過去問めぐり　2007　聖マリアンナ医科大学

【問題】

［1］　以下の $\boxed{\text{①}}$ から $\boxed{\text{③}}$ の中に，解答群にある数字，文字，記号の中から最もふさわしいものを選択して，①から③に記入しなさい。なお，同じ数字，文字，記号を何回選んでもよい。

n を自然数として，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ の値を以下のように求める。

$\boxed{\text{①}}^n < 2^n+3^n < 2\times\boxed{\text{①}}^n$ だから，この各辺を $\dfrac{1}{n}$ 乗して，

$\boxed{\text{①}} < (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}\times\boxed{\text{①}}$ となる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}\times\boxed{\text{①}})=\boxed{\text{②}}$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=\boxed{\text{③}}$

(解答群)

0，1，2，3，e，$2e$，$3e$，e^2，e^3，∞

(e は自然対数の底を表す)

［2］　$0\leqq a<b$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\boxed{\text{④}}$

［3］

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x)^{\frac{1}{n}}$ とおく。

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{\text{⑤}}$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\boxed{\text{⑥}}$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{\text{⑦}}$ である。

［4］　前問［3］の $f(x)$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ を計算しなさい。なお，計算の過程も含めて記載しなさい。

【解答】

解答 ①3　②3　③3　④b　⑤$\frac{3}{4}$　⑥$\frac{1}{2}$　⑦$\frac{3}{4}$

〔1〕$0<2^n<3^n$ であるから　　$3^n<2^n+3^n<2\cdot 3^n$

各辺を $\frac{1}{n}$ 乗して　　$3<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}\cdot 3$

$\lim_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}\cdot 3)=3$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$$

〔2〕〔1〕と同様に考えると

$0<a^n<b^n$ より　　$b^n<a^n+b^n<b^n+b^n=2b^n$

各辺を $\frac{1}{n}$ 乗して　　$b<(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}\cdot b$

$\lim_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}\cdot b)=b$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=b$$

〔3〕(i) $0<x<\frac{\pi}{4}$ のとき

$\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$ だから

$\cos x>\sin x>0$ より

$$\cos^2 x-\sin^2 x>0 \qquad \therefore \quad \cos^2 x>\sin^2 x$$

よって，$a=\sin^2 x$，$b=\cos^2 x$ とおくと，〔2〕により

$$f(x)=\cos^2 x \qquad \therefore \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}$$

(ii) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ のとき

(i)と同様に考えると，$\cos^2 x<\sin^2 x$ である。

$a=\cos^2 x$，$b=\sin^2 x$ とおくと，〔2〕により

$$f(x)=\sin^2 x \qquad \therefore \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$$

(iii) $x=\frac{\pi}{4}$ のとき

$\cos^2\frac{\pi}{4}=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ より

$$(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

〔4〕
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(答)$$