【１】2007 杏林大学 2/1,一次 医

(1)　点 O，O′ を中心とする 2 つの円が，$OO'=10$ のとき外接し，$OO'=4$ のとき内接する。大きい方の円の半径は $\boxed{\text{ア}}$，小さい方の円の半径は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，$OO'=12$ のとき，1 つの共通接線による接点間の距離の中で長い方は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，短い方は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2)
解答欄 $\boxed{\text{チ}}$ の解答は次の解答群から 1 つ選べ。

放物線

$$x^2=-6y+9 \quad \cdots\cdots ①$$

の焦点の座標は $(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}})$，準線は $y=\boxed{\text{コ}}$ である。

直線

$$y=\sqrt{3}x+k \quad \cdots\cdots ②$$

が①と接するとき，$k=\boxed{\text{サ}}$，接点の座標は

$(\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}, \boxed{\text{ソタ}})$ である。

xy 座標の原点を極，x 軸の正の方向を始線とする極座標 (r, θ) を用いると，放物線①の極方程式は

$$r(\boxed{\text{チ}})=\boxed{\text{ツ}}$$

となり，接線②の極方程式は

$$r\sin\left(\theta-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\pi\right)=\boxed{\text{ナ}}$$

となる。また，接点の極座標は $\left(\boxed{\text{ニ}}, \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi\right)$ である。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

①　$1+\sin\theta$　　②　$1+\cos\theta$　　③　$1-\sin\theta$　　④　$1-\cos\theta$

【解答１】2007 杏林大学 2/1,一次 医

(1) 円 O, O' の半径をそれぞれ r, r' $(r<r')$ とすると，$\mathrm{OO'}=10$ のとき外接するから

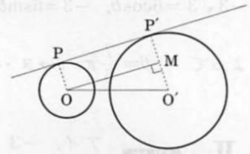
$$r'+r=10$$

$\mathrm{OO'}=4$ のとき内接するから

$$r'-r=4$$

これらを解いて　$r=3$, $r'=7$ (→ア・イ)

共通接線の接点間の距離が長いとき，その接点を P, P′ として，O から直線 O′P′ に下ろした垂線を OM とすると



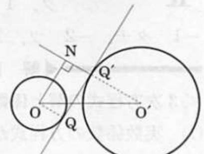
$$\mathrm{PP'}=\mathrm{OM}$$

$$\mathrm{O'M}=\mathrm{O'P'}-\mathrm{OP}=7-3=4$$

より，△OO′M に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{OM}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}\quad (\text{→ウ・エ})$$

接点間の距離が短いとき，その接点を Q, Q′ として，O から直線 O′Q′ に下ろした垂線を ON とすると



$$\mathrm{QQ'}=\mathrm{ON}$$

$$\mathrm{O'N}=\mathrm{O'Q'}+\mathrm{OQ}=7+3=10$$

より，△OO′N に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{ON}=\sqrt{12^2-10^2}=2\sqrt{11}\quad (\text{→オ・カキ})$$

(2) $x^2=-6y$ の焦点の座標は $\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$ で，準線が $y=\dfrac{3}{2}$

$x^2=-6\left(y-\dfrac{3}{2}\right)$ は $x^2=-6y$ を y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動したものだから，

焦点は原点 O(0, 0) となり，準線は $y=3$ となる。(→ク～コ)

つぎに，①，②より y を消去して

$$x^2+6\sqrt{3}x+6k-9=0\quad \cdots\cdots③$$

この式の判別式 $D=0$ であればよい。よって

$$\frac{D}{4}=(3\sqrt{3})^2-(6k-9)=-6k+36=0\qquad \therefore\quad k=6$$

このとき③の解は $x=-3\sqrt{3}$ なので，接点の座標は　$(-3\sqrt{3},\ -3)$

(→シス～ソタ)

①の極方程式は，放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から準線へ下ろした垂線の足を H として，$\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$ より

$$r=3-r\sin\theta\qquad \therefore\quad r(1+\sin\theta)=3\quad (\text{→チ・ツ})$$

②の極方程式は $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ となるから，②に代入すると

$$r\sin\theta=\sqrt{3}\,r\cos\theta+6$$

$$r(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)=6\qquad \therefore\quad r\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)=3\quad (\text{→テ～ナ})$$

また，接点を $(r,\ \theta)$ とすると　$r=\sqrt{(-3\sqrt{3})^2+(-3)^2}=6$ (→ニ)

$-3\sqrt{3}=6\cos\theta$, $-3=6\sin\theta$ より　$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$ (→ヌ・ネ)