

テーマ演習 群数列 (1)

【1】2009

初項 1, 公比 2 の等比数列 $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ を次のように第 n 群が n 個 ($n=1, 2, 3, \dots$) の項を含むように分ける。

$$1 \mid 2, 2^2 \mid 2^3, 2^4, 2^5 \mid 2^6, 2^7, 2^8, 2^9 \mid \dots$$

次の各問に答えよ。

- (1) 第 n 群の最初の項と最後の項を求めよ。
- (2) 第 n 群に属する n 個の項の和 S_n を求めよ。
- (3) 10^{100} をはじめて超える項は第何群にあるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

【2】2005

2 の累乗を分母とする既約分数を次のように並べた数列について、次の問いに答えよ。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \dots, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

- (1) 分母が 2^n となっている項の和を求めよ。
- (2) 第 1 項から第 1000 項までの和を求めよ。

【3】2001

数列 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \dots$ において、分子が n である項をまとめて、第 n 群とよぶことにする。たとえば、第 4 群は、数列の第 7 項から始まり、 $\frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}$ の 4 項を含んでいる。

このとき、次の枠内にあてはまる値を記入せよ。

- 1) この数列の第 100 項は、第 群の中の最初から 番目である。
- 2) 分数を約分した値が 10 になる項が、この数列の中で最初に現れるのは第 項であり、10 回目に現れるのは第 項である。
- 3) 第 540 群に含まれる項のうちで、分数を約分した値が整数になる項は 個あり、これらの項すべての和の値は である。

【4】2000

自然数を下の図のように並べる。

1	3	4	10	11	...
2	5	9	12	...	...
6	8	13	...	...	...
7	14	...	...	...	...
15	17	...	...	...	...
16	...	...	...	...	...

- (1) n が偶数のとき、1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。
- (2) n が奇数のとき、1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。
- (3) 1000 は左から何番目、上から何段目にあるか。

【5】2010

上から1行目左から1列目のマスに自然数1を入れ、上から1行目左から2列目のマスに自然数2を入れ、上から2行目左から1列目のマスに自然数3を入れる。それより後の自然数は下の図のような規則でマス目に順番に入れていく。このとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

1	2	6	7	15	16	
3	5	8	14	17		
4	9	13	18			
10	12	19				
11	20					

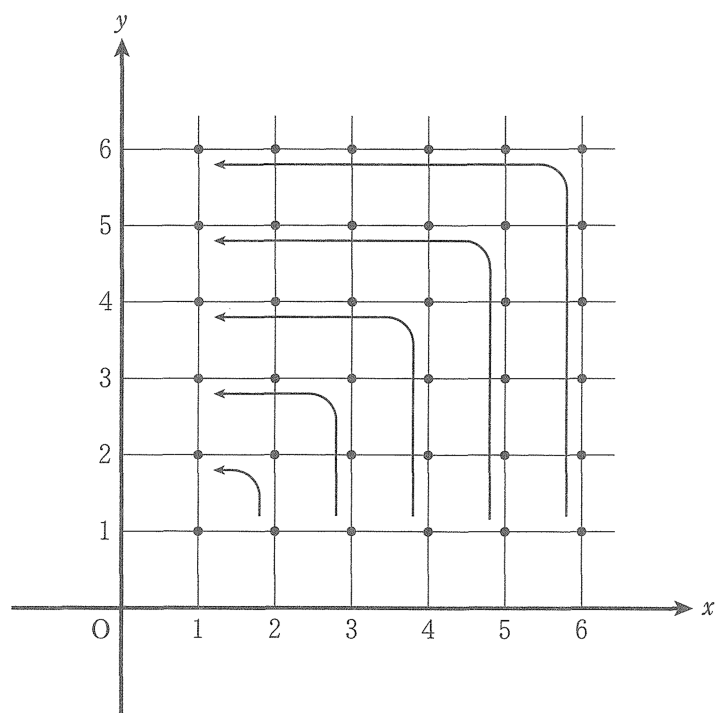
- (i) 上から1行目左から $2n$ 列目のマス目に入っている自然数を a_n とする。上の図より $a_1=2$, $a_2=7$, $a_3=16$ である。 a_4 , a_5 を求めよ。
- (ii) a_n を n を用いて表せ。
- (iii) 上から n 行目左から n 列目のマス目に入っている自然数を b_n とする。上の図より $b_1=1$, $b_2=5$, $b_3=13$ である。 b_n を n を用いて表せ。
- (iv) 上から20行目左から23列目のマス目に入っている自然数を求めよ。
- (v) 自然数20000は上から x 行目左から y 列目のマス目に入っている。 x と y を求めよ。

【6】2011

座標平面上の自然数を成分とする点 (m, n) に、有理数 $\frac{n}{m}$ を対応させる。下図のように、点 $(1, 1)$ から矢印の順番に従って、対応する有理数を並べ、次のような数列をつくる。

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

このとき、次の問いに答えなさい。



- (1) 有理数 $\frac{11}{8}$ が初めて現れるのは第何項かを求めなさい。
- (2) 第 160 項を求めなさい。
- (3) 第 1000 項までに、値が 2 となる項の総数を求めなさい。

【解答 1】 2009

- (1) 最初 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ 最後 $2^{\frac{1}{2}(n^2+n-2)}$
 (2) $S_n = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}(2^n - 1)$ (3) 第 8 群

【解答 2】 2005

- (1) 2^{n-2} (2) $\frac{500753}{1024}$

【解答 3】 2001

- 1) 14, 9 2) 46, 4960 3) 24, 1680

【解答 4】 2000

- (1) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ (2) $a_n = \frac{1}{2}(n-1)n+1$
 (3) 左から 36 番目, 上から 10 段目

【解答 5】 2010

- (i) $a_4 = 29$, $a_5 = 46$ (ii) $a_n = 2n^2 - n + 1$
 (iii) $b_n = 2n^2 - 2n + 1$ (iv) 881
 (v) $x = 100$, $y = 101$

【解答 6】 2011

- (1) 第 114 項 (2) $\frac{13}{10}$ (3) 15 項

テーマ演習 群数列（２）

【７】 2004

数列 $1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \dots$ の第 n 項を a_n とするとき、次の問に答えよ。

- (1) $a_n = 1$ となる n を小さい順に並べてできる数列 $1, 3, 7, 13, 21, \dots$ の第 k 項を b_k とする。 b_k を求めよ。
- (2) a_{1000} の値を求めよ。
- (3) $\sum_{n=1}^{b_k} a_n$ を求めよ。

【８】 2004

初項が 50 で公差が 6 の等差数列 a_n を考える。この数列を下記のように 1 個, 3 個, 3^2 個, $\dots$ の項からなる群に区切った。

$$|a_1| \mid a_2 a_3 a_4 \mid a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} \mid a_{14} a_{15} \cdots$$

m を 2 以上の整数とすると、次の問 (i) ~ (iii) に答えよ。解答は所定欄に記入せよ。

- (i) m 番目の群の最初の項を a_k とするとき、 k を m の式で表せ。
- (ii) 前問 (i) の a_k の値を m の式で表せ。
- (iii) m 番目の群に入る項の和を m の式で表せ。

【９】 2002

$m = 1, 2, 3, \dots$ の順に m を $(2m-1)$ 個並べてできる数列

$$1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, \dots$$

を $\{a_n\}$ で表す。例えば、 $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4 = 2$, $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 3$ である。この数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

- (i) $a_n = 10$ を満たす最大の n を求めよ。
- (ii) 自然数 m に対して、 $a_n = m$ を満たす最大の n と最小の n をそれぞれ m で表せ。
- (iii) 不等式 $\sqrt{n} \leq a_n < \sqrt{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。

- (iv) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

【 1 0 】 2010

2 つの数 a, b を用いてできる数列

$$a, b, 2a, a+b, 2b, 3a, 2a+b, a+2b, \\ 3b, 4a, 3a+b, 2a+2b, a+3b, 4b, \dots$$

を $\{c_n\}$ とする。

(1) c_{100} の値を a, b を用いて表せ。

(2) $\sum_{n=1}^{100} c_n$ の値を a, b を用いて表せ。

(3) $a=2, b=5$ とする。上の数列 $\{c_n\}$ から、前に出てきた項より小さい項をすべて取り除いてできる新しい数列を $\{d_n\}$ とするとき、 $\{d_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を求めよ。

【 1 1 】 2002

正の整数 m, n をそれぞれ x 座標, y 座標とする点 (m, n) に次の (i), (ii), (iii) を満たすように番号を付ける。

(i) 点 $(1, 1)$ は 1 番

(ii) $m+n$ が偶数のとき

$m=1$ ならば点 (m, n) の次の番号を点 $(m, n+1)$ に付ける。

$m \geq 2$ ならば点 (m, n) の次の番号を点 $(m-1, n+1)$ に付ける。

(iii) $m+n$ が奇数のとき

$m=1$ ならば点 (m, n) の次の番号を点 $(m+1, n)$ に付ける。

$m \geq 2$ ならば点 (m, n) の次の番号を点 $(m+1, n-1)$ に付ける。

以下の間に答えよ。

(1) このように番号を付けると 2 番の点の座標は $(1, 2)$ であり, 3 番の点の座標は $(2, 1)$ となる。4 番, 5 番, 6 番の点の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 $(5, 5)$ は何番の点か。

(3) 点 $(40, 35)$ は何番の点か。

(4) 2002 番の点の座標を求めよ。

【 1 2 】 2002

自然数1, 2, 3, ...を次の図のように並べていくとき, 次の各問に答えよ。

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

- (1) 左から m 番目, 上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。
- (2) 90 は左から何番目, 上から何番目の位置にあるか。
- (3) 自然数 n を

$$n = k^2 + \ell \quad (k \text{ は負でない整数, } 1 \leq \ell \leq 2k+1)$$
と表すとき, n は左から何番目, 上から何番目の位置にあるか, k, ℓ を用いて表せ。

【解答 7】 2004

$$(1) \quad k^2 - k + 1 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad \frac{2k^3 + 3k^2 - 5k + 6}{6}$$

【解答 8】 2004

$$(i) \quad k = \frac{3^{m-1} + 1}{2} \quad (ii) \quad 3^m + 47 \quad (iii) \quad 2 \cdot 3^{2m-1} + 44 \cdot 3^{m-1}$$

【解答 9】 2002

$$(i) \quad n = 100 \quad (ii) \quad \text{最大 } n = m^2, \text{ 最小 } n = (m-1)^2 + 1$$

$$(iii) \quad (\text{省略}) \quad (iv) \quad \frac{2}{3}$$

【解答 10】 2010

$$(1) \quad c_{100} = 4a + 9b \quad (2) \quad 449a + 409b$$

$$(3) \quad (5n + 2)n$$

【解答 11】 2002

$$(1) \quad 4, 5, 6 \text{ 番の座標は } (3, 1), (2, 2), (1, 3)$$

$$(2) \quad 41 \text{ 番} \quad (3) \quad 2741 \text{ 番} \quad (4) \quad (15, 49)$$

【解答 12】 2002

$$(1) \quad m^2 - m + 1$$

$$(2) \quad \text{左から } 10 \text{ 番目, 上から } 9 \text{ 番目}$$

$$(3) \quad 1 \leq l \leq k+1 \text{ のとき, 左から } (k+1) \text{ 番目, 上から } l \text{ 番目}$$

$$k+1 \leq l \leq 2k+1 \text{ のとき, 左から } (2k-l+2) \text{ 番目, 上から } (k+1) \text{ 番目}$$