

テーマ演習 格子点

格子点

- (1) タテに切る（またはヨコに切る）
- (2) $x = k$ （または $y = k$ ）上の格子点を数える
- (3) それらの和をとると格子点の総数が求まる。

格子点 座標がすべて整数である点のこと。

(例) 数直線上で $11 \leq x \leq 86$ に含まれる格子点の個数は

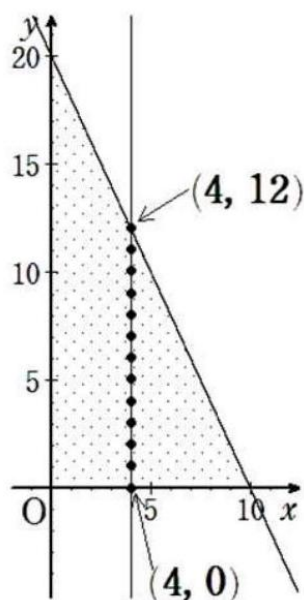
$$\underbrace{86}_{\text{大}} - \underbrace{11}_{\text{小}} + 1 = 76 \text{ (個) である。}$$

例題 1

xy 平面上で、 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 20$ の表す領域に含まれる格子点の個数 S を求めたい。

- (1) $x = 4$ 上の格子点の個数を求めよ。
- (2) 格子点の総数 S を求めよ。

【解答】



- (1) 境界 $y = 0, y = -2x + 20$ より
 $x = 4$ 上の格子点は
 $(4, 0), (4, 12)$ の間,
 つまり $0 \leq y \leq 12$ の範囲に存在する。
 よって, $12 - 0 + 1 = 13$ (個)
- (2) $x = k$ 上の格子点は
 $0 \leq y \leq -2k + 20$ の範囲に存在する。
 よって,
 $(-2k + 20) - 0 + 1 = 21 - 2k$ (個)
 それらを $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ でたすと.
 $21 + 19 + 17 + \dots + 5 + 3 + 1$
 $= \frac{(21 + 1) \times 11}{2} = 121$ (個)

例題 2

xy 平面上で、 $x^2 \leq y \leq 15x$ の表す領域に含まれる格子点の総数を求めよ。

例題 3

n を自然数とする。 xy 平面上で、 $x^2 \leq y \leq nx$ の表す領域に含まれる格子点の総数を求めよ。

例題 4

xy 平面上で、 $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 100$ の表す領域に含まれる格子点の総数を求めよ。