過去問めぐり　2016 埼玉医科大学

問1　$a<0$ のとき，次の無限級数の和はそれぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{na} = \boxed{(16)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{na} = \boxed{(17)}$$

となる。ただし，$\lim_{n\to\infty} n^2e^{na}=0$ を用いてよい。

$\boxed{(16)}$ に入る式として正しいものを，次の①～⑨のうちから1つ選べ。

① $\dfrac{1}{1+e^a}$　② $\dfrac{1}{1+e^{-a}}$　③ $\dfrac{1}{1-e^a}$

④ $\dfrac{1}{(1+e^a)^2}$　⑤ $\dfrac{e^{-a}}{(1+e^{-a})^2}$　⑥ $\dfrac{e^a}{(1-e^a)^2}$

⑦ $\dfrac{e^a}{(1+e^a)^3}$　⑧ $\dfrac{e^{-a}(1+e^{-a})}{(1-e^{-a})^3}$　⑨ $\dfrac{e^a(1+e^a)}{(1-e^a)^3}$

$\boxed{(17)}$ に入る式として正しいものを，次の①～⑨のうちから1つ選べ。

① $\dfrac{1}{1+e^a}$　② $\dfrac{1}{1+e^{-a}}$　③ $\dfrac{1}{1-e^a}$

④ $\dfrac{1}{(1+e^a)^2}$　⑤ $\dfrac{e^{-a}}{(1+e^{-a})^2}$　⑥ $\dfrac{e^a}{(1-e^a)^2}$

⑦ $\dfrac{e^a}{(1+e^a)^3}$　⑧ $\dfrac{e^{-a}(1+e^{-a})}{(1-e^{-a})^3}$　⑨ $\dfrac{e^a(1+e^a)}{(1-e^a)^3}$

問2　次の無限級数の和について各枠に当てはまる数字をマークせよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)(n+6)} = \frac{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}\boxed{(21)}\boxed{(22)}}$$

問１．(16)―⑥　(17)―⑨

問２．(18)(19) 73　(20)(21)(22) 180

問１．$e^a=r$，$S_n=\sum_{k=1}^{n} ke^{ak}$ とすると，$S_n=\sum_{k=1}^{n} kr^k$ であって，$a<0$ より $0<r<1$ である。

$$S_n=r+2r^2+3r^3+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$$
$$rS_n=r^2+2r^3+3r^4+\cdots+(n-1)r^n+nr^{n+1}$$

であるから

$$S_n-rS_n=r+r^2+r^3+\cdots+r^n-nr^{n+1}$$
$$(1-r)S_n=\sum_{k=1}^{n} r^k-nr^{n+1}$$
$$S_n=\frac{1}{1-r}\left(\sum_{k=1}^{n} r^k-nr^{n+1}\right)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$\sum_{k=1}^{n} r^k=\frac{r(1-r^n)}{1-r}$ であり，$0<r<1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^k=\frac{r}{1-r}\quad\cdots\cdots②$$

また，$\lim_{n\to\infty} n^2e^{na}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} nr^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}(n^2r^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}(n^2e^{na})=0$$

①，②より

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-r}\left(\frac{r}{1-r}-0\right)=\frac{r}{(1-r)^2}\quad\cdots\cdots③$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{na}=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{r}{(1-r)^2}=\frac{e^a}{(1-e^a)^2}\quad(\to(16))$$

次に，$T_n=\sum_{k=1}^{n} k^2r^k$ とすると

$$T_n=r+2^2r^2+3^2r^3+\cdots+(n-1)^2r^{n-1}+n^2r^n$$
$$rT_n=r^2+2^2r^3+3^2r^4+\cdots+(n-1)^2r^n+n^2r^{n+1}$$

であるから

$$T_n-rT_n=r+(2^2-1)r^2r^3+\cdots+\{n^2-(n-1)^2\}r^n-n^2r^{n+1}$$
$$(1-r)T_n=\sum_{k=1}^{n}\{k^2-(k-1)^2\}r^k-n^2r^{n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)r^k-n^2r^{n+1}$$
$$T_n=\frac{1}{1-r}\left(2\sum_{k=1}^{n} kr^k-\sum_{k=1}^{n} r^k-n^2r^{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{1-r}\left(2S_n-\sum_{k=1}^{n} r^k-n^2r^{n+1}\right)$$

そして，$\lim_{n\to\infty} n^2r^{n+1}=\lim_{n\to\infty} r(n^2r^n)=\lim_{n\to\infty} r(n^2e^{na})=0$ であるから，②，③より

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{1-r}\left\{\frac{2r}{(1-r)^2} - \frac{r}{1-r} - 0\right\} = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{na} = \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3} = \frac{e^a(1+e^a)}{(1-e^a)^3} \quad (\to (17))$$

問２．$a_n = \dfrac{6}{n(n+3)(n+6)}$，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

$$\frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+3)(n+6)} = \frac{(n+6)-n}{n(n+3)(n+6)}$$

$$= \frac{6}{n(n+3)(n+6)}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+3)(n+6)}$$

ここで，$\dfrac{1}{n(n+3)} = b_n$ とすると，$\dfrac{1}{(n+3)(n+6)} = b_{n+3}$ であるから

$$a_n = b_n - b_{n+3}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+3}) = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_{k+3}$$

そして

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{n-1} + b_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k+3} = b_4 + b_5 + \cdots + b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}$$

$$S_n = (b_1 + b_2 + b_3) - (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3})$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+3)} = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = 0,\quad \lim_{n\to\infty} b_{n+2} = 0,\quad \lim_{n\to\infty} b_{n+3} = 0$$

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 + b_2 + b_3$$

ここで

$$b_1 = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4},\quad b_2 = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{10},\quad b_3 = \frac{1}{3\cdot 6} = \frac{1}{18}$$

であるから

$$(\text{与式}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} = \frac{73}{180} \quad (\to (18) \sim (22))$$