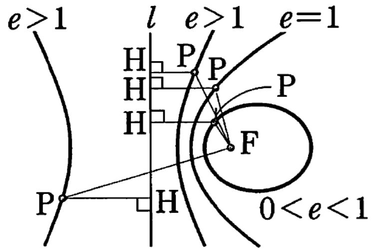
【まとめ】



PF：PH＝e：1

一般に，点 P から定点 F への距離 PF と，定直線 l への距離の比の値 $e=\dfrac{\text{PF}}{\text{PH}}$ が一定であるとき，e の値をこの曲線の**離心率**といい，直線 l を焦点 F に対する**準線**という。
(1) $0<e<1$ のとき，F を焦点の 1 つとする楕円
(2) $e=1$ のとき，Fを焦点，を準線とする放物線
(3) $e>1$ のとき，Fを焦点の 1 つとする双曲線
となることが知られている。

以下，「離心率」については，必要に応じてこの【まとめ】を参考にせよ。

$\boxed{1}$ 点 F(2，0) からの距離と，直線 $x=-1$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1)　2：1　　　(2)　1：1　　　(3)　$\dfrac{1}{2}$：1

$\boxed{2}$ xy 平面において，原点 O と直線 $x=2$ からの距離の比が $\sqrt{r}$ ：1 であるような点 P について

(1)　点 P の軌跡を C とするとき，曲線 C の方程式を求めよ.
(2)　$r=2$ のとき，軌跡 C はどのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け.
(3)　軌跡 C が，長軸の長さが $\sqrt{5}$ であるような楕円になるときの r の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について，焦点 F$(\sqrt{5}，0)$ に対する準線の方程式を $x=k\ (k>0)$ とする。k の値と，この楕円の離心率 e の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 次のことを証明せよ。

(1) 放物線 $y^2=4px$ に対し，離心率は 1 である。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ の 1 つの焦点F$\left(\sqrt{a^2-b^2}\ ,0\right)$ に対し，

準線は $x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ であり，離心率は $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ である。

(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0\ ,b>0)$ の 1 つの焦点F$\left(\sqrt{a^2+b^2}\ ,0\right)$ に対し，

準線は $x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であり，離心率は $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ である。

$\boxed{1}$ 解答　(1)　双曲線 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　(2)　放物線 $y^2=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

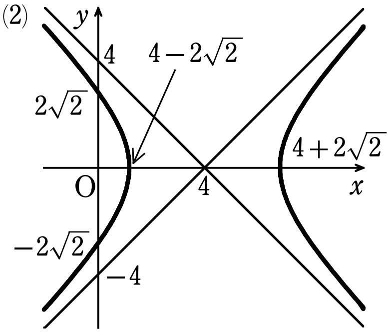
(3)　楕円 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$(r-1)x^2-4rx-y^2+4r=0$

(2)　双曲線 $\dfrac{(x-4)^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　〔図〕

(3)　$r=\dfrac{1}{5}$

(2)



$\boxed{3}$ 解答　$k=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{4}$ 解答　略

$\boxed{1}$ 点 P の座標を $(x,\ y)$，点 P から直線 $x=-1$ に下ろした垂線を PH とすると

$\mathrm{PF}^2=(x-2)^2+y^2$　…… ①

$\mathrm{PH}^2=(x+1)^2$　…… ②

(1)　P の満たす条件は　　$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=2:1$

これより　　$\mathrm{PF}=2\mathrm{PH}$　　すなわち　　$\mathrm{PF}^2=4\mathrm{PH}^2$

①，② を代入すると　　$(x-2)^2+y^2=4(x+1)^2$

整理すると　　$\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　…… ③

ゆえに，条件を満たす点 P は，双曲線 ③ 上にある。

逆に，双曲線 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　　双曲線 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

(2)　P の満たす条件は　　$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=1:1$

これより　　$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$　　すなわち　　$\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$

①，② を代入すると　　$(x-2)^2+y^2=(x+1)^2$

整理すると　　$y^2=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$　…… ③

ゆえに，条件を満たす点 P は，放物線 ③ 上にある。

逆に，放物線 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　　放物線 $y^2=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

(3)　Pの満たす条件は　　$PF:PH=\dfrac{1}{2}:1=1:2$

これより　　$2PF=PH$　　　すなわち　　$4PF^2=PH^2$

①，② を代入すると　　$4\{(x-2)^2+y^2\}=(x+1)^2$

整理すると　　$\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　…… ③

ゆえに，条件を満たす点 P は，楕円 ③ 上にある。

逆に，楕円 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　　楕円 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

$\boxed{2}$ (1)　Pの座標を $(x,\ y)$ とおくと，条件から　$\sqrt{x^2+y^2}:|2-x|=\sqrt{r}:1$

ゆえに　$\sqrt{r}|2-x|=\sqrt{x^2+y^2}$

両辺を平方して　$r(x^2-4x+4)=x^2+y^2$

よって，曲線 C の方程式は　$(r-1)x^2-4rx-y^2+4r=0$

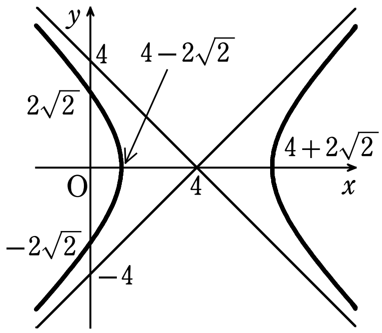
(2)　$r=2$ を (1) の方程式に代入すると

$x^2-8x-y^2+8=0$

ゆえに　$(x-4)^2-y^2=8$

よって　$\dfrac{(x-4)^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$

これは双曲線を表し，概形は図のようになる.



(3)　曲線 C が楕円を表すための必要条件は

$r-1<0$　すなわち　$r<1$

更に，$\sqrt{r}$ は実数であるから　$r>0$

よって　$0<r<1$

(1) の式を変形すると

$(1-r)x^2+4rx+y^2-4r=0$　から

$(1-r)\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=4r+\dfrac{4r^2}{1-r}$

すなわち　$(1-r)\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=\dfrac{4r}{1-r}$

よって　$\dfrac{\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2}{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4r}{1-r}}=1$

ここで　$\dfrac{4r}{(1-r)^2}-\dfrac{4r}{1-r}=\dfrac{4r^2}{(1-r)^2}>0$

ゆえに　$\dfrac{4r}{(1-r)^2}>\dfrac{4r}{1-r}$

よって，長軸の長さが $\sqrt{5}$ である条件は　$2\sqrt{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}=\sqrt{5}$

平方して整理すると　$5r^2-26r+5=0$

ゆえに　$(r-5)(5r-1)=0$　　よって　$r=\dfrac{1}{5}$，5

$0<r<1$ であるから　$r=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{3}$ 楕円上の任意の点を P$(x,\ y)$，P から直線 $x=k$ に下ろした垂線を PH とすると，次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=e:1$$

よって　$\mathrm{PF}=e\mathrm{PH}$　　ゆえに　$\mathrm{PF}^2=e^2\mathrm{PH}^2$

$\mathrm{PF}^2=(x-\sqrt{5})^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=(x-k)^2$ を代入すると

$$(x-\sqrt{5})^2+y^2=e^2(x-k)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，P$(x,\ y)$ は楕円上の点であるから　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

よって　$y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)$

これを ① に代入すると　$(x-\sqrt{5})^2+4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)=e^2(x-k)^2$

x について整理すると　$(9e^2-5)x^2-18(e^2k-\sqrt{5})x+9(e^2k^2-9)=0$

この等式は，楕円上の任意の点 P$(x,\ y)$ について成り立つ，すなわち $-3\leqq x\leqq 3$ である

すべての実数 x について成り立つから　$\begin{cases} 9e^2-5=0 & \cdots\cdots ② \\ e^2k-\sqrt{5}=0 & \cdots\cdots ③ \\ e^2k^2-9=0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

② から　$e^2=\dfrac{5}{9}$　　$e>0$ から　$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

これを ③ に代入して k を求めると　$k=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

これらは ④ も満たす。

よって　$k=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

別解　楕円上の 2 点 $\mathrm{P}_1(3,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(0,\ 2)$ をとる。

P_1，P_2 から直線 $x=k$ に下ろした垂線を，それぞれ $\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{H}_2$ とすると

$$\mathrm{P}_1\mathrm{F}:\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1=e:1,\ \mathrm{P}_2\mathrm{F}:\mathrm{P}_2\mathrm{H}_2=e:1$$

が成り立つから　$e=\dfrac{\mathrm{P}_1\mathrm{F}}{\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1}=\dfrac{\mathrm{P}_2\mathrm{F}}{\mathrm{P}_2\mathrm{H}_2}$　$\cdots\cdots ①$

準線 $x=k$ は楕円より右側にある，すなわち $k>3$ であるから

$$\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1=|k-3|=k-3$$

また　　$P_1F=3-\sqrt{5}$，$P_2H_2=k$，$P_2F=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$

よって，① から　　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{k-3}=\dfrac{3}{k}$　　　ゆえに　　$3(k-3)=k(3-\sqrt{5})$

これを解いて　　$k=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

また，① から　　$e=\dfrac{3}{k}=3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{9}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{4}$ 略