac{2}{9}S$



$\triangle PAB=\frac{7}{9}\triangle ABD=\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{7}\triangle ABC=\frac{4}{9}S$

$\triangle PCA=\frac{7}{9}\triangle ADC=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{7}\triangle ABC=\frac{3}{9}S$

したがって

$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S=4:2:3$

(3) $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AD}$ (t は実数) とすると

[1] $0<t<1$ のとき

$\triangle QAB=\frac{4}{7}tS$，$\triangle QBC=(1-t)S$

$\triangle QAB:\triangle QBC=3:1$ から $\frac{4}{7}t:(1-t)=3:1$

ゆえに，$t=\frac{21}{25}$ であるから $\overrightarrow{AQ}=\frac{21}{25}\overrightarrow{AD}=\frac{21}{25}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

よって $-\overrightarrow{QA}=\frac{9}{25}(\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA})+\frac{12}{25}(\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA})$

整理すると $4\overrightarrow{QA}+9\overrightarrow{QB}+12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

[2] $t>1$ のとき

$\triangle QAB=\frac{4}{7}tS$，$\triangle QBC=(t-1)S$

$\triangle QAB:\triangle QBC=3:1$ から $\frac{4}{7}t:(t-1)=3:1$

ゆえに，$t=\frac{21}{17}$ であるから　$\overrightarrow{AQ}=\frac{21}{17}\overrightarrow{AD}=\frac{21}{17}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

よって　$-\overrightarrow{QA}=\frac{9}{17}(\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA})+\frac{12}{17}(\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA})$

整理すると　$4\overrightarrow{QA}-9\overrightarrow{QB}-12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

[3]　$t=0$，1 のとき

△QAB または △QBC が存在しないため不適。

[4]　$t<0$ のとき

△QBC に △QAB が含まれ，△QAB：△QBC＝3：1 とならないので不適。

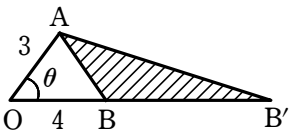
以上から　$4\overrightarrow{QA}+9\overrightarrow{QB}+12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$　または　$4\overrightarrow{QA}-9\overrightarrow{QB}-12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

10　$3s+t\leqq 3$ の両辺を 3 で割ると　$s+\frac{t}{3}\leqq 1$　　また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+\frac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

$\frac{t}{3}=t'$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s+t'\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たすとき，点 P が描く図形は，△OAB′ の周および内部である。また，$s+t\geqq 1$ を満たすとき，点 P が描く図形は，直線 AB に関して，点 O と反対側にある領域である。

ただし，直線 AB を含む。これらの共通部分であるから，点 P が描く図形は，右の図のような △ABB′ の周および内部である。



ここで，∠AOB＝θ とすると

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\cdot OB\cos\theta$

条件から　$8=3\cdot 4\cos\theta$　　よって　$\cos\theta=\frac{2}{3}$

$0°<\theta<180°$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

よって，求める面積は

$$\triangle OAB'-\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB'\sin\theta-\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}(4\cdot 3-4)=4\sqrt{5}$$

11　(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$(x,\ y)=(-1,\ 5)+t(1,\ -2)$

すなわち　$\begin{cases}x=-1+t\\ y=5-2t\end{cases}$

t を消去すると　$y=5-2(x+1)$　　すなわち　$2x+y-3=0$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 5)+t(2,\ 4)$

すなわち $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=5-t \end{cases}$

t を消去すると $x=-1+3(5-y)$ すなわち $x+3y-14=0$

12 直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とする。

(1) $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ ……①

$\vec{n}=(1,\ -2)$, $\overrightarrow{AP}=(x-5,\ y-3)$ であるから，① より

$1\cdot(x-5)+(-2)\cdot(y-3)=0$ よって $x-2y+1=0$

(2) $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ ……①

$\overrightarrow{OA}=(3,\ -1)$, $\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y+1)$ であるから，① より

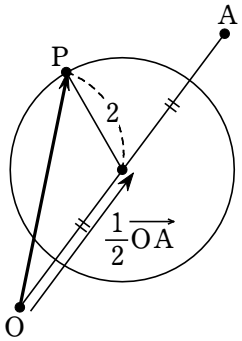
$3\cdot(x-3)+(-1)\cdot(y+1)=0$ よって $3x-y-10=0$

13 (1) $\left|2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right|=4$ を変形すると

$$2\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|=4$$

すなわち $\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|=2$

ゆえに，線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円を表す。



(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$ を変形すると

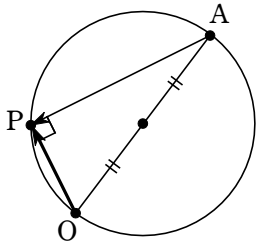
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

よって $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=0$

すなわち $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

ゆえに $\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$

よって，線分 OA を直径とする円を表す。

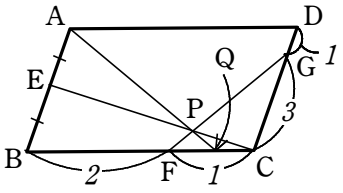


14 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とすると

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$



EP : PC $=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AE}+s\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b}$$ ……①

また，FP：PG＝t：$(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{AG}=(1-t)\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+t\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より $\quad \frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b}=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから $\quad \frac{1}{2}(1+s)=1-\frac{3}{4}t$，$s=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t$

これを解いて $\quad s=\frac{8}{11}$，$t=\frac{2}{11}$

よって $\quad \overrightarrow{AP}=\frac{19}{22}\vec{a}+\frac{8}{11}\vec{b}$

点 Q は直線 AP 上にあるから $\quad \overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ （k は実数）

ゆえに $\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{19}{22}k\vec{a}+\frac{8}{11}k\vec{b}=\frac{3}{22}k\vec{a}+\frac{8}{11}k(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{22}k\overrightarrow{AB}+\frac{8}{11}k\overrightarrow{AC}$

点 Q は直線 BC 上にあるから $\quad \frac{3}{22}k+\frac{8}{11}k=1$ $\quad$ よって $\quad k=\frac{22}{19}$

ゆえに $\quad$ AP：PQ＝19：3

15 (1) 直線 OP，OQ，OR はそれぞれ辺 BC，CA，AB の垂直二等分線であるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},\ \overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2},\ \overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

$(t+1)\overrightarrow{OP}+(t-1)\overrightarrow{OQ}-t(t+1)\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ から

$$(t+1)\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+(t-1)\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}-t(t+1)\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\vec{0}$$

すなわち $\quad -(1+t^2)\overrightarrow{OA}+(1-t^2)\overrightarrow{OB}+2t\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

よって $\quad \overrightarrow{OA}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{OB}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OC}$

(2) $\quad |\overrightarrow{OA}|^2=\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{OB}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OC}\right|^2$

$$=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2|\overrightarrow{OB}|^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2|\overrightarrow{OC}|^2+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ であるから

$$|\overrightarrow{OA}|^2=\left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right\}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

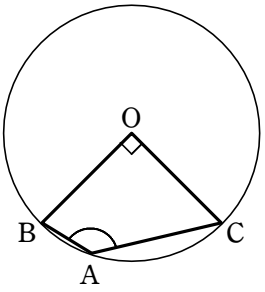
$$=|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$0<t<1$ から　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

よって　　$\angle BOC=90^\circ$

また，$\overrightarrow{OA}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{OC}$ で $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}>0$,

$\dfrac{2t}{1+t^2}>0$ であるから，3 点 A，B，C の位置関係は右図のようになる．



よって　　$\angle BAC=(360^\circ-90^\circ)\div 2=135^\circ$

16 (1)　条件の等式から　$\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}$

よって，点 P は線分 BC を 2：1 の比に内分する点である．㊀

(2)　条件の等式から　$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=0$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$　　すなわち，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BP}$ は垂直である．

したがって，点 P の集合は点 B を通り，直線 AB に垂直な直線である．㊀

(3)　条件の不等式から　$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\leqq 0$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})\leqq 0$

よって　$(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})\leqq 0$

したがって，点 P の集合は，線分 BC を直径とする円周とその内部である．㊀

参考(3)　$\overrightarrow{AB}=(0,0),\overrightarrow{AC}=(c,0),\overrightarrow{AP}=(x,y)$ とすると，$(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})\leqq 0$

から　$x(x-c)+y^2\leqq 0$　　ゆえに　$\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2+y^2\leqq\left(\dfrac{c}{2}\right)^2$

BASIC問題

1 (1)　極限値 $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}$ を求めよ。

(2)　$f(x)=x^4-2x^3+1$ のとき，$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ を求めよ。

2 関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

3 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C(0，4) から引いた接線の方程式を求めよ。

4 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-3x^4+16x^3-18x^2$

(2)　$y=x^4-6x^2-8x+10$

5 曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

STANDARD問題

6 次の関数を，変数 t で微分せよ。ただし，t 以外の文字 V_0，β，h，v_0，g は定数である。

(1)　$V=V_0(1+\beta t)$　　(2)　$s=h+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

7 曲線 $y=x^3$ 上の点 P$(t,\ t^3)$ $[t\neq 0]$ における接線が x 軸，y 軸およびこの曲線と再び交わる点を，それぞれ Q，R，S とする。

(1)　S の x 座標を t で表せ。　　(2)　QR：RS を求めよ。

8 関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 つの曲線 $y=x^3+ax^2$ と $y=x^2+bx+c$ が点 (2，4) において，共通の接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

10 2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

11 $x^2+2y^2=4$ のとき，$x(x+4y^2)$ の最大値，最小値を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。曲線 C に点 A$(-2,\ k)$ から異なる 3 本の接線が引けるような定数 k の値の範囲を求めよ。

13 k を定数とする。3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ が異なる 3 つの実数解 α，β，γ (ただし $\alpha<\beta<\gamma$) をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　α，β，γ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$\alpha\gamma$ が最小となるときの k の値と，そのときの $\alpha\gamma$ の最小値を求めよ。

実戦問題

14 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$ (a，b は定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるとき，a の値を求めよ。

(3)　(2) で求めた a の値に対し，$f(x)$ の区間 $-4\leqq x\leqq 4$ における最大値が 5 であるとする。このとき，b の値とこの区間での $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

15 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

16 a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

1 解答　(1)　$-\dfrac{18}{7}$　　(2)　8

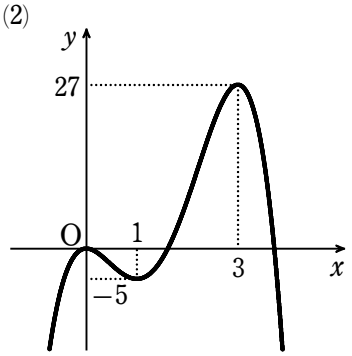
2 解答　$y=9x+27$，$y=9x-5$

3 解答　$y=3x+4$

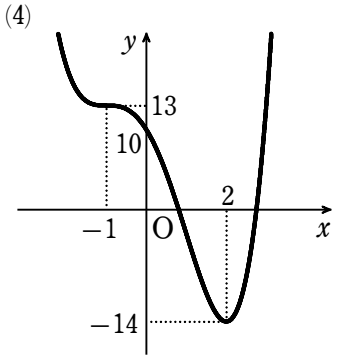
4 解答　(1)　$x=0$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 -5，$x=3$ で極大値 27　〔図〕

(2)　$x=2$ で極小値 -14　〔図〕

(2)



(4)



5 解答　$a<-6$，$6<a$ のとき 1 個；$a=-6$，6 のとき 2 個；$-6<a<6$ のとき 3 個

6 解答　(1)　$\dfrac{dV}{dt}=V_0\beta$　　(2)　$\dfrac{ds}{dt}=v_0-gt$

7 解答　(1)　$-2t$　　(2)　1：3

8 解答　$-6\leqq a\leqq 6$

9 解答　$a=-1$，$b=4$，$c=-8$

10 解答　$y=4x-3$，$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{9}$

11 解答　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$；$x=-1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ で最小値 -5

12 解答　$-2<k<6$

13 解答　(1)　$-10<k<\dfrac{7}{2}$　　(2)　$-\dfrac{5}{2}<\alpha<-1$，$-1<\beta<2$，$2<\gamma<\dfrac{7}{2}$

(3)　$k=-\dfrac{315}{64}$ で最小値 $-\dfrac{105}{16}$

14 解答　(1)　$a<1$　　(2)　$a=-3$　　(3)　$b=0$，$m=-76$

15 解答　$a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$

16 解答　$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0，

$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$，

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$

1 (1) $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}=\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2(x+4)+2(x+4)}{(x+4)(x-3)}=\lim_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x^2+2)}{(x+4)(x-3)}$

$=\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2+2}{x-3}=-\dfrac{18}{7}$

(2) $f'(x)=4x^3-6x^2$

よって　$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4\cdot 2^3-6\cdot 2^2=8$

別解　$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+1-(2^4-2\cdot 2^3+1)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^3=8$

2 $y=x^3+3x^2$ を微分すると　$y'=3x^2+6x$

接点の座標を $(a,\ a^3+3a^2)$ とすると，接線の傾きは $3a^2+6a$ であるから

$3a^2+6a=9$　これを解くと　$a=-3,\ 1$

したがって，接点の座標は $(-3,\ 0),\ (1,\ 4)$ であるから，求める接線の方程式は

$y-0=9\{x-(-3)\},\ y-4=9(x-1)$

すなわち　$y=9x+27,\ y=9x-5$

3 $y=x^3+2$ を微分すると　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+2)$ とすると，接線の方程式は　$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+2$　……①

この直線が点 C$(0,\ 4)$ を通るから　$4=-2a^3+2$

式を整理して　$a^3=-1$　a は実数であるから　$a=-1$

したがって，接線の方程式は，① より　$y=3x+4$

4 (1) $y'=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ 3$

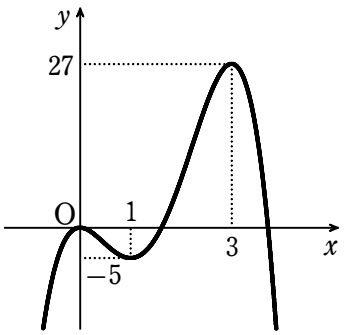
y の増減表は次のようになる。

x	…	0	…	1	…	3	…
y'	＋	0	−	0	＋	0	−
y	↗	極大 0	↘	極小 −5	↗	極大 27	↘

よって，$x=0$ で極大値 0，　$x=1$ で極小値 -5，

$x=3$ で極大値 27　をとる。

グラフは〔図〕のようになる。



(2)　$y'=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)$

ここで，$g(x)=x^3-3x-2$ とすると　　$g(-1)=0$

よって，$g(x)$ は $x+1$ で割り切れて

$$g(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2(x-2)$$

ゆえに　　$y'=4(x+1)^2(x-2)$

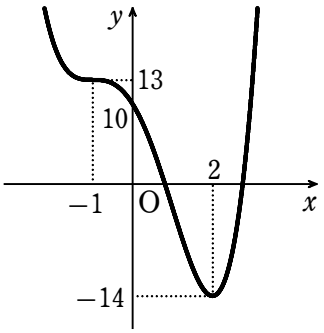
$y'=0$ とすると　$x=-1$，2

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	13	↘	極小 -14	↗

よって，$x=2$ で極小値 -14 をとる。

グラフは[図]のようになる。



5　曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の x 座標は，

方程式 $3x^3-7x=2x-a$ すなわち $-3x^3+9x=a$ の実数解である。

$f(x)=-3x^3+9x$ とおくと　　$f'(x)=-9x^2+9=-9(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -6	↗	極大 6	↘

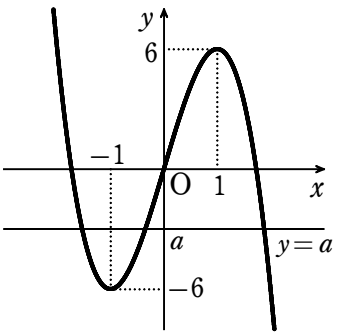
よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

与えられた曲線と直線の共有点の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

したがって　　$a<-6$，$6<a$ のとき 1 個；

$a=-6$，6　　のとき 2 個；

$-6<a<6$　　のとき 3 個



6　(1)　$V=V_0+V_0\beta t$ であるから

$$\frac{dV}{dt}=(V_0)'+V_0\beta(t)'=0+V_0\beta\cdot1=V_0\beta$$

(2)　$\dfrac{ds}{dt}=(h)'+v_0(t)'-\dfrac{1}{2}g(t^2)'=0+v_0\cdot1-\dfrac{1}{2}g\cdot2t=v_0-gt$

7　(1)　$y=x^3$ を微分すると　　$y'=3x^2$

点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における，曲線の接線の方程式は

$y-t^3=3t^2(x-t)$　　すなわち　　$y=3t^2x-2t^3$　……①

よって，点Sのx座標は，方程式 $x^3=3t^2x-2t^3$ ……② のt以外の解である。

②から　　$x^3-3t^2x+2t^3=0$　　左辺を因数分解して　　$(x-t)^2(x+2t)=0$

したがって，Sのx座標は　　$x=-2t$

(2)　①で，$y=0$とすると　　$0=3t^2x-2t^3$

すなわち　　$t^2(3x-2t)=0$

$t^2\neq 0$であるから　　$x=\dfrac{2}{3}t$

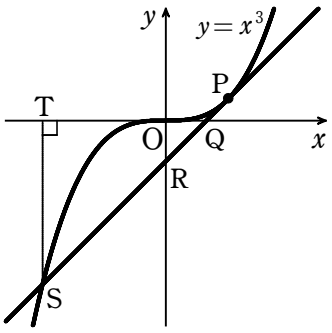
よって，Qの座標は　$\left(\dfrac{2}{3}t,\ 0\right)$

Sからx軸に下ろした垂線をSTとすると，Tの座標は　　$(-2t,\ 0)$

OR∥TSであるから　　QR：RS＝OQ：OT

$OQ=\left|\dfrac{2}{3}t\right|=\dfrac{2}{3}|t|$，$OT=|-2t|=2|t|$ であるから

$$QR：RS=\frac{2}{3}|t|：2|t|=1：3$$



8　$f'(x)=3x^2+2ax+12$

$f(x)$が常に増加するための条件は

$f'(x)\geqq 0$　すなわち　$3x^2+2ax+12\geqq 0$

が常に成り立つことである。

よって，2次方程式$3x^2+2ax+12=0$の判別式Dについて　　$D\leqq 0$

$\dfrac{D}{4}=a^2-36=(a+6)(a-6)$であるから　　$(a+6)(a-6)\leqq 0$

したがって　$-6\leqq a\leqq 6$

9　$f(x)=x^3+ax^2$，$g(x)=x^2+bx+c$とすると

$f'(x)=3x^2+2ax$，　$g'(x)=2x+b$

2つの曲線はともに点$(2,\ 4)$を通るから　　$f(2)=4$　$g(2)=4$

よって　　$8+4a=4$　　……①

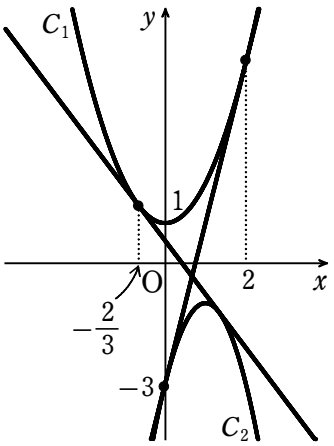
$4+2b+c=4$　……②

また，点$(2,\ 4)$において，共通の接線をもつから　　$f'(2)=g'(2)$

よって　　$12+4a=4+b$　……③

①，②，③を解いて　　$a=-1$，$b=4$，$c=-8$

10 [解法 1]　$y=x^2+1$ から　　$y'=2x$



C_1 上の点 $(a,\ a^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

すなわち　　$y=2ax-a^2+1$　……①

直線①が C_2 に接するための条件は，y を消去した x の 2 次方程式

$$-2x^2+4x-3=2ax-a^2+1$$

すなわち　　$2x^2+2(a-2)x+(4-a^2)=0$

が重解をもつことである。

よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(4-a^2)=0$$

ゆえに　　$3a^2-4a-4=0$　　よって　　$(a-2)(3a+2)=0$

これを解くと　　$a=2,\ -\frac{2}{3}$

①から，求める方程式は

$a=2$ のとき　　$y=4x-3$,

$a=-\frac{2}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

[解法 2]　([解法 1] と 4 行目まで同じ)

$y=-2x^2+4x-3$ から　　$y'=-4x+4$

C_2 上の点 $(b,\ -2b^2+4b-3)$ における接線の方程式は

$$y-(-2b^2+4b-3)=(-4b+4)(x-b)$$

すなわち　　$y=(-4b+4)x+2b^2-3$　……②

①と②が一致するための条件は

$2a=-4b+4$　……③　かつ　$-a^2+1=2b^2-3$　……④

③から　　$a=-2(b-1)$

④に代入して　　$-4(b^2-2b+1)+1=2b^2-3$

よって　　$-2b(3b-4)=0$　　ゆえに　　$b=0,\ \frac{4}{3}$

②から，求める方程式は

$b=0$ のとき　　$y=4x-3$,

$b=\frac{4}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

11　$x^2+2y^2=4$ から　　$2y^2=4-x^2$　……①

よって　　$x(x+4y^2)=x\{x+2(4-x^2)\}=x(-2x^2+x+8)=-2x^3+x^2+8x$

ここで，$2y^2 \geqq 0$ であるから　　$4-x^2 \geqq 0$　　ゆえに　　$-2 \leqq x \leqq 2$　……②

$f(x)=-2x^3+x^2+8x$ とおくと　　$f'(x)=-6x^2+2x+8=-2(x+1)(3x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ \dfrac{4}{3}$

② の範囲において，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↘	-5	↗	$\dfrac{208}{27}$	↘	4

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{4}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$，$x=-1$ で最小値 -5 をとる。

$x=\dfrac{4}{3}$ のとき，① から　　$2y^2=\dfrac{20}{9}$　　よって　　$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$x=-1$ のとき，① から　　$2y^2=3$　　よって　　$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

したがって　　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$；

$x=-1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ で最小値 -5

12　$y=x^3-3x$ から　　$y'=3x^2-3$

よって，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

すなわち　　$y=3(t^2-1)x-2t^3$

この接線が点 A $(-2,\ k)$ を通るから

$$k=3(t^2-1)\cdot(-2)-2t^3$$

すなわち　　$-2t^3-6t^2+6=k$　……①

ここで，3 次関数のグラフにおいて，接点の x 座標が異なれば接線も異なる。

よって，点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるための条件は，曲線 C 上の接点が 3 つ存在することであり，これは，t についての 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつことと同値である。

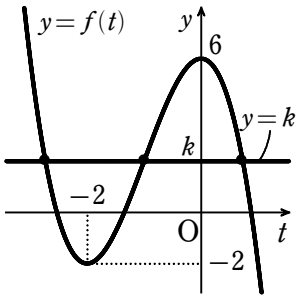
ゆえに，① の左辺を $f(t)$ とおくと，求める条件は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつことである。

ここで　　$f'(t)=-6t^2-12t=-6(t+2)t$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=-2,\ 0$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになり，$y=f(t)$ のグラフは右下のようになる。

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -2	↗	極大 6	↘



グラフより，求める k の値の範囲は

$-2<k<6$

13 (1)　$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-k=0$ から　　$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=k$

この方程式の実数解の個数は，$y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$ とすると

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

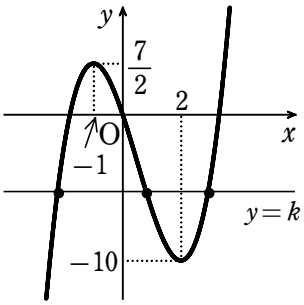
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

ゆえに，直線 $y=k$ との共有点の個数がちょうど3個となる k の値の範囲は

$$-10<k<\frac{7}{2}$$



(2)　[1]　$k=-10$ のとき

方程式は　　$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+10=0$　　よって　　$2x^3-3x^2-12x+20=0$

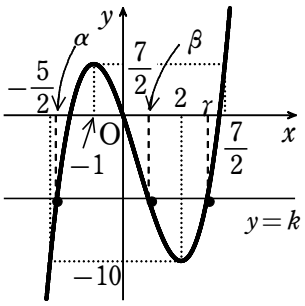
すなわち　　$(x-2)^2(2x+5)=0$　　したがって　　$x=-\frac{5}{2},\ 2$

[2]　$k=\frac{7}{2}$ のとき

方程式は　　$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{7}{2}=0$　　よって　　$2x^3-3x^2-12x-7=0$

すなわち　　$(x+1)^2(2x-7)=0$

したがって　　$x=-1,\ \dfrac{7}{2}$



[1]，[2] から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

ゆえに，k が $-10<k<\dfrac{7}{2}$ の範囲を動くとき

$$-\frac{5}{2}<\alpha<-1,\ -1<\beta<2,\ 2<\gamma<\frac{7}{2}$$

(3)　解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots①,\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6\quad\cdots\cdots②,\qquad \alpha\beta\gamma=k\quad\cdots\cdots③$$

①，② から　　$\alpha\gamma=-6-\beta(\alpha+\gamma)=-6-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)=\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta-6=\left(\beta-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{105}{16}$

(2) より，$-1<\beta<2$ であるから，$\alpha\gamma$ は $\beta=\dfrac{3}{4}$ で最小値 $-\dfrac{105}{16}$ をとる。

このとき，③ から　　$k=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{105}{16}\right)=-\dfrac{315}{64}$

14　(1)　$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$$f'(x)=3x^2-6x+3a=3(x^2-2x+a)$$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であればよいから

$$(-1)^2-1\cdot a=1-a>0\qquad\text{よって}\qquad a<1$$

(2)　$f'(x)=0$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とすると，$f(x)$ の x^3 の係数が正であるから，$x=\beta$ で極大，$x=\alpha$ で極小となる。

$$\begin{aligned}f(\beta)-f(\alpha)&=(\beta^3-3\beta^2+3a\beta+b)-(\alpha^3-3\alpha^2+3a\alpha+b)\\&=(\beta^3-\alpha^3)-3(\beta^2-\alpha^2)+3a(\beta-\alpha)\\&=(\beta-\alpha)\{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)+3a\}\\&=(\beta-\alpha)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\beta+\alpha)+3a\}\end{aligned}$$

ここで，解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=a$

よって　　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4a=4(1-a)$

$\beta<\alpha$ より，$\beta-\alpha<0$ であるから　　$\beta-\alpha=-2\sqrt{1-a}$

ゆえに　　$f(\beta)-f(\alpha)=-2\sqrt{1-a}\,(2^2-a-3\cdot2+3a)$

$$=-4\sqrt{1-a}\,(a-1)=4(\sqrt{1-a})^3$$

$f(\beta)-f(\alpha)=32$ であるから　　$4(\sqrt{1-a})^3=32$　　すなわち　　$(\sqrt{1-a})^3=8$

したがって　$\sqrt{1-a}=2$　　$1-a=4$ から　$a=-3$　　これは $a<1$ を満たす。

別解　$(f(\beta)-f(\alpha)$ の計算)

(解 1)　$x=\alpha$，β は，$f'(x)=0$ の解であるから，$x^2-2x+a=0$ を満たす。

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
x^2-2x+a\overline{)\ x^3-3x^2+3ax+b} \\
\underline{x^3-2x^2+\ ax} \\
-x^2+2ax+b \\
\underline{-x^2+\ 2x-a} \\
2(a-1)x+a+b
\end{array}
$$

上の計算から　$f(x)=(x^2-2x+a)(x-1)+2(a-1)x+a+b$

よって　$f(\alpha)=2(a-1)\alpha+a+b$

$f(\beta)=2(a-1)\beta+a+b$

したがって　$f(\beta)-f(\alpha)=2(a-1)(\beta-\alpha)=2(a-1)(-2\sqrt{1-a}\,)$

$=4(\sqrt{1-a}\,)^3$

(解 2)　$f(\beta)-f(\alpha)=\Big[f(x)\Big]_\alpha^\beta=\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=-\dfrac{3}{6}(\beta-\alpha)^3=-\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\dfrac{1}{2}(-2\sqrt{1-a}\,)^3=4(\sqrt{1-a}\,)^3$

(3)　$f(x)=x^3-3x^2-9x+b$ から　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

$-4\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-76$	↗	$b+5$	↘	$b-27$	↗	$b-20$

よって，$f(x)$ は　$x=-1$ のとき最大値 $b+5$，

$x=-4$ のとき最小値 $b-76$　をとる。

したがって，$b+5=5$ から　$b=0$　　このとき　$m=b-76=-76$

15　$f(-x)=-f(x)$ が成り立つから，$g(x)=|f(x)|$ とおくと

$g(-x)=|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|=g(x)$

よって，$g(x)$ は偶関数である。

ゆえに，区間 $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で最大値 M を考えればよい。

$f(x)=x^3-3ax$ から　$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

[1]　$a\leqq 0$ のとき

常に $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は増加関数である。

また，$f(0)=0$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ において　$f(x)\geqq 0$

よって　$M=f(1)=1-3a$

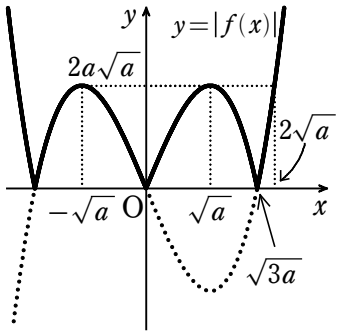
[2]　$a>0$ のとき

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

ゆえに，$y=|f(x)|$ のグラフは右の図のようになる。



$|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$ であるから，$f(x)=2a\sqrt{a}$ となる x を求めると，$x^3-3ax=2a\sqrt{a}$ より

$$(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})=0$$

よって　　$x=-\sqrt{a}$，$2\sqrt{a}$

$x>0$ であるものは　　$x=2\sqrt{a}$

(i)　$0<2\sqrt{a}\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(1)|$ であるから　　$M=|f(1)|=1-3a$

(ii)　$\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}$ すなわち $\dfrac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(\sqrt{a})|$ であるから　　$M=|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$

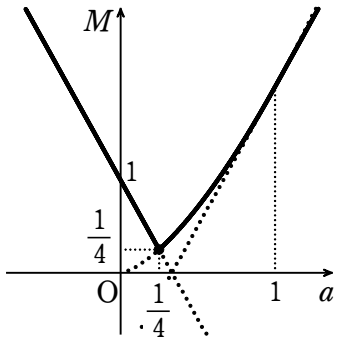
(iii)　$1<\sqrt{a}$ すなわち $1<a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(1)|$ であるから　　$M=|f(1)|=3a-1$

以上から　　$M=\begin{cases}1-3a & \left(a<\dfrac{1}{4}\right)\\ 2a\sqrt{a} & \left(\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 1\right)\\ 3a-1 & (1<a)\end{cases}$

したがって，M は $a\leqq\dfrac{1}{4}$ では減少し，$a\geqq\dfrac{1}{4}$ では増加するから，$a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

参考　a の関数 M のグラフは，右の図のようになる。



16 $f'(x)=-3x^2+3a=-3(x^2-a)$

$a\leqq 0$ ならば $f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に減少する。

よって，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。

$a>0$ ならば　　$f'(x)=-3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{a}$

[1]　$0<\sqrt{a}<1$　すなわち　$0<a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{a}$ で極大かつ最大となる。

[2]　$1\leqq\sqrt{a}$　すなわち　$1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に増加。

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最大となる。

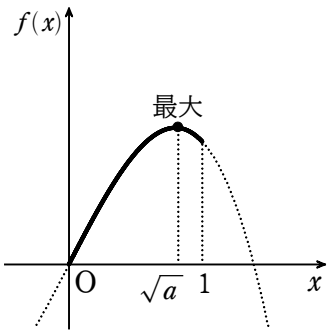
以上から

$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0,

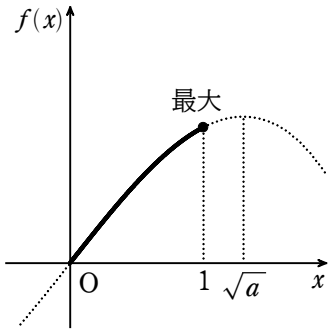
$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$,

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$

[1]



[2]



BASIC問題

1 (1) 定積分 $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$ を求めよ。

2 等式 $f(x)=1+2\int_{0}^{1}(xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

3 等式 $\int_{a}^{x}f(u)du=5x^2-ax-7a-2$ を満たす関数 $f(x)$ と正の定数 a の値を求めよ.

4 定積分 $\int_{0}^{2}|x^2+3x-4|dx$ を求めよ。

5 曲線 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

STANDARD問題

6 xy 平面において，連立不等式 $y\geqq|x^2-1|$，$y\leqq-x^2+2x+3$ の表す領域を Dの面積を求めよ。

7 2 つの放物線 $y=-x^2+2x+3$ と $y=-x^2+6x-3$ に共通して接する直線の方程式を求めよ．また，この直線と 2 つの放物線とで囲まれた部分の面積を求めよ.

8 a，b，c を定数とする。2 つの曲線 $y=x^3+ax+b$ と $y=ax^2+bx+c$ が共有点 P(2，19) をもち，点 P において共通の接線をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b，c の値を求めよ。

(2) 2 つの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

9 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，点 (2，0) を通る直線 g で 2 等分するとき，g の傾きを求めよ。

実戦問題

10 次の関係式を満たす定数 a および関数 $g(x)$ を求めよ。

$$\int_a^x \{g(t)+tg(a)\}dt = x^2-2x-3$$

11 放物線 L：$y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1) 2 つの接点の座標を求めよ。

(2) 円 C の方程式を求めよ。

(3) 2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ とで囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするように，定数 m $(0<m<4)$ の値を定めよ。

13 関数 $f(x)$ は $\begin{cases} x\leqq 0 \text{ では } f(x)=x(x+1) \\ x\geqq 0 \text{ では } f(x)=x(1-x) \end{cases}$ で与えられるとする．

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフを描け．

(2) 積分 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ を求め，曲線 $y=F(x)$ をグラフに示せ．

1 解答　(1)　8　　(2)　$-\dfrac{7}{6}$

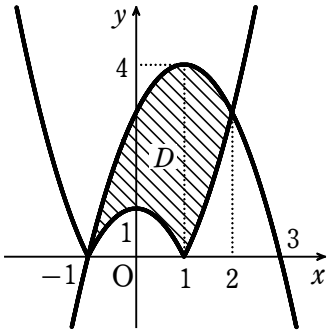
2 解答　$f(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

3 解答　$f(x)=10x-2,\ a=2$

4 解答　5

5 解答　$\dfrac{37}{12}$

6 解答　(1)　[図]，境界線を含む　　(2)　$\dfrac{19}{3}$



7 解答　順に $y=x+\dfrac{13}{4},\ \dfrac{2}{3}$

8 解答　(1)　$a=1,\ b=9,\ c=-3$　　(2)　$\dfrac{625}{12}$

9 解答　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

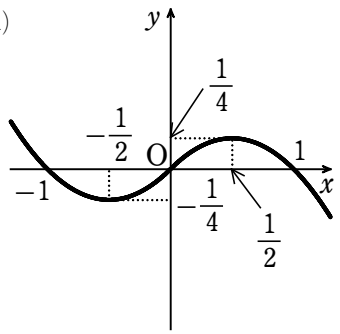
10 解答　$a=3,\ g(x)=x-2$

11 解答　(1)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$　　(3)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

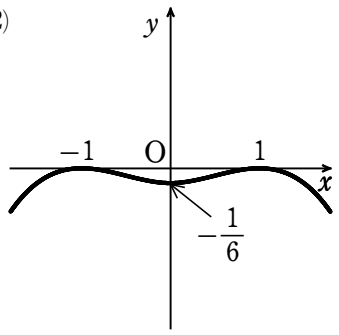
12 解答　$m=\dfrac{4}{9}$

13 (2) $x\leqq 0$ のとき $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$，$x\geqq 0$ のとき $F(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$

(1)



(2)



1 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-x^2+5x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-1-1+5\right)-\left(\frac{1}{4}+1-1-5\right)$

$=8$

別解　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-2x)dx+\int_{-1}^{1}(-3x^2+5)dx$

$\displaystyle=0+2\int_{0}^{1}(-3x^2+5)dx=2\left[-x^3+5x\right]_{0}^{1}=2(-1^3+5\cdot1-0)=8$

(2) (与式)$\displaystyle=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}\{(x^2-x)+(2x-1)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}(x^2+x-1)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}$

$\displaystyle=0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{7}{6}$

2 右辺を変形して　$\displaystyle f(x)=1+2x\int_{0}^{1}tf(t)\,dt+2\int_{0}^{1}f(t)\,dt$

$\displaystyle\int_{0}^{1}tf(t)\,dt=a$，$\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)\,dt=b$ とおくと，a，b は定数であり

$f(x)=2ax+2b+1$

よって　$\displaystyle a=\int_{0}^{1}t(2at+2b+1)dt=\int_{0}^{1}\{2at^2+(2b+1)t\}dt$

$\displaystyle=\left[\frac{2}{3}at^3+\frac{2b+1}{2}t^2\right]_{0}^{1}$

$\displaystyle=\frac{2}{3}a+\frac{2b+1}{2}$

ゆえに　$2a-6b-3=0$　……①

一方　$\displaystyle b=\int_{0}^{1}(2at+2b+1)dt=\left[at^2+(2b+1)t\right]_{0}^{1}$

$=a+2b+1$

よって　$a+b+1=0$　……②

①，② を連立して解くと　$\displaystyle a=-\frac{3}{8}$，$\displaystyle b=-\frac{5}{8}$

ゆえに　$\displaystyle f(x)=2\left(-\frac{3}{8}\right)x+2\left(-\frac{5}{8}\right)+1=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

3 等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=10x-a$

また，もとの等式の両辺に $x=a$ を代入すると　$0=5a^2-a^2-7a-2$

ゆえに，$4a^2-7a-2=0$ から　$(4a+1)(a-2)=0$　　$a>0$ であるから　$a=2$　答

よって　$f(x)=10x-2$　答

4　$|x^2+3x-4|=|(x+4)(x-1)|$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$|x^2+3x-4|=-(x^2+3x-4)$$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

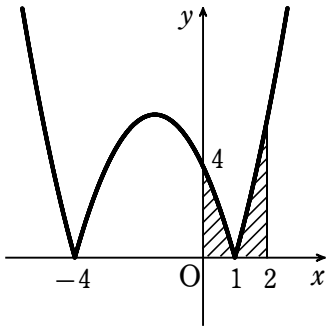
$$|x^2+3x-4|=x^2+3x-4$$

したがって

$$(与式)=\int_0^1\{-(x^2+3x-4)\}dx+\int_1^2(x^2+3x-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_1^2$$

$$=5$$



5　方程式 $(x+1)(x-1)(x-2)=0$ を解くと

$$x=-1,\ 1,\ 2$$

グラフは右の図のようになり

$-1 \leqq x \leqq 1$ で　$y \geqq 0$

$1 \leqq x \leqq 2$ で　$y \leqq 0$

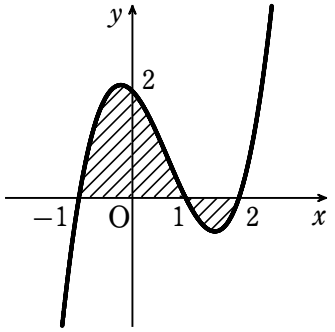
また　　$y=(x+1)(x-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_1^2(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$$



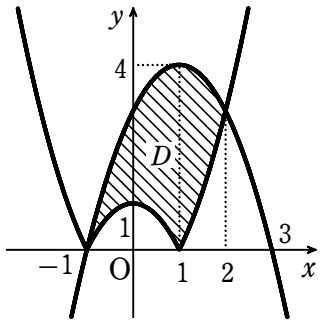
6　(1)　$y=|x^2-1|$ のグラフは，$y=x^2-1$ の $y<0$ の部分を上に折り返したものである。

また　　$y=-x^2+2x+3$

$$=-(x-1)^2+4$$

よって，領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　2つのグラフ $y=|x^2-1|$，$y=-x^2+2x+3$ の $x>1$ における共有点について，

$x^2-1=-x^2+2x+3$ とすると

$$2x^2-2x-4=0 \qquad \text{よって} \qquad (x+1)(x-2)=0$$

$x>1$ であるから　　$x=2$

ゆえに，領域 D の面積は，図より

$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2x+3)-(-x^2+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

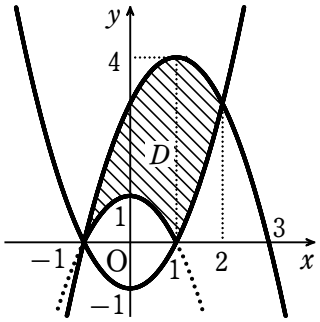
$$=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx+\int_{1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[x^2+2x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{1}^{2}$$

$$=(1+2)-(1-2)+\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(-\frac{2}{3}+1+4\right)$$

$$=\frac{19}{3}$$

別解　領域 D の面積は，放物線 $y=x^2-1$ と放物線 $y=-x^2+2x+3$ で囲まれた部分の面積から，放物線 $y=x^2-1$ と放物線 $y=1-x^2$ で囲まれた部分の面積を引いたものである。



ゆえに，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$-\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3-\frac{2}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{19}{3}$$

7　$y=-x^2+2x+3$ …… ①，$y=-x^2+6x-3$ …… ② とおく．

① において　$y'=-2x+2$

放物線 ① 上の点 $(t,\ -t^2+2t+3)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+2)(x-t)-t^2+2t+3$$

すなわち　$y=(-2t+2)x+t^2+3$ …… ③

② において　$y'=-2x+6$

放物線 ② 上の点 $(p,\ -p^2+6p-3)$ における接線の方程式は

$$y=(-2p+6)(x-p)-p^2+6p-3$$

すなわち　$y=(-2p+6)x+p^2-3$ …… ④

③，④ が一致するとき

$$-2t+2=-2p+6,\ \ t^2+3=p^2-3$$

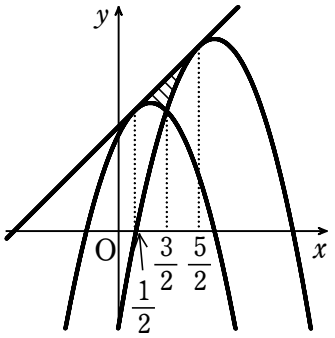
これを解いて　　$t=\frac{1}{2},\ \ p=\frac{5}{2}$

$t=\dfrac{1}{2}$ を ③ に代入して　$y=x+\dfrac{13}{4}$

これが求める直線の方程式である．

2 つの放物線 ①，② の交点の x 座標は $-x^2+2x+3=-x^2+6x-3$ を解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

よって，求める面積を S とすると，図から



$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(x+\frac{13}{4}\right)-(-x^2+2x+3)\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left\{\left(x+\frac{13}{4}\right)-(-x^2+6x-3)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

8 (1)　$f(x)=x^3+ax+b$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とする。

$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフがともに点 P(2，19) を通るから

$f(2)=19$　かつ　$g(2)=19$

よって　$8+2a+b=19$　……①

$4a+2b+c=19$　……②

また，点 P において共通接線をもつから，P における $y=f(x)$，$y=g(x)$ の接線の傾きが等しい。

すなわち　$f'(2)=g'(2)$

$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2ax+b$ であるから

$12+a=4a+b$　……③

①，③ を解いて　$a=1$，$b=9$

② に代入して　$4+18+c=19$　　よって　$c=-3$

ゆえに　$a=1$，$b=9$，$c=-3$

(2)　(1) より　$f(x)=x^3+x+9$,

$g(x)=x^2+9x-3$

2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標について,

$x^3+x+9=x^2+9x-3$

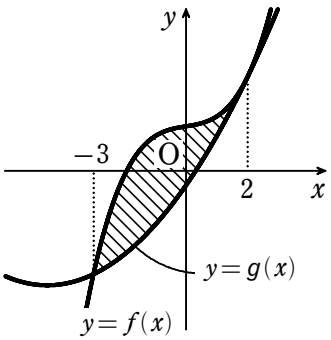
とすると

$x^3-x^2-8x+12=0$

よって　$(x-2)^2(x+3)=0$

ゆえに，共有点の x 座標は

2，-3



したがって，求める面積は

$$\int_{-3}^{2}\{(x^3+x+9)-(x^2+9x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(x^3-x^2-8x+12)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right]_{-3}^{2}$$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-4\cdot2^2+12\cdot2\right)-\left\{\frac{(-3)^4}{4}-\frac{(-3)^3}{3}-4\cdot(-3)^2+12\cdot(-3)\right\}$$

$$=\frac{625}{12}$$

参考　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ である。

これを利用すると，面積は次のように求められる。

$$\int_{-3}^{2}\{(x^3+x+9)-(x^2+9x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)^2dx=\frac{1}{12}\{2-(-3)\}^4=\frac{625}{12}$$

9　点 $(2,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な直線は条件を満たさない。

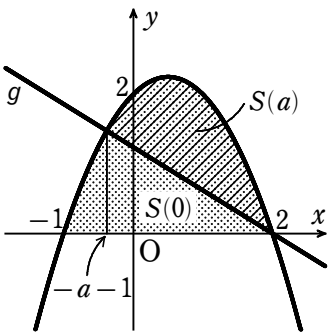
よって，直線 g の方程式を　$y=a(x-2)$　とおく。

放物線 $y=2+x-x^2$ と直線 g で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。両者の交点の x 座標は，方程式

$2+x-x^2=a(x-2)$ を解いて　　$x=2$，$-a-1$

条件を満たすとき

$-1<-a-1<2$　すなわち　$-3<a<0$　……①



$$S(a)=\int_{-a-1}^{2}\{(2+x-x^2)-a(x-2)\}dx$$

$$=-\int_{-a-1}^{2}(x+a+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2-(-a-1)\}^3=\frac{1}{6}(a+3)^3$$

放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸 $[y=0(x-2)]$ で囲まれた図形の面積は $S(0)$ であり

$S(0)=\dfrac{1}{6}(0+3)^3=\dfrac{9}{2}$

面積を 2 等分するとき，$2S(a)=S(0)$ であるから

$2\cdot\dfrac{1}{6}(a+3)^3=\dfrac{9}{2}$　　よって　　$(a+3)^3=\dfrac{27}{2}$

ゆえに　　$a+3=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}$　　よって　　$a=\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$　（これは ① を満たす）

したがって，g の傾きは　　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

10 等式の両辺を x で微分すると　$g(x)+xg(a)=2x-2$　…… ①

また，等式の両辺に $x=a$ を代入すると　$0=a^2-2a-3$

よって　$(a-3)(a+1)=0$

ゆえに　$a=3$，-1

$a=3$ のとき，① より　$g(x)+xg(3)=2x-2$　…… ②

② に $x=3$ を代入すると　$g(3)+3g(3)=4$

よって　$g(3)=1$

② より　$g(x)=x-2$

$a=-1$ のとき，① より　$g(x)+xg(-1)=2x-2$

これに $x=-1$ を代入すると　$g(-1)-g(-1)=-4$

よって，$0=-4$ となり不適。

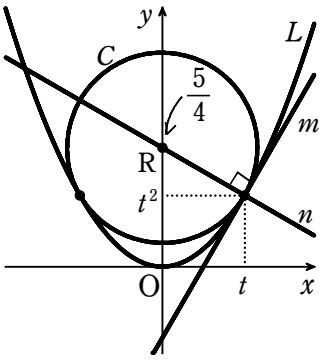
以上から　$a=3$，$g(x)=x-2$

11 (1)　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

L と C の接点の x 座標を $t\,(t\neq 0)$ とし，この点での共通の接線を m とすると，m の傾きは　　$2t$

点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $(t,\ t^2)$ を通る直線を n とすると，

n の傾きは　　$\dfrac{t^2-\dfrac{5}{4}}{t-0}=\dfrac{4t^2-5}{4t}$



直線 m，n は直交するから　　$2t\cdot\dfrac{4t^2-5}{4t}=-1$

整理すると　　$t^2=\dfrac{3}{4}$　　よって　　$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

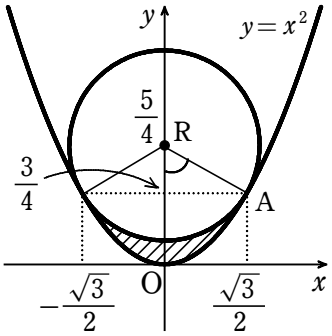
したがって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

(2)　点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ の距離は　　$\sqrt{\left(0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\right)^2}=1$

よって，円 C の方程式は　　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$

(3)　右の図のように，接点を A とすると，

$\sin\angle ORA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　　$\angle ORA=\dfrac{\pi}{3}$



よって，求める面積は

$$2\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx\right\}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

別解　(1)，(2)　円の方程式を $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=r^2$ $(r>0)$ とする。

これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると　　$y+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=r^2$

よって　　$16y^2-24y+25-16r^2=0$　……①

円と放物線が異なる 2 点で接する条件は，① が重解をもつことである。

すなわち，① の判別式を D とすると　　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(-12)^2-16(25-16r^2)=256(r^2-1)$$

よって　　$r^2=1$　　$r>0$ であるから　　$r=1$

このとき，① の重解は　　$x=\dfrac{-(-12)}{16}=\dfrac{3}{4}$

$x^2=\dfrac{3}{4}$ より　　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　接点の座標は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

円の方程式は　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$

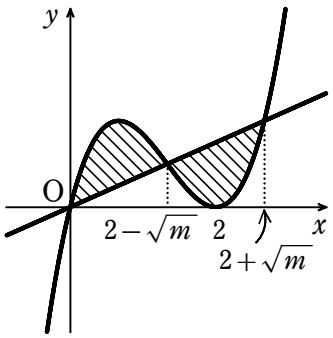
12　まず，曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標を求める。

$x^3-4x^2+4x=mx$ とすると　$x(x^2-4x+4-m)=0$

$0<m<4$ であるから

$x=0,\ 2\pm\sqrt{m}$

$0<m<4$ のとき，囲まれてできる２つの図形は右の図のようになるから，$\alpha=2-\sqrt{m}$，$\beta=2+\sqrt{m}$ とおくと，条件より



$$\int_0^{\alpha}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{mx-(x^3-4x^2+4x)\}dx$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\alpha}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx=0$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\beta}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx=0$

すなわち　$\displaystyle\int_0^{\beta}\{x^3-4x^2+(4-m)x\}dx=0$

よって　$\displaystyle\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{4-m}{2}x^2\right]_0^{\beta}=0$

したがって　$\displaystyle\frac{\beta^4}{4}-\frac{4}{3}\beta^3+\frac{4-m}{2}\beta^2=0$　すなわち　$\displaystyle\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-16\beta+6(4-m)\}=0$

$\beta\neq 0$ であるから　$3\beta^2-16\beta+6(4-m)=0$

$\beta=2+\sqrt{m}$ を代入して　$3(2+\sqrt{m})^2-16(2+\sqrt{m})+6(4-m)=0$

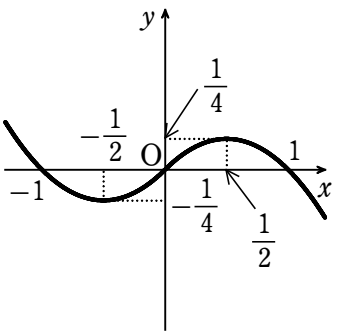
整理すると　$3(\sqrt{m})^2+4\sqrt{m}-4=0$　　よって　$(3\sqrt{m}-2)(\sqrt{m}+2)=0$

$\sqrt{m}+2>0$ であるから　$\sqrt{m}=\dfrac{2}{3}$　　ゆえに　$m=\dfrac{4}{9}$　これは $0<m<4$ を満たす。

13　(1)　$x\leqq 0$ のとき　$\displaystyle f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$x\geqq 0$ のとき　$\displaystyle f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



(2)　$x\leqq 0$ のとき　$\displaystyle F(x)=\int_{-1}^{x}t(t+1)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$

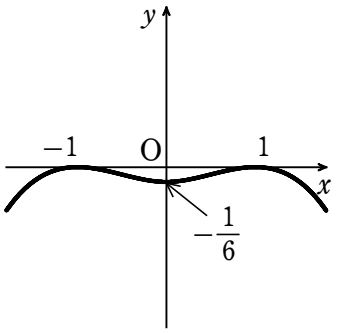
$x\geqq 0$ のとき　$\displaystyle F(x)=\int_{-1}^{0}t(t+1)dt+\int_0^{x}t(1-t)dt=-\frac{1}{6}+\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^{x}$

$\displaystyle=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$

$F'(x)=f(x)$ から，$F(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	0	↘

ゆえに，$y=F(x)$ のグラフは右図のようになる．



BASIC問題

1 第5項が10，第10項が25である等差数列$\{a_n\}$の，第20項から第29項までの和Sを求めよ。

2 ある等比数列の初項から第n項までの和が54，初項から第$2n$項までの和が63であるとき，この等比数列の初項から第$3n$項までの和を求めよ．

3 次の数列の初項から第n項までの和S_nを求めよ。

$1\cdot3$，$3\cdot5$，$5\cdot7$，……，$(2n-1)(2n+1)$

4 次の数列の初項から第n項までの和を求めよ。

$\dfrac{1}{1\cdot5}$，$\dfrac{1}{5\cdot9}$，$\dfrac{1}{9\cdot13}$，……

5 初項から第n項までの和S_nが，$S_n=n^2+5n+1$で表される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

6 3つの数-5，a，bがこの順に等差数列をなし，a，b，45がこの順に等比数列をなす。このとき，a，bの値を求めよ。

STANDARD問題

7 初項70の等差数列$\{a_n\}$の第10項から第20項までの和が0であるとする。このとき，初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

8 数列1，11，111，1111，…… の一般項a_nと，初項から第n項までの和S_nを求めよ。

9 次の数列の初項から第n項までの和S_nを求めよ。

(1) 1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

(2) 1^2，1^2+2^2，$1^2+2^2+3^2$，$1^2+2^2+3^2+4^2$，……

10 次の和Sを求めよ。

(1) $S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

(2) $S=2^{n-1}+2\cdot2^{n-2}+3\cdot2^{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2+n$

実戦問題

11 p は素数，m，n は正の整数で $m<n$ とする。m と n の間にあって，p を分母とする既約分数の総和を求めよ。

12 2 以上の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$ を求めよ。

13 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{76}\frac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}$ を求めよ。

1 解答 685

2 解答 $\dfrac{129}{2}$

3 解答 $\dfrac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

4 解答 $\dfrac{n}{4n+1}$

5 解答 $a_1=7$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=2n+4$

6 解答 $a=5$，$b=15$ または $a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

7 解答 第 14 項または第 15 項，最大値は 525

8 解答 $a_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$，$S_n=\dfrac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

9 解答 (1) 一般項が$\dfrac{3^k-1}{2}$であることから，和は$\dfrac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

(2) 一般項が$\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$であることから，和は$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

10 解答 (1) $x=1$ のとき $S=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$，

$x\neq 1$ のとき $S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2) $S=2^{n+1}-n-2$

11 解答 $\dfrac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)$

12 解答 $\dfrac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$

13 解答 $7+3\sqrt{5}$

1 初項を a，公差を d とする。

第 5 項が 10であるから　$a+(5-1)d=10$　すなわち　$a+4d=10$ …… ①

第 10 項が 25 であるから　$a+(10-1)d=25$　すなわち　$a+9d=25$ …… ②

①，② を解くと　$a=-2,\ d=3$

初項から第 29 項までの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 29\{2\cdot(-2)+(29-1)\cdot 3\}=1160$

初項から第 19 項までの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot(-2)+(19-1)\cdot 3\}=475$

よって　$S=1160-475=685$

2 初項を a，公比を r とおく．また，初項から第 n 項までの和を S_n とおく．

$r=1$ とすると，条件から　$S_n=an=54,\ S_{2n}=2an=63$

これを満たす a，n は存在しないから不適．

$r\neq 1$ とすると，条件から　$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=54,\ S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=63$

$\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}(r^n+1)$ と変形できるから　$54(r^n+1)=63$

よって　$r^n=\dfrac{1}{6}$　　このとき $r\neq 1$ を満たす．

ゆえに　$S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}(r^{2n}+r^n+1)$

$=54\left(\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{6}+1\right)=\dfrac{129}{2}$

3 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1=4\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$

$=\dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-n=\dfrac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-3\}=\dfrac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

4 第 k 項は

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

ゆえに，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$$

5 初項 a_1 は　　$a_1=S_1=1^2+5\cdot1+1=7$　……①

$n\geqq2$ のとき　　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+5n+1)-\{(n-1)^2+5(n-1)+1\}$

$=(n^2+5n+1)-(n^2+3n-3)$

$=2n+4$

① より $a_1=7$ であるから，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　　$a_1=7$，　$n\geqq2$ のとき　$a_n=2n+4$

6 -5，a，b がこの順に等差数列をなすから　　$2a=-5+b$　……①

a，b，45 がこの順に等比数列をなすから　　$b^2=45a$　……②

① から　　$b=2a+5$　……③　　② に代入して　　$(2a+5)^2=45a$

整理して　　$4a^2-25a+25=0$　　これを解いて　　$a=5,\ \dfrac{5}{4}$

③ から　　$a=5$ のとき　$b=15$，　$a=\dfrac{5}{4}$ のとき　$b=\dfrac{15}{2}$

よって　　$a=5$，$b=15$　または　$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

7 (1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　　$a_n=70+(n-1)d$　……①

第 10 項から第 20 項までの 11 項の和が 0 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot11(a_{10}+a_{20})=0　すなわち　a_{10}+a_{20}=0$$

① から　　$(70+9d)+(70+19d)=0$　　よって　　$d=-5$

① に代入して　　$a_n=70+(n-1)\cdot(-5)=-5n+75$

$a_n<0$ とすると　　$-5n+75<0$

ゆえに，$n>15$ から　　第 16 項

(2)　この等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) より，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} は 0，a_{16} からは負の数となるから，S_n は $n=14$ または $n=15$ のとき最大となり，最大値は

$$S_{14}=S_{15}=\frac{1}{2}\cdot14\{2\cdot70+13\cdot(-5)\}=\frac{1}{2}\cdot14\cdot75=525$$

よって，初項から第 14 項，または第 15 項までの和が最大で，最大値は 525

8 この数列は 1，$1+10$，$1+10+10^2$，…… となるから，一般項は

$$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\frac{1(10^n-1)}{10-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

よって $$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

9 与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 第 k 項は初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和である。

$$a_k=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{n}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

(2) 第 k 項は $\displaystyle\sum_{m=1}^{k}m^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

10 (1)　$x=1$ のとき

$$S=1+4+7+10+\cdots\cdots+(3n-2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$x\neq 1$ のとき

$$S=1+4x+7x^2+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$$

$$xS=\quad x+4x^2+\cdots\cdots+(3n-5)x^{n-1}+(3n-2)x^n$$

辺々引くと

$$(1-x)S=1+3(x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-(3n-2)x^n$$

$$=1+\frac{3x(1-x^{n-1})}{1-x}-(3n-2)x^n$$

$$=\frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{1-x}$$

よって　$S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2)　$2S=2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^2+n\cdot 2$

$$S=2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-2)\cdot 2^2+(n-1)\cdot 2+n$$

辺々引くと

$$S=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^2+2-n$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$

よって　　$S=2^{n+1}-n-2$

11　まず，q を自然数として，$m<\dfrac{q}{p}<n$ を満たす $\dfrac{q}{p}$ を求める。

$mp<q<np$ であるから

$$q=mp+1,\ mp+2,\ \cdots\cdots,\ np-1$$

よって　$\dfrac{q}{p}=\dfrac{mp+1}{p},\ \dfrac{mp+2}{p},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{np-1}{p}$　……①

これらの和を S_1 とすると

$$S_1=\frac{(np-1)-(mp+1)+1}{2}\left(\frac{mp+1}{p}+\frac{np-1}{p}\right)=\frac{np-mp-1}{2}(m+n)$$

① のうち $\dfrac{q}{p}$ が整数となるのは　$\dfrac{q}{p}=m+1,\ m+2,\ \cdots\cdots,\ n-1$

これらの和を S_2 とすると

$$S_2=\frac{(n-1)-(m+1)+1}{2}\{(m+1)+(n-1)\}=\frac{n-m-1}{2}(m+n)$$

求める総和を S とすると，$S=S_1-S_2$ であるから

$$S=\frac{np-mp-1}{2}(m+n)-\frac{n-m-1}{2}(m+n)$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)\{(n-m)p-(n-m)\}$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)$$

12　求める和を S とする。

$\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}=\frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$$

13 $\dfrac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}=\dfrac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{k+3-(k+5)}=\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3}$

したがって　(与式)$=\sum_{k=1}^{76}(\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3})$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots\cdots$

$+(\sqrt{79}-\sqrt{77})+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$=-\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{80}+\sqrt{81}$

$=-2-\sqrt{5}+4\sqrt{5}+9=7+3\sqrt{5}$

BASIC問題

1 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$一般項を求めよ。

4 $a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

STANDARD問題

6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=16a_n{}^5$$

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(2)　$a_1=3$，$a_2=8$，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

8 $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

9 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

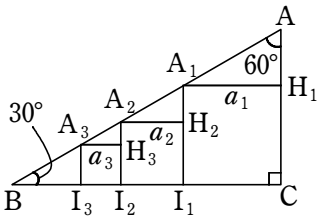
10 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ のおき換えを利用して求めよ。

実戦問題

11 $a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12 ＊ $a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

13 $A=60°$，$B=30°$，AC＝1 である直角三角形 ABC 内に，右の図のように，1 辺の長さが a_1，a_2，a_3，… の正方形が並んでいる。

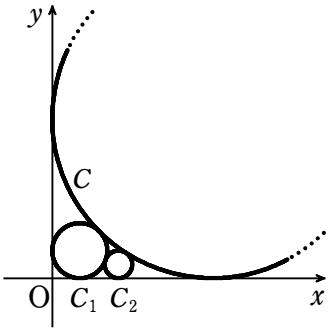


(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) 右の図の △$A_1A_2H_2$ と △ABC が相似であることに着目して，一般に a_n，a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3) a_n の値を n を用いて表せ。

14 右図のように，xy 平面上の点 (1，1) を中心とする半径 1 の円を C とする。x 軸，y 軸の正の部分，円 C と接する円で C より小さいものを C_1 とする。更に，x 軸の正の部分，円 C，円 C_1 と接する円を C_2 とする。
以下，順に x 軸の正の部分，円 C，円 C_n と接する円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とする。ただし，円 C_{n+1} は円 C_n の右側にあるとする。



(1) a_1，b_1 をそれぞれ求めよ。

(2) a_n，a_{n+1} の関係式を求めよ。

(3) $c_n=\dfrac{1}{1-a_n}$ とおくことにより，数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

1 解答 $2\cdot 3^{n-1}+1$

2 解答 n^2-n+3

3 解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$ (2) $a_n=\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

4 解答 $a_n=2^n(2n+3)$

5 解答 $a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

6 解答 $a_n=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}$

7 解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{7}\{8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}\}$ (2) $a_n=4^{n-1}(4-n)$

8 解答 (1) $a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}$, $a_n-b_n=-2$

(2) $a_n=2\cdot 5^{n-1}-1$, $b_n=2\cdot 5^{n-1}+1$

9 解答 (1) $\alpha=-2$, $\beta=-1$ (2) $a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

10 解答 $a_n=2-\dfrac{1}{n}$

11 解答 $a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

12 解答 $a_n=n!$

13 解答 (1) $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$, $a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$ (2) $a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3) $a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

14 解答 (1) (ア) $3-2\sqrt{2}$ (イ) $3-2\sqrt{2}$ (2) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(1-a_n)(1-a_{n+1})$

(3) $a_n=1-\dfrac{2}{n+\sqrt{2}}$

1 $a_{n+1}=3a_n-2$

$c=3c-2$ を解くと　$c=1$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n$

また　　$b_1=a_1-1=3-1=2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=2\cdot3^{n-1}$

よって　　$a_n=b_n+1=2\cdot3^{n-1}+1$

2 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-a_n=2n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=2n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}2k=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって　$a_n=n^2-n+3$　……①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=3$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=n^2-n+3$

3 (1)　$a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であり，漸化式により

$a_1>0$ から　$a_2>0$,　　$a_2>0$ から　$a_3>0$,　　……

一般に，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}\quad\text{すなわち}\quad\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=2b_n+1$　……①　　また　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は　　$b_1+1=2+1=3$

ゆえに　　$b_n+1=3\cdot2^{n-1}$　　すなわち　　$b_n=3\cdot2^{n-1}-1$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$

(2)　$a_1=1>0$ であり，漸化式により

$a_1>0$ から　$a_2>0$,　　$a_2>0$ から　$a_3>0$,　　……

一般に，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}\quad\text{すなわち}\quad\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n+2$　……①　　また　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は　$b_1+1=1+1=2$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot3^{n-1}$　すなわち　$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

4　$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+2$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 2 の等差数列であるから

$b_n=5+(n-1)\times2=2n+3$

したがって　$a_n=2^n\cdot b_n=2^n(2n+3)$

5　$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\{(n+1)-2a_{n+1}\}-(n-2a_n)=-2a_{n+1}+2a_n+1$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$　……①　　また，$a_1=S_1=1-2a_1$ から　$a_1=\dfrac{1}{3}$

① を変形すると　$a_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(a_n-1)$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で，初項は　$a_1-1=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

したがって　$a_n-1=-\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　すなわち　$a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

6 $a_1=2>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式について，両辺の 2 を底とする対数をとると　　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 16a_n{}^5$

ここで　　$\log_2 16a_n{}^5=\log_2(2^4\cdot a_n{}^5)=4+5\log_2 a_n$

よって　　$\log_2 a_{n+1}=4+5\log_2 a_n$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=4+5b_n$

変形すると　　$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 5 の等比数列で，初項は

$$b_1+1=\log_2 a_1+1=\log_2 2+1=1+1=2$$

ゆえに　　$b_n+1=2\cdot 5^{n-1}$　　よって　　$b_n=2\cdot 5^{n-1}-1$

したがって　　$a_n=2^{b_n}=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}$

7 (1)　$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$　……①

① から　　$a_{n+2}+2a_{n+1}=5(a_{n+1}+2a_n)$　　また　$a_2+2a_1=4+2\cdot 2=8$

よって，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 8，公比 5 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+2a_n=8\cdot 5^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

① から　　$a_{n+2}-5a_{n+1}=-2(a_{n+1}-5a_n)$　　また　$a_2-5a_1=4-5\cdot 2=-6$

よって，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 -6，公比 -2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-5a_n=-6\cdot(-2)^{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

②−③ から　　$7a_n=8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{7}\{8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}\}$

(2)　$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ を変形すると　　$a_{n+2}-4a_{n+1}=4(a_{n+1}-4a_n)$

また　　$a_2-4a_1=8-4\cdot 3=-4$

よって，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は初項 -4，公比 4 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-4a_n=-4\cdot 4^{n-1}\quad\text{すなわち}\quad a_{n+1}-4a_n=-4^n$$

両辺を 4^{n+1} で割ると　　$\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}-\dfrac{a_n}{4^n}=-\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a_n}{4^n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{4}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{3}{4}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{3}{4}$，公差 $-\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$b_n=\frac{3}{4}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{4-n}{4}$$

したがって　　$a_n=4^n\cdot b_n=4^{n-1}(4-n)$

8 (1)　$a_{n+1}=3a_n+2b_n$　……①，　$b_{n+1}=2a_n+3b_n$　……②　とする。

①+② から　　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

また　　$a_1+b_1=1+3=4$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列であるから

$$a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

①−② から　　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

よって　　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-b_2=a_1-b_1$

ここで　　$a_1-b_1=1-3=-2$

ゆえに　　$a_n-b_n=-2$ ……④

(2)　③+④ から　　$2a_n=4\cdot5^{n-1}-2$　　よって　　$a_n=2\cdot5^{n-1}-1$

③−④ から　　$2b_n=4\cdot5^{n-1}+2$　　よって　　$b_n=2\cdot5^{n-1}+1$

9 (1)　$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ から　$a_n=b_n+\alpha n+\beta$ ……①

$a_{n+1}=3a_n+4n$ と ① から　$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3(b_n+\alpha n+\beta)+4n$

ゆえに　$b_{n+1}=3b_n+2(\alpha+2)n-\alpha+2\beta$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるための条件は，$2(\alpha+2)n-\alpha+2\beta=0$ が，n の値に関係なく常に成り立つことである。

よって，$\alpha+2=0$，$-\alpha+2\beta=0$ から　$\alpha=-2$，$\beta=-1$

(2)　(1) の結果から，$b_n=a_n+2n+1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

ここで，$b_1=a_1+2\cdot1+1=1+2+1=4$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=4\cdot3^{n-1}$　　よって　$a_n=b_n-2n-1=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

10 $a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}-2$ から　$a_{n+1}-2=-\dfrac{a_n-2}{a_n-3}$ ……①

ここで，ある自然数 n について $a_{n+1}=2$ と仮定すると，① から　$a_n=2$

ゆえに　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=2$

これは条件 $a_1=1$ に反する。　また　$a_1\neq2$

よって，すべての自然数 n について $a_{n+1}\neq2$ であり，① から $a_n\neq2$ である。

ゆえに，① の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=-\frac{a_n-3}{a_n-2}\quad\text{よって}\quad\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_n-2}-1$$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n-1$　　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{1-2}=-1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n=-1+(n-1)\cdot(-1)=-n\quad\text{したがって}\quad a_n=2+\frac{1}{b_n}=2-\frac{1}{n}$$

11 (解 1)　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$

$a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$ であるから　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}a_1$$

よって　　$a_n=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{(n+2)(n+1)n}\cdot\dfrac{2}{3}$

すなわち　　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

(解 2)　漸化式の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}$$

したがって

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot2\cdot3a_1=4$$

よって　　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

12　$n\geqq2$ のとき

$$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \quad \cdots\cdots①$$

$$a_n=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

①－② から　　$a_{n+1}-a_n=na_n$

ゆえに　　$a_{n+1}=(n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!$ で割ると　　$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

よって　　$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\cdots\cdots=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{1+a_1}{2}=1$

ゆえに　　$a_n=n!$

また，$a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=n!$

13　(1)　$\triangle ABC\backsim\triangle AA_1H_1$ から　$AC:AH_1=BC:A_1H_1$

よって　$1:(1-a_1)=\sqrt{3}:a_1$　　よって　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に，$\triangle ABC\backsim\triangle A_1A_2H_2$ から　$1:(a_1-a_2)=\sqrt{3}:a_2$

$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ から　$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\triangle ABC\backsim\triangle A_nA_{n+1}H_{n+1}$ から　$1:(a_n-a_{n+1})=\sqrt{3}:a_{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　(1)，(2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

14 (1) $\sqrt{2}\,a_1+a_1+1=\sqrt{2}$ であるから

$$a_1=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}={}^{ア}3-2\sqrt{2}$$

また $b_1=a_1={}^{イ}3-2\sqrt{2}$

(2) 2円 C，C_n は外接するから

$$\sqrt{(a_n-1)^2+(b_n-1)^2}=b_n+1$$

よって $(a_n-1)^2+{b_n}^2-2b_n+1$

$$={b_n}^2+2b_n+1$$

ゆえに $b_n=\frac{1}{4}(a_n-1)^2$ ……①

また，2円 C_n，C_{n+1} は外接するから

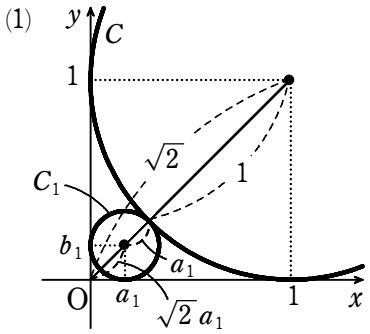
$$\sqrt{(a_{n+1}-a_n)^2+(b_{n+1}-b_n)^2}=b_n+b_{n+1}$$

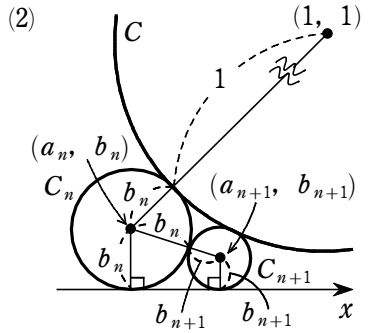
よって $(a_{n+1}-a_n)^2+{b_{n+1}}^2-2b_{n+1}b_n+{b_n}^2$

$$={b_n}^2+2b_nb_{n+1}+{b_{n+1}}^2$$

ゆえに $(a_{n+1}-a_n)^2=4b_nb_{n+1}$

①から $(a_{n+1}-a_n)^2=\frac{1}{4}(a_n-1)^2(a_{n+1}-1)^2$





$a_n<a_{n+1}$，$a_n<1$，$a_{n+1}<1$ であるから $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(1-a_n)(1-a_{n+1})$ ……②

(3) $c_n=\frac{1}{1-a_n}$ とおくと $1-a_n=\frac{1}{c_n}$，$a_n=1-\frac{1}{c_n}$

よって，②から $1-\frac{1}{c_{n+1}}-\left(1-\frac{1}{c_n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c_n}\cdot\frac{1}{c_{n+1}}$

整理して $2(c_{n+1}-c_n)=1$　　ゆえに $c_{n+1}=c_n+\frac{1}{2}$

また $c_1=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$c_n=\frac{\sqrt{2}+1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+\sqrt{2}}{2}$$　　よって $a_n=1-\frac{1}{c_n}=1-\frac{2}{n+\sqrt{2}}$

BASIC問題

1 1辺の長さが1の正四面体OABCを考える．
OA，OBの中点をそれぞれP，Qとし OCを $m:n$ に内分する点をRとする．また，△PQRの重心をGとする．

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，m，n を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OG}$ の長さ $|\overrightarrow{OG}|$ を求めよ．

2 $\vec{a}=(3,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ -1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

3 原点Oから，2点A(5，−2，−3)，B(8，0，−4) を通る直線に垂線OHを下ろす。このとき，点Hの座標と線分OHの長さを求めよ。

4 点A(3，1，2)，B(1，2，1) と xy 平面上に動点Pがある。

(1) AP＋PBの最小値を求めよ。

(2) AP＋PBが最小となるときの点Pの座標を求めよ。

5 四面体ABCDがある．点Pが $10\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}$ を満たしているとき

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ．

(2) 四面体ABCDと四面体PBCDの体積の比を求めよ．

6 平行六面体OADB−CEGFにおいて，辺DGのGを越える延長上にGM＝2DGとなる点Mをとり，直線OMと平面ABCの交点をNとする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分比ON：OMを求めよ。

7 3点A(3，6，0)，B(1，4，0)，C(0，5，4) がある。

(1) △ABCの面積を求めよ。

(2) 点P(3，4，5) から平面ABCに垂線PHを下ろす。このとき，線分PHの長さを求めよ。

(3) 四面体PABCの体積を求めよ。

実戦問題

8 xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に $x^2+y^2=25$ により定まる円 C があり，平面 $z=4$ の上に $x=1$ により定まる y 軸に平行な直線 ℓ がある。C 上の点 P で，ℓ 上の点との距離の最小値が 5 であるような P の座標をすべて求めよ。

9 点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り $\vec{d_1}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線 ℓ_1 と，点 $(-1,\ 1,\ -2)$ を通り $\vec{d_2}=(0,\ -2,\ 1)$ に平行な直線 ℓ_2 がある。ℓ_1，ℓ_2 上にそれぞれ点 P，Q をとるとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

10 四面体 OABC において，$OA=OB=OC=1$ とする。$\angle AOB=60°$，$\angle BOC=45°$，$\angle COA=45°$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

11 すべての辺の長さが 1 の四角錐がある。この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OD}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

1 解答 (1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{m}{3(m+n)}\vec{c}$　(2) $\frac{\sqrt{11m^2+10mn+3n^2}}{6(m+n)}$

2 解答 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3 解答 $H(2,\ -4,\ -2),\ OH=2\sqrt{6}$

4 解答 (1) $\sqrt{14}$　(2) $\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ 0\right)$

5 解答 (1) $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD})$　(2) $s=\frac{1}{3},\ t=\frac{1}{2},\ k=-\frac{2}{3}$

(3) 2 : 5

6 解答 (1) $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$　(2) ON : OM = 1 : 5

7 解答 (1) 6　(2) 3　(3) 6

8 解答 $(4,\ \pm 3,\ 0),\ (-2,\ \pm\sqrt{21},\ 0)$

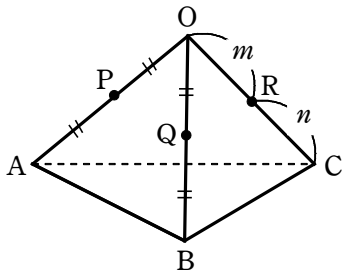
9 解答 $\sqrt{6}$

10 解答 (1) $\overrightarrow{OH}=\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(3) $\frac{1}{12}$

11 解答 (1) $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2},\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(3) $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

1 (1)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}}{2}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{m}{m+n}\vec{c}$



ゆえに　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{m}{3(m+n)}\vec{c}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって　$|\overrightarrow{OG}|^2=\dfrac{1}{36}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{36}|\vec{b}|^2+\dfrac{m^2}{9(m+n)^2}|\vec{c}|^2+\dfrac{1}{18}\vec{a}\cdot\vec{b}$

$+\dfrac{m}{9(m+n)}\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{m}{9(m+n)}\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\dfrac{3(m+n)^2+4m^2+4m(m+n)}{36(m+n)^2}$

$=\dfrac{11m^2+10mn+3n^2}{36(m+n)^2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{OG}|=\dfrac{\sqrt{11m^2+10mn+3n^2}}{6(m+n)}$

2　求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　　よって　$x+z=0$　……①

$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$　　よって　$3x+4y-z=0$　……②

$|\vec{e}|=1$ であるから　$|\vec{e}|^2=1$　　よって　$x^2+y^2+z^2=1$　……③

①，② から　$y=-x$，$z=-x$

③ に代入して　$3x^2=1$　　ゆえに　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，求めるベクトルは　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3　H は A，B を通る直線上にあるから，t を実数として $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ と表すことができる。

$\overrightarrow{AB}=(8-5,\ 0-(-2),\ -4-(-3))=(3,\ 2,\ -1)$ であるから

$\overrightarrow{OH}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)$

$=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

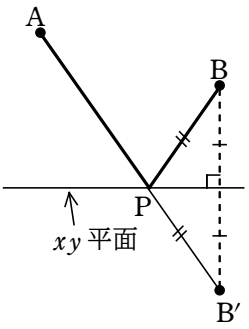
よって　$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$　　すなわち　$t=-1$

したがって，点 H の座標は　$(2,\ -4,\ -2)$

また，線分 OH の長さは　$OH=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$

4 (1)　点 B と xy 平面に関して対称な点を B′ とすると，その座標は

$$(1,\ 2,\ -1)$$



P は xy 平面上にあるから　$PB=PB'$

ゆえに　$AP+PB=AP+PB'$

$AP+PB'$ が最小となるのは，A，P，B′ が一直線上にあるときである。

よって，$AP+PB'$ の最小値は線分 AB′ の長さに等しい。

したがって，求める最小値は

$$AB'=\left|\overrightarrow{AB'}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$$

(2)　O を原点とし，点 P の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。

直線 AB′ 上の点 P のベクトル方程式は　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB'}$ (t は実数)

(1) から　$\overrightarrow{AB'}=(1,\ 2,\ -1)-(3,\ 1,\ 2)=(-2,\ 1,\ -3)$

ゆえに　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 2)+t(-2,\ 1,\ -3)$

$$=(3-2t,\ 1+t,\ 2-3t)\quad\cdots\cdots①$$

ここで　点 P は xy 平面上にあるから　$z=0$

よって　$2-3t=0$ から　$t=\dfrac{2}{3}$　……②

したがって　点 P の座標は ② を ① に代入して

$$\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ 0\right)$$

5 (1)　$10\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}$ から

$$-10\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})$$

よって　$-4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$

したがって　$\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD})$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{4}k(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD})$　……①

また，$\overrightarrow{BQ}=s\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{BD}$ から

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+(s\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{BD})$$

$$=\overrightarrow{AB}+\{s(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+t(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\}$$

$$=(1-s-t)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$ で $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ はどの 2 つも平行でないから，

①，② より　$-\dfrac{1}{4}k=1-s-t$，$-\dfrac{2}{4}k=s$，$-\dfrac{3}{4}k=t$

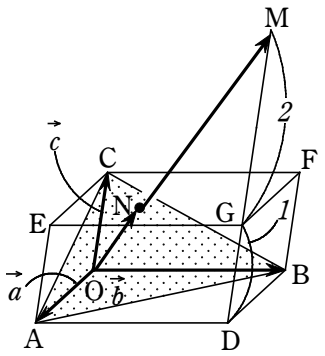
これを解くと　$s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{1}{2}$，$k=-\frac{2}{3}$

(3)　$\overrightarrow{AQ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$ から　PA：AQ＝3：2

底面積が等しい四面体の体積は高さに比例するから，四面体 ABCD と四面体 PBCD の比は

$2:(2+3)=2:5$

6　点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。



ここで　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{ON}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから　$k+k+3k=1$

ゆえに　$k=\frac{1}{5}$

したがって　$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

また　ON：OM＝1：5

7　(1)　$\overrightarrow{AB}=(1-3,\ 4-6,\ 0-0)=(-2,\ -2,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}=(0-3,\ 5-6,\ 4-0)=(-3,\ -1,\ 4)$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-3)+(-2)\times(-1)+0\times4=8$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}$

ゆえに　$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{8}{2\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$0°<\angle BAC<180°$ より $\sin\angle BAC>0$ であるから

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

したがって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=6$$

別解　$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot26-8^2}=6$

(2)　点 H は平面 ABC 上にあるから，s，t，u を実数として

$\overrightarrow{PH}=s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB}+u\overrightarrow{PC}$，$s+t+u=1$　　と表される。

ここで，$\overrightarrow{PA}=(0,\ 2,\ -5)$，$\overrightarrow{PB}=(-2,\ 0,\ -5)$，$\overrightarrow{PC}=(-3,\ 1,\ -1)$ であるから

$\overrightarrow{PH}=s(0,\ 2,\ -5)+t(-2,\ 0,\ -5)+u(-3,\ 1,\ -1)$

$=(-2t-3u,\ 2s+u,\ -5s-5t-u)$

PH⊥(平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　$(-2t-3u)\times(-2)+(2s+u)\times(-2)+(-5s-5t-u)\times0=0$

よって　$t+u=s$ ……①

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$(-2t-3u)\times(-3)+(2s+u)\times(-1)+(-5s-5t-u)\times4=0$

よって　$11s+7t-2u=0$ ……②

① を $s+t+u=1$ に代入すると　$s+s=1$　　ゆえに　$s=\frac{1}{2}$

これを ①, ② に代入して　$t+u=\frac{1}{2}$, $7t-2u=-\frac{11}{2}$

これを解いて　$t=-\frac{1}{2}$, $u=1$

このとき　$\overrightarrow{PH}=(-2,\ 2,\ -1)$

よって　$PH=|\overrightarrow{PH}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$

(3)　(1), (2) の結果から，四面体 PABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times S\times PH=\frac{1}{3}\cdot6\cdot3=6$$

8　点 P は C 上にあるから，$P(5\cos\theta,\ 5\sin\theta,\ 0)$ とおける。

点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると　$H(1,\ 5\sin\theta,\ 4)$

点 P と ℓ 上の点の距離の最小値は PH である。

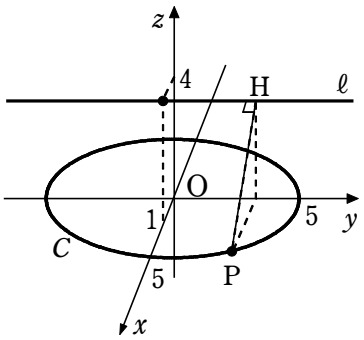
PH＝5 より

$(5\cos\theta-1)^2+(5\sin\theta-5\sin\theta)^2+(0-4)^2=5^2$

よって，$5\cos\theta-1=\pm3$ から　$\cos\theta=\frac{4}{5}$, $-\frac{2}{5}$

$\cos\theta=\frac{4}{5}$ のとき　$\sin\theta=\pm\frac{3}{5}$,

$\cos\theta=-\frac{2}{5}$ のとき　$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{21}}{5}$



したがって，求める点 P の座標は　$(4,\ \pm3,\ 0)$, $(-2,\ \pm\sqrt{21},\ 0)$

9　直線 ℓ_1 上の点を $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とすると

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(1,\ 1,\ 0)+s(1,\ 1,\ -1)$$
$$=(1+s,\ 1+s,\ -s)$$

直線 ℓ_2 上の点を $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とすると

$$(x_2,\ y_2,\ z_2)=(-1,\ 1,\ -2)+t(0,\ -2,\ 1)$$
$$=(-1,\ 1-2t,\ -2+t)$$

点 P, Q の座標を，それぞれ

$P(1+s,\ 1+s,\ -s)$, $Q(-1,\ 1-2t,\ -2+t)$

とおくと

$$PQ^2=\{-1-(1+s)\}^2+\{(1-2t)-(1+s)\}^2+\{(-2+t)-(-s)\}^2$$

$=(-s-2)^2+(-s-2t)^2+(s+t-2)^2$

$=3s^2+6st+5t^2-4t+8$

$=3(s+t)^2+2t^2-4t+8$

$=3(s+t)^2+2(t-1)^2+6$

よって，PQ^2 は $s+t=0$，$t-1=0$ すなわち $s=-1$，$t=1$ のとき最小となる。

$PQ>0$ であるから，このとき PQ も最小となる。

よって， PQ の最小値は　$\sqrt{6}$

参考　$s=-1$，$t=1$ のとき

$\overrightarrow{PQ}=(-1,\ -1,\ -2)$

$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=1\times(-1)+1\times(-1)+(-1)\times(-2)=0$

$\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times(-2)=0$

よって　$\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{d_2}\perp\overrightarrow{PQ}$

したがって，PQ が最小となるとき $PQ\perp\ell_1$，$PQ\perp\ell_2$ が成り立つ。

10　(1)　点 H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）と表される。

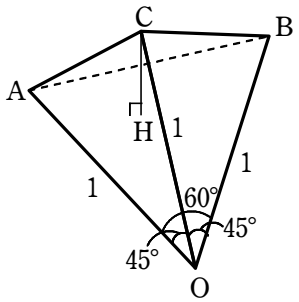
よって　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

また　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

よって　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　ゆえに　$s\cdot1^2+t\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$2s+t=\sqrt{2}$　……①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

よって　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　ゆえに　$s\cdot\dfrac{1}{2}+t\cdot1^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$s+2t=\sqrt{2}$　……②

①，② を解くと　$s=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2)　(1) より，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ であるから

$|\overrightarrow{CH}|^2=\left|\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2|\vec{a}|^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$|\overrightarrow{CH}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{CH}|=CH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって，四面体 OABC の体積は　　$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot CH=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{12}$

11　(1)　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(2)　△OAB，△OBC，△OCD は１辺の長さが１の正三角形であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$$

また，同様にして，(1) から

$$\frac{1}{2}=\vec{c}\cdot\overrightarrow{OD}=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}+1$$

ゆえに　　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(3)　$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ (x，y，z は実数) とする。

△OBC の重心を G とすると　　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$

ゆえに　　$\overrightarrow{GP}=x\vec{a}+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)\vec{b}+\left(z-\dfrac{1}{3}\right)\vec{c}$

点 P が満たすべき条件は　　$\overrightarrow{GP}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{GP}\perp\vec{c}$，$|\overrightarrow{OP}|=1$

よって　　$\overrightarrow{GP}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{GP}\cdot\vec{c}=0$，$|\overrightarrow{OP}|^2=1$

(2) から　　$\dfrac{1}{2}x+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{3}\right)=0$ ……①

$$\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(z-\frac{1}{3}\right)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz=1 \quad \cdots\cdots ③$$

② から　　$y=1-2z$　　このとき，① から　$x=3z-1$

これらを ③ に代入して整理すると　　$2z(3z-2)=0$　　ゆえに　$z=0,\ \dfrac{2}{3}$

よって　　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ 0),\ \left(1,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

したがって　　$\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

BASIC問題

1 2点A(2，5)，B(3，1)からの距離の比が1：2である点Pの軌跡を求めよ。

2 連立不等式 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2>25\\4x-3y>12\end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

3 x，yが3つの不等式 $x-3y\geqq-6$，$x+2y\geqq4$，$3x+y\leqq12$ を同時に満たすとき，$2x+y$の最大値，最小値を求めよ。

STANDARD問題

4 放物線 $y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ について，次の問いに答えよ。

(1) 頂点Pの座標を$(x，y)$とするとき，x，yをそれぞれaで表せ。

(2) aがすべての実数値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ。

5 2点A(3，0)，B(0，-3)と放物線 $y=x^2$ 上の動点Qとでできる△ABQの重心Gの軌跡を求めよ。

6 mの値が変化するとき，次の2直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$mx-y+5m=0，\quad x+my-5=0$$

7 放物線 $y=(x-3)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる2点A，Bで交わっている。mの値が変化するとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

8 2直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。ただし，2直線のなす角の二等分線は，2直線から等距離にある点の軌跡であるものとする。

9 方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの異なる解が $-1<x<2$ の範囲にある。a，bの満たす関係式を求めよ。また，点$(a，b)$の存在する範囲を図示せよ。

実戦問題

10 点$(x,\ y)$が，不等式$(x-3)^2+(y-1)^2 \leqq 1$の表す領域上を動くとき，次の式の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$\dfrac{y}{x}$

(2)　x^2+y^2

11 点$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$が$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$を満たして動くとき，点$\mathrm{Q}(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$の動く範囲を図示せよ．

12 aがすべての実数値をとって変化するとき，直線$y=2ax-a^2+1$　……①が通りうる点$(x,\ y)$の存在範囲を図示せよ。

13 次の連立不等式の表す領域をDとする。

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \leqq 0 \\ x+2y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

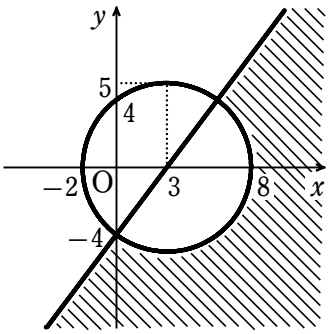
(1)　領域Dを図示せよ。

(2)　aを実数とする。点$(x,\ y)$がDを動くとき，$ax+y$の最小値をaを用いて表せ。

(3)　aを実数とする。点$(x,\ y)$がDを動くとき，$ax+y$の最大値をaを用いて表せ。

1 解答　中心 $\left(\frac{5}{3},\ \frac{19}{3}\right)$，半径 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$ の円

2 解答　〔図〕境界線を含まない



3 解答　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 9；$x=0$，$y=2$ のとき最小値 2

4 解答　(1)　$x=-2a$，$y=-8a^2-6a$　　(2)　放物線 $y=-2x^2+3x$

5 解答　放物線 $y=3x^2-6x+2$

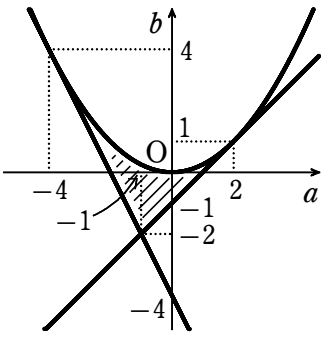
6 解答　原点を中心とする半径 5 の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

7 解答　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3$，$3<x$ の部分

8 解答　$2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$

9 解答　$b<\frac{a^2}{4}$，$b>a-1$，$b>-2a-4$，$-4<a<2$

〔図〕境界線を含まない



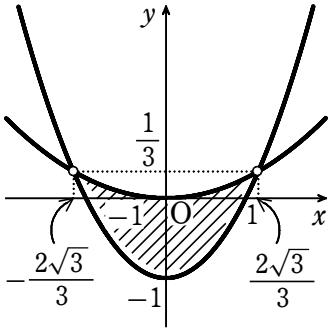
10 解答　(1)　$x=\frac{12}{5}$，$y=\frac{9}{5}$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$；$x=3$，$y=0$ のとき最小値 0

(2)　$x=3+\frac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1+\frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最大値 $11+2\sqrt{10}$；

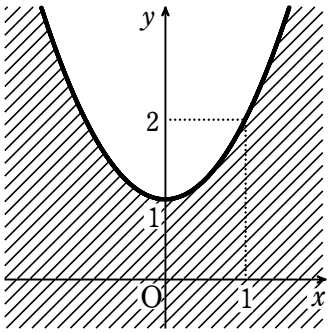
$x=3-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1-\frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最小値 $11-2\sqrt{10}$

11

解答　〔図〕　境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む



12　解答　〔図〕，境界線を含む



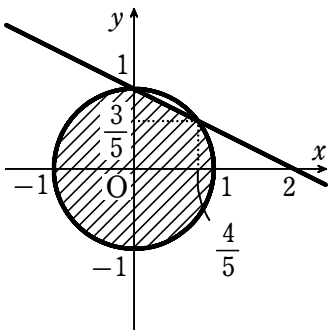
13　解答　(1)　〔図〕境界線を含む　　(2)　$-\sqrt{a^2+1}$

(3)　$a<0$，$\frac{4}{3}\leqq a$ のとき $\sqrt{a^2+1}$ ；

$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき 1 ；

$\frac{1}{2}<a<\frac{4}{3}$ のとき $\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}$

(1)



1 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

AP：BP＝1：2 から　　$2AP=BP$

$AP>0$，$BP>0$ であるから，これは $4AP^2=BP^2$ と同値である。

よって　　$4\{(x-2)^2+(y-5)^2\}=(x-3)^2+(y-1)^2$

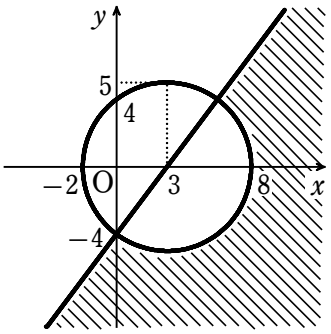
整理すると　　$x^2-\dfrac{10}{3}x+y^2-\dfrac{38}{3}y+\dfrac{106}{3}=0$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{3}\right)^2=\dfrac{68}{9}$

したがって，求める軌跡は　　中心 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$ の円

2 $4x-3y>12$ を変形すると　$y<\dfrac{4}{3}x-4$

求める領域は，円 $(x-3)^2+y^2=25$ の外部と直線 $y=\dfrac{4}{3}x-4$ の下側との共通部分で，図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



3 与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は3点 $(4,\ 0)$，$(3,\ 3)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

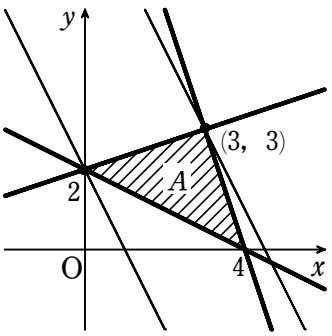
$$2x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す。

図から，直線①が

点 $(3,\ 3)$ を通るとき，k は最大で　$k=9$

点 $(0,\ 2)$ を通るとき，k は最小で　$k=2$



よって　　$x=3$，$y=3$ のとき最大値9；$x=0$，$y=2$ のとき最小値2

4 (1)　$y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ を変形すると　　$y=3(x+2a)^2-8a^2-6a$

よって，点Pの座標は　　$(-2a,\ -8a^2-6a)$

したがって　　$x=-2a$，$y=-8a^2-6a$

(2)　$x=-2a$ から　　$a=-\dfrac{x}{2}$

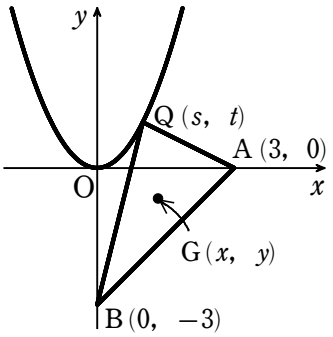
これを $y=-8a^2-6a$ に代入して

$y=-8\left(-\dfrac{x}{2}\right)^2-6\left(-\dfrac{x}{2}\right)$　　すなわち　　$y=-2x^2+3x$

$x=-2a$ であるから，a がすべての実数値をとって変化するとき，x もすべての実数値をとる。

よって，求める軌跡は　　放物線 $y=-2x^2+3x$

5 点 Q は直線 AB 上にないから，図形 ABQ は常に三角形になる。



点 Q の座標を $(s,\ t)$ とすると，Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから　　$t=s^2$　……①

また，重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件から

$$x=\frac{3+0+s}{3},\quad y=\frac{0+(-3)+t}{3}$$

すなわち　　$s=3x-3,\ t=3y+3$

これらを ① に代入して　　$3y+3=(3x-3)^2$

整理すると　　$y=3x^2-6x+2$

よって，重心 G は放物線 $y=3x^2-6x+2$ 上にある。

逆に，この放物線上のすべての点 $G(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=3x^2-6x+2$

6 2 直線の方程式を変形して

$y=m(x+5)$　……①

$-my=x-5$　……②

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，② を満たす。

[1]　$y\neq 0$ のとき，② から　　$m=-\dfrac{x-5}{y}$

これを ① に代入して　　$y=-\dfrac{x-5}{y}(x+5)$　　よって　$x^2+y^2=25$　……③

③ において $y=0$ とすると　　$x=\pm 5$

したがって，$y\neq 0$ のとき，点 P は，円 ③ から 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　　$x=5$

$x=5$，$y=0$ を ① に代入すると　　$m=0$

よって，点 $(5,\ 0)$ は，$m=0$ のときの 2 直線の交点である。

[1]，[2] から，点 P は，原点を中心とする半径 5 の円から点 $(-5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の点 P は，条件を満たす。

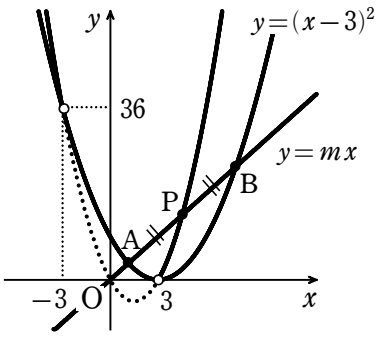
したがって，点 P の軌跡は

原点を中心とする半径 5 の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

参考　① から第 1 の直線は定点 $(-5,\ 0)$ を通り，② から第 2 の直線は定点 $(5,\ 0)$ を通る。
また，この 2 直線は垂直であるから，点 P は 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。
ただし，① は直線 $x=-5$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-5,\ 0)$ を除く。

7　$y=(x-3)^2$ と $y=mx$ から y を消去して整理すると

$$x^2-(m+6)x+9=0 \quad \cdots\cdots ①$$



判別式を D とすると

$$D=(m+6)^2-4\cdot1\cdot9$$
$$=m^2+12m=m(m+12)$$

放物線と直線が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときであるから　　$m(m+12)>0$

ゆえに　　$m<-12,\ 0<m$　……②

2 つの交点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とする。

α，β は ① の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+6$$

よって，中点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+6}{2} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \text{また} \qquad y=mx \quad \cdots\cdots ④$$

③ から　　$m=2x-6$　……⑤

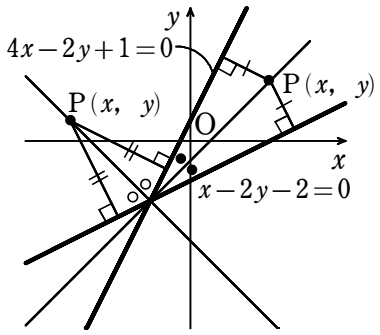
⑤ を ④ に代入して　　$y=(2x-6)x$　　すなわち　　$y=2x^2-6x$

⑤ を ② に代入して　　$2x-6<-12,\ 0<2x-6$　　すなわち　　$x<-3,\ 3<x$

よって，求める軌跡は　　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3,\ 3<x$ の部分

8　2 直線のなす角の二等分線上の点を $P(x,\ y)$ とする。

点 P は 2 直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ から等距離にあるから



$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって　　$2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

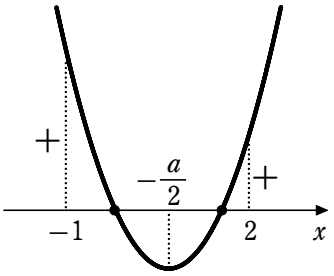
すなわち　　$2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって，求める直線の方程式は

$$2x+2y+5=0,\ 2x-2y-1=0$$

9　$f(x)=x^2+ax+b$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸の方程式は　$x=-\dfrac{a}{2}$



方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に 2 つの異なる解をもつための条件は

$D=a^2-4b>0$

$f(-1)=1-a+b>0$，　$f(2)=4+2a+b>0$

軸について　$-1<-\dfrac{a}{2}<2$

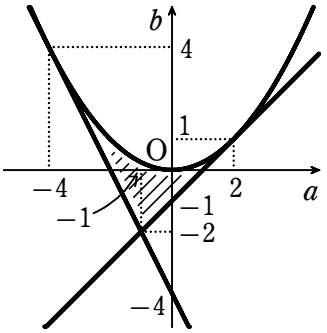
すなわち

$b<\dfrac{a^2}{4}$，$b>a-1$，

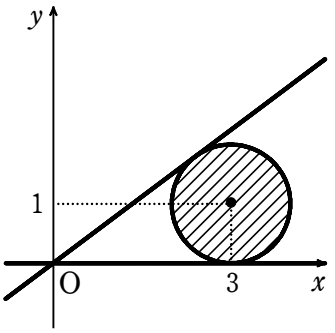
$b>-2a-4$，$-4<a<2$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含まない。



10 与えられた不等式の表す領域は，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



(1)　$\dfrac{y}{x}=k$ とおくと，　$y=kx$　……①

① は原点を通り，傾き k の直線を表す。図から，
直線 ① が円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ に接するとき，
k の値は最大，最小となる。
接するとき，円の中心 $(3,\ 1)$ と直線 ① の距離が
円の半径 1 に等しいから　$\dfrac{|k\cdot 3-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$

分母を払うと　$|3k-1|=\sqrt{k^2+1}$　　両辺を 2 乗して　$(3k-1)^2=k^2+1$

ゆえに　$4k^2-3k=0$　　よって　$k=0,\ \dfrac{3}{4}$

$k=0$ のとき，接点の座標は　$(3,\ 0)$

$k=\dfrac{3}{4}$ のとき，① は　$y=\dfrac{3}{4}x$　……②

また，円の中心 $(3,\ 1)$ を通り，直線 ② に垂直な直線の方程式は

$$y-1=-\frac{4}{3}(x-3)\quad すなわち\quad y=-\frac{4}{3}x+5\quad \cdots\cdots ③$$

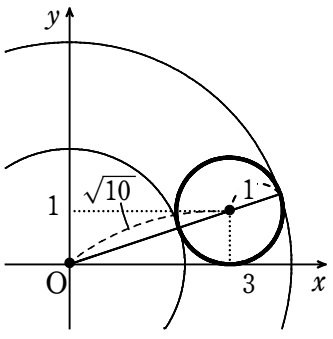
接点は，2 直線 ②，③ の交点であるから，その座標は　$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

以上から　$x=\dfrac{12}{5}$，$y=\dfrac{9}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$；$x=3$，$y=0$ のとき最小値 0

(2)　$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ ……④ とおく。
④ は，原点を中心とし，半径 r の円を表す。
図から，2 円が内接するとき，r^2 の値は最大となる。このとき，2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

であるから　$r-1=\sqrt{10}$
よって　$r^2=(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$
また，2 円が外接するとき，r^2 の値は最小となる。
このとき　$r+1=\sqrt{10}$
よって　$r^2=(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



接点は，円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ と直線 $y=\dfrac{1}{3}x$

の交点である。

円と直線の式から x を消去すると　$(3y-3)^2+(y-1)^2=1$

すなわち　$10(y-1)^2=1$　ゆえに　$y=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

このとき　$x=3y=3\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(複号同順)

以上から　$x=3+\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　最大値 $11+2\sqrt{10}$

$x=3-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　最小値 $11-2\sqrt{10}$

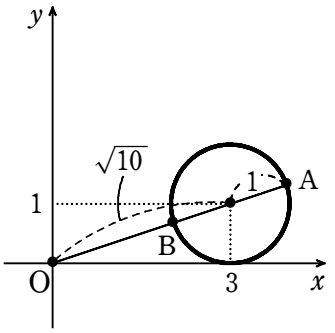
別解　x^2+y^2 は，原点と点 $(x,\ y)$ の距離の 2 乗を表す。右の図のように，円上の点で，原点 O から最も遠い点を A，最も近い点を B とすると，

$OA=\sqrt{3^2+1^2}+1=\sqrt{10}+1$

$OB=\sqrt{3^2+1^2}-1=\sqrt{10}-1$

よって，最大値は　$(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$

最小値は　$(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



11　$x=\alpha+\beta$，$y=\alpha\beta$ とおく.

α，β は 2 次方程式 $t^2-xt+y=0$ の実数解であるから，

判別式 D について　$D=x^2-4y\geqq 0$

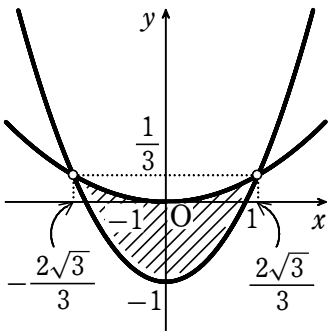
ゆえに　$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2$

また，$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ から　$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta<1$

よって　$x^2-y<1$　　ゆえに　$y>x^2-1$

以上により，点 Q の存在範囲は　[図]

ただし，境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む.



12　$y=2ax-a^2+1$ …… ① を a について整理すると

$a^2-2xa+y-1=0$　……②

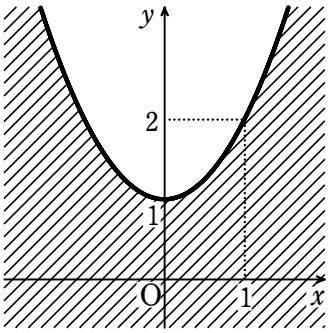
直線①が点$(x,\ y)$を通るとき，①すなわち②を満たす実数aが存在するから，aの2次方程式②の判別式Dについて，$D\geqq 0$である。

$$\frac{D}{4}=(-x)^2-(y-1)=x^2-y+1$$

$D\geqq 0$から　　$x^2-y+1\geqq 0$

すなわち　　$y\leqq x^2+1$

よって，求める点$(x,\ y)$の存在範囲は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



13 (1)　$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x+2y-2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　とおく。

②から　　$x=-2(y-1)$

①に代入すると　　$4(y-1)^2+(y^2-1)=0$

$(y-1)(4y-4+y+1)=0$

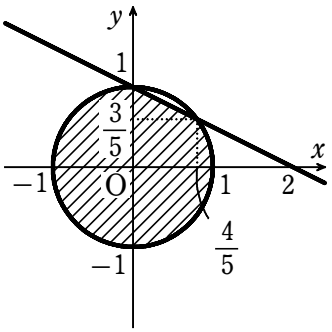
$(y-1)(5y-3)=0$

ゆえに　　$y=1,\ \dfrac{3}{5}$

これと②から　　$(x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

よって，領域Dは右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)，(3)において$ax+y=k$とおくと

$y=-ax+k$　……③，　$ax+y-k=0$　……④

直線③は，傾きが$-a$，y切片がkの直線を表す。

(2)　円①の中心$(0,\ 0)$と直線④の距離を1とすると

$$\frac{|-k|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1$$　　ゆえに　　$k=\pm\sqrt{a^2+1}$

よって，グラフから最小値は　$-\sqrt{a^2+1}$

(3)　(ア)　$-a>0$または$-a\leqq -\dfrac{4}{3}$　すなわち　$a<0$または$a\geqq\dfrac{4}{3}$のとき

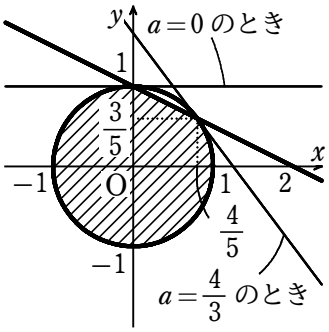
グラフと(2)から，最大値は　$\sqrt{a^2+1}$

(イ)　$-\frac{1}{2} \leqq -a \leqq 0$ すなわち $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ で最大値 1

(ウ)　$-\frac{4}{3} < -a < -\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$ のとき

$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ で最大値 $\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}$



数学②　第１１回試練　数列の応用　　1 / 13

STANDARD問題

1 数列 1，2，3，……，n において，異なる 2 つの項の積の和 を求めよ。($n \geqq 2$)

2 年始めに 10 万円ずつ毎年積み立てることにした．年利率 8 % の複利計算の場合，元利合計が 240 万円を初めて超えるのは何年後か．$\log_{10}2 = 0.301$，$\log_{10}3 = 0.477$ として計算せよ．

3 分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列において，$\frac{7}{15}$ は第何項か。また，第 99 項を求めよ。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

4 放物線 $y = -x^2 + 8x$ と直線 $y = x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点の個数を求めよ。

5 $a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots\cdots + \frac{n}{(n+1)!}$ とする。

(1)　$n = 1$，2，3，4 に対して，a_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

6 袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率を p_n とする。ただし，$n = 1$ のとき，p_1 は取り出した 1 個の球に書かれている数が偶数である確率とみなす。

(1)　p_{n+1} を p_n で表せ。　　(2)　p_n を求めよ。

実戦問題

7 数列 1，2，3，……，n において，互いに隣り合わない 2 つの項の積の和を求めよ。($n \geqq 3$)

8 次のような分数の列がある。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\frac{5}{9}$ は第何項か。　　(2)　第 800 項を求めよ。

9 自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

10 (1)　$3x+2y \leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

11 3 文字 a，b，c を横に n 個書き並べたものを長さ n の単語と呼ぶことにする。ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする。例えば，$abba$，$baca$，$caab$ はどれも長さ 4 の異なる単語である。

(1)　長さ 1，2 および 3 の単語を，それぞれ列挙せよ。

(2)　長さ n の単語のうち，a を奇数個含むものの数を x_n で，残りのものの数を y_n で表す。このとき，x_n，y_n を求めよ。

実戦問題（記述式）

12 x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める．

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n \geqq 2) \end{cases}$$

このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta \neq 0$ とする．

13 整数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の式によって定義する．

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

(1)　数学的帰納法を用いて $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ であることを示せ．

(2)　a_n，b_n を順次計算して，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の n を求めよ．

(3)　$b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n とそのときの b_n の値を求めよ．

14 $a_1=1$，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ。

1 解答 $\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

2 解答 14 年後

3 解答 第 217 項，$\frac{8}{7}$

4 解答 64 個

5 解答 (1) $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{5}{6}$，$a_3=\frac{23}{24}$，$a_4=\frac{119}{120}$

(2) $a_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$，証明略

6 解答 (1) $p_{n+1}=-\frac{1}{7}p_n+\frac{4}{7}$ (2) $p_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\frac{1}{2}$

7 解答 $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$

8 解答 (1) 第 39 項 (2) $\frac{39}{40}$

9 解答 (1) $\frac{1}{2}n(n+1)$ (2) $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ (3) 左から 36 番目，上から 10 段目

10 解答 (1) 10 個 (2) 337010 個

11 解答 (1) 長さ 1 の単語：a，b，c

長さ 2 の単語：aa，bb，cc，ab，ba，bc，cb，ca，ac

長さ 3 の単語：aaa，bbb，ccc，aab，aba，baa，aac，aca，caa，bba，bab，abb，bbc，bcb，cbb，cca，cac，acc，ccb，cbc，bcc，abc，acb，bac，bca，cab，cba

(2) $x_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$，$y_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

12 解答 略

13 解答 (1) 略 (2) $n=8$ (3) $n=9$，$b_9=985$

14 解答 $a_n=n$，証明略

1　求める和を S とする。

$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots)$

であるから　　$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2S$

よって　　$2S=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

したがって　　$S=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

2　n 年後の元利合計は，初項 10×1.08 (万円)，公比 1.08 の等比数列の和である．

よって，求める条件は　$\frac{10\times1.08(1.08^n-1)}{1.08-1}>240$

ゆえに　$135(1.08^n-1)>240$

よって　$1.08^n>\frac{25}{9}$

したがって　$n\log_{10}1.08>2\log_{10}5-2\log_{10}3$ ……①

ここで，$\log_{10}1.08=\log_{10}\frac{108}{100}=3\log_{10}3+2\log_{10}2-2=0.033$,

$2\log_{10}5-2\log_{10}3=2(1-\log_{10}2-\log_{10}3)=0.444$

ゆえに，① は　$0.033n>0.444$　　ゆえに　$n>13.4$ ……

これを満たす n の最小値は　$n=14$　　よって　14 年後.

3 分母と分子の和が同じ分数を 1 つの群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\ \Big|\ \cdots$$

第 n 群には n 個の分数が入る。

(前半)　第 n 群に入る分数の分母と分子の和は $n+1$ であるから，$\frac{7}{15}$ は第 21 群にあり，その 7 番目の数である。

第 1 群から第 20 群までの項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+20=\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=210$$

$210+7=217$ であるから，$\frac{7}{15}$ は　　第 217 項

(後半)　第 1 群から第 n 群までの項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第 99 項が第 n 群に入るとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<99\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　　$(n-1)n<198\leqq n(n+1)$　……①

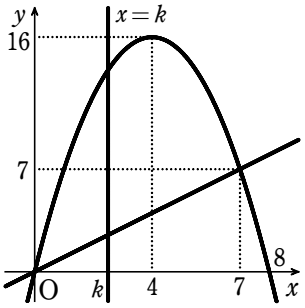
$13\cdot 14=182$，$14\cdot 15=210$ であるから，① を満たす自然数 n は　　$n=14$

第 1 群から第 13 群までの項の個数は　　$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$

よって，第 99 項は第 14 群の 8 番目であるから　　$\frac{8}{14-8+1}=\frac{8}{7}$

4 $-x^2+8x=x$ とすると　　$x(x-7)=0$

よって，放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(7,\ 7)$ で交わる。



領域内の格子点で，直線 $x=k$ (k は整数) 上にあるものの座標を $(k,\ y)$ とおくと

$$k\leqq y\leqq -k^2+8k$$

よって，格子点の個数は

$$-k^2+8k-k+1=-k^2+7k+1$$

$k=0$，1，2，……，7 であるから，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{7}(-k^2+7k+1)=-\sum_{k=0}^{7}k^2+7\sum_{k=0}^{7}k+\sum_{k=0}^{7}1$$

$$=-\sum_{k=1}^{7}k^2+7\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=0}^{7}1$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15+7\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8+8$$

$$=64\ (\text{個})$$

5 (1)　$a_1=\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$

ここで　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{n+1}{(n+2)!}$

よって　$a_{n+1}=a_n+\dfrac{n+1}{(n+2)!}$　……①

ゆえに　$a_2=a_1+\dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{6}$,

$a_3=\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4!}=\dfrac{23}{24}$,　$a_4=\dfrac{23}{24}+\dfrac{4}{5!}=\dfrac{119}{120}$

(2)　(1) から，$n=1$，2，3，4 に対して　$a_n=\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

すなわち　$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

よって，$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ …… ② と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　(1) から，② は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，② が成り立つと仮定すると　$a_k=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$

① から，$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=a_k+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ② は成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n について ② は成り立つ。

6 (1)　$(n+1)$ 個の数の和が偶数になるには，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　n 個の数の和が偶数で，$(n+1)$ 回目に偶数が書かれた球を取り出す。

[2]　n 個の数の和が奇数で，$(n+1)$ 回目に奇数が書かれた球を取り出す。

[1]，[2] は互いに排反であるから　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{3}{7}+(1-p_n)\cdot\dfrac{4}{7}$

ゆえに　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{7}p_n+\dfrac{4}{7}$

(2)　(1) の式を変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{7}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{7}$，初項 $\left(p_1-\dfrac{1}{2}\right)$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$p_n=-\dfrac{1}{14}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{2}$

7 求める和は

$$S-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=S-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\cdot 3(n^2-n-2)=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$$

8 この数列を，次のように 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$\left\{\frac{1}{1}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right\}$, ……

このとき，第 n 群の m 番目の数は $\frac{2m-1}{n}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ と表される。

(1)　$\frac{5}{9}$ は第 9 群の 3 番目の数である。

また，第 1 群から第 n 群までに入る数の総数を l_n とすると

$$l_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第 1 群から第 8 群までに入る数の総数は

$$l_8=\frac{1}{2}\times 8\times 9=36$$

したがって，$36+3=39$ より，$\frac{5}{9}$ は第 39 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると

$$l_{n-1}<800\leqq l_n$$

よって　　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

$n=40$ のとき　$(n-1)n=1560$,

$n(n+1)=1640$

n は自然数であるから　　$n=40$

第 1 群から第 39 群までに入る数の総数は

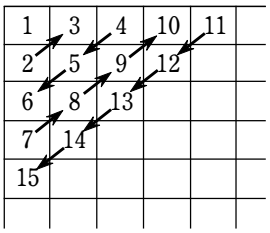
$$l_{39}=\frac{1}{2}\times 39\times 40=780$$

よって，第 800 項は第 40 群の 20 番目の数である。

したがって，第 800 項は　　$\frac{2\times 20-1}{40}=\frac{39}{40}$

9 並べられた自然数を，次のように区分する。

1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 |, ……　　…… ①



(1)　1 番上の段の左から n 番目の数は，n が偶数のとき，① の第 n 群の末項である。

よって，求める数は　　$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2)　1 番上の段の左から n 番目の数は，n が奇数のとき，① の第 n 群の初項である。

$n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の末項は

$$1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって，n が 3 以上の奇数のとき，求める数は

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

これは $n=1$ のときにも適する。　　答　$\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$

(3)　1000 が ① の第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<1000 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

また，$\dfrac{1}{2}n(n-1)$ は単調に増加する。

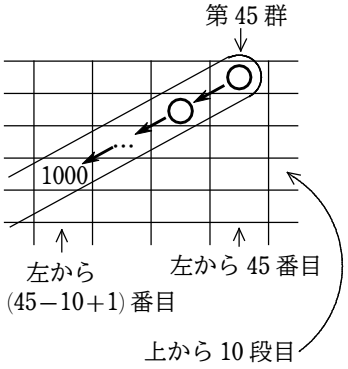
$\dfrac{44\cdot 45}{2}=990$，$\dfrac{45\cdot 46}{2}=1035$ であるから

$n=45$

よって，1000 は第 45 群の $1000-990=10$ (番目) の数である。

したがって，1000 は，左から

$45-10+1=36$ (番目)，上から 10 段目にある。



10 (1)　0 以上の整数 x のとりうる値は　　$x=0,\ 1,\ 2$

$3x+2y\leqq 8$ を満たす 0 以上の整数 y は

$x=0$ のとき，$2y\leqq 8$ から　　$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=1$ のとき，$3+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき，$6+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1$

以上から，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は 10 個

(2)　$3x+2y\leqq 2008$ …… ① とする。

0 以上の整数 x のとりうる値は　　$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 669$

[1]　$x=2k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+2y\leqq 2008$　　よって　$y\leqq 1004-3k$　…… ②

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの k の値に対し，② を満たす 0 以上の整数 y は $(1005-3k)$ 個ある。

[2]　$x=2k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+3+2y\leqq 2008$　　よって　$y\leqq 1002.5-3k$　…… ③

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの k の値に対し，③ を満たす 0 以上の整数 y は $(1003-3k)$ 個ある。

[1]，[2] から，① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{334}\{(1005-3k)+(1003-3k)\}=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)=\frac{1}{2}\times 335\times(2008+4)$$

$$=337010\ \text{(個)}$$

11 (1) 長さ1の単語：a，b，c

長さ2の単語：aa，bb，cc，ab，ba，bc，cb，ca，ac

長さ3の単語：aaa，bbb，ccc，aab，aba，baa，aac，aca，caa，bba，bab，abb，bbc，bcb，cbb，cca，cac，acc，ccb，cbc，bcc，abc，acb，bac，bca，cab，cba

(2) x_{n+1} を次の[1]～[3]の場合に分けて考える。

[1] 最初の文字が a のとき

残りの n 個の文字には a が偶数個含まれるから，単語の数は y_n

[2] 最初の文字が b のとき

残りの n 個の文字には a が奇数個含まれるから，単語の数は x_n

[3] 最初の文字が c のとき

残りの n 個の文字には a が奇数個含まれるから，単語の数は x_n

よって $x_{n+1}=2x_n+y_n$ ……①

また，長さ n の単語は，3文字 a，b，c から重複を許して n 個並べたものであるから，全部で 3^n 個ある。

よって $x_n+y_n=3^n$ ゆえに $y_n=3^n-x_n$ ……②

② を ① に代入して $x_{n+1}=2x_n+(3^n-x_n)$

すなわち $x_{n+1}-x_n=3^n$ また，(1)から $x_1=1$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに $x_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ ② に代入して $y_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

12 数学的帰納法により証明する．

[1]　$n=0$ のとき

$$(\text{左辺})=f_0(2\cos\theta)=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}=1$$

よって，成り立つ．

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

よって，成り立つ．

[2]　$n=k-1$，k $(k\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち　$f_{k-1}(2\cos\theta)=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$$f_k(2\cos\theta)=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=f_{k+1}(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta f_k(2\cos\theta)-f_{k-1}(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\\&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{(2\cos^2\theta-1)\sin k\theta+2\sin\theta\cos\theta\cos k\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\cos 2\theta\sin k\theta+\sin 2\theta\cos k\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって，成り立つ．

以上から，$n\geqq 0$ であるすべての n について $f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表される．

13 (1) $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ のとき $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ を数学的帰納法で証明する.

$(1+\sqrt{2})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$ から

$a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ が成り立つ.

[1] $n=1$ のとき　$a_1=b_1=1$ で成り立つ.

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると　$(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$

$n=k+1$ のとき

$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$

$n=k+1$ のときも成り立つ.

よって，すべての自然数 n に対して成り立つ.

(2) n を順次計算すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985

これから　$239+169\sqrt{2}<1000<577+408\sqrt{2}$

よって，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の自然数 n は　$n=8$

(3) $(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=\{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}^n=(-1)^n$

よって　$b_n\sqrt{2}=a_n-\dfrac{(-1)^n}{a_n+b_n\sqrt{2}}$

上の表から $\dfrac{(-1)^n}{a_n+b_n\sqrt{2}}$ は $n\geqq 8$ のとき絶対値が 0.001 より小さい.

更に n が奇数ならば $b_n\sqrt{2}=a_n+k$ $(0<k<0.001)$ と表される.

すなわち $b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n は $n=9$ で　$b_9=985$

14 $n=1$ のとき　　$a_1a_2=2a_1^{\,2}$

$a_1=1$ であるから　　$a_2=2$

$n=2$ のとき　　$a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1)$

よって　　$1\cdot2+2a_3=2(1\cdot2+2\cdot1)$　　ゆえに　　$a_3=3$

$n=3$ のとき　　$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=2(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1)$

よって　　$1\cdot2+2\cdot3+3a_4=2(1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1)$　　ゆえに　　$a_4=4$

したがって，$a_n=n$ ……① と推測できる。

この推測が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n\leqq k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　　$a_n=n$ $(n\leqq k)$

このとき，条件式で $n=k$ とすると

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1}$$
$$=2(a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}a_2+a_ka_1)$$

よって　　$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+(k-1)k+ka_{k+1}$
$$=2\{1\cdot k+2\cdot(k-1)+\cdots\cdots+(k-1)\cdot2+k\cdot1\}$$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)+ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1-i)$

したがって　　$\displaystyle ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1-i)-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)$

$$=2\sum_{i=1}^{k-1}i(k+1-i)+2k\cdot1-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}i\{2(k+1-i)-(i+1)\}+2k=\sum_{i=1}^{k-1}i(2k+1-3i)+2k$$
$$=(2k+1)\sum_{i=1}^{k-1}i-3\sum_{i=1}^{k-1}i^2+2k$$
$$=(2k+1)\cdot\frac{1}{2}k(k-1)-3\cdot\frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)+2k$$
$$=k(k-1)+2k=k(k+1)$$

よって　　$a_{k+1}=k+1$

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

したがって　　$a_n=n$