【1】2014 東京医科大学医学部

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k^4$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）と定める。このとき $\{a_n\}$ は収束し，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とする。

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。さらにこれらの a_n, α を用いて，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = (\alpha - a_n)n$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）と定めれば $\{b_n\}$ も収束し， $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば

$$\beta = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

【2】2019 聖マリアンナ医科大・医

以下の設問に対する解答を解答用紙の所定の欄（略）に述べよ。

(1) 次の等式が成り立つことを n についての数学的帰納法を用いて示せ.

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2) 等式 $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ を利用して,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

は n に関する 5 次式として表せることを示せ。

(3) d を自然数とすると,

$$\sum_{k=1}^{n} k^d(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdot)$$

は n に関する $d+1$ 次式として表せることを, d についいの数学的帰納法を用いて示せ.

【2】 2019 藤田医科大・医

自然数 k, n に対して $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k+n^k$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) すべての自然数 n に対して $S_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成り立つことを証明せよ.

(2) すべての自然数 n に対して $S_2(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が成り立つことを証明せよ.

(3) すべての自然数 n に対して $S_4(n)=S_2(n)\{aS_1(n)+b\}$ を満たす実数の定数 a, b が存在することを証明せよ.