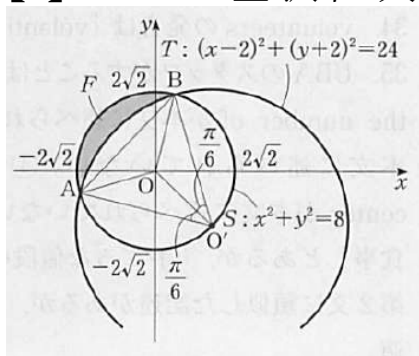


【1】 2012 金沢医大・医・1



$OO' = OB = 2\sqrt{2}$, $O'B = 2\sqrt{6}$ であるから
 $\triangle OO'B$ において、余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle OO'B &= \frac{OO'^2 + O'B^2 - OB^2}{2 \cdot OO' \cdot O'B} \\ &= \frac{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって $\angle OO'B = \frac{1}{6}\pi$ (→ アイ)
 また $\triangle OO'A$ と $\triangle OO'B$ において、 OO' 共通、 $OA = OB$, $O'A = O'B = 2\sqrt{6}$ より
 $\triangle OO'A \equiv \triangle OO'B$ であるから

$$\angle OO'A = \frac{\pi}{6}$$

よって

$$\angle AO'B = \angle OO'A + \angle OO'B = \frac{1}{3}\pi \quad (\rightarrow \text{ウエ})$$

また、円周角の定理より

$$\angle AOB = 2\angle AO'B = \frac{2}{3}\pi \quad (\rightarrow \text{オカ})$$

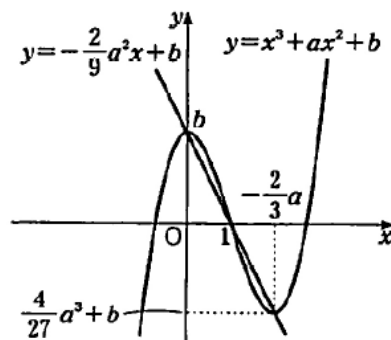
円 S の内側と円 T の外側との共通部分の面積を F とすると

$$F = \{(\text{扇形 } AOB) - (\triangle AOB)\} - \{(\text{扇形 } AO'B) - (\triangle AO'B)\}$$

で求めることができるので

$$\begin{aligned} F &= \left[\left\{ \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{2}{3}\pi \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 \sin \frac{2}{3}\pi \right\} \right] \\ &\quad - \left[\left\{ \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6})^2 \cdot \frac{1}{3}\pi \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6})^2 \sin \frac{1}{3}\pi \right\} \right] \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \quad (\rightarrow \text{キ〜コ}) \end{aligned}$$

【2】 2012 金沢医大・医・2



$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$
 $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, -\frac{2}{3}a$
 $(a \neq 0)$ のとき。

よって $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつので、 $f(x)$ は $x = 0, -\frac{2}{3}a$ で極値をとる。(サシ)

極値は、

$x = 0$ のとき $f(0) = b$,
 $x = -\frac{2}{3}a$ のとき $f\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3 + b$ である。
 また、2 つの点 $(0, b), \left(-\frac{2}{3}a, \frac{4}{27}a^3 + b\right)$ を通る直線は $a \neq 0$ より

$$y - b = \frac{\frac{4}{27}a^3 + b - b}{-\frac{2}{3}a - 0}(x - 0)$$

$$\text{つまり } y = -\frac{2}{9}a^2x + b$$

であり、この直線が $y = f(x)$ と点 $(1, 0)$ で交わっているので点 $(1, 0)$ を $y = -\frac{2}{9}a^2x + b$ に代入して

$$-\frac{2}{9}a^2 + b = 0 \cdots \cdots \text{①}$$

また、点 $(1, 0)$ を $y = f(x)$ に代入して
 $0 = 1 + a + b \cdots \cdots \text{②}$

①, ② を連立して解くと

$$a = -\frac{3}{2}, -3$$

$$a \neq -\frac{3}{2} \text{ より } a = -3$$

これを ② に代入して $b = 2$

よって $a = -3, b = 2$ (→ タチ)

【3】 2012 金沢医大・医・3

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (1 + 2 \cos 5t)^2 dt \\
 &= \int_0^x (1 + 4 \cos 5t + 4 \cos^2 5t) dt \\
 &= \int_0^x \left(1 + 4 \cos 5t + 4 \cdot \frac{\cos 10t + 1}{2} \right) dt \\
 &\quad \left(\because \cos^2 5t = \frac{\cos 10t + 1}{2} \right) \\
 &= \int_0^x (2 \cos 10t + 4 \cos 5t + 3) dt \\
 &= \left[\frac{1}{5} \sin 10t + \frac{4}{5} \sin 5t + 3t \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{5} \sin 10x + \frac{4}{5} \sin 5x + 3x
 \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5} \sin 10x + \frac{4}{5} \sin 5x + 3x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 10x}{10x} + 4 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} + 3 \right) \\
 &= 9 \quad (\rightarrow \text{ツ})
 \end{aligned}$$

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin 10x}{x} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sin 5x}{x} + 3 \right)$$

ここで, $-1 \leq \sin 10x \leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin 10x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ より,}$$

はさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 10x}{x} = 0$$

$$\text{同様に } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 5x}{x} = 0$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad (\rightarrow \text{テ})$$

【4】 2012 金沢医大・医・4

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\
 &= \frac{2(7 + 3\sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

であるから

$$2x - 7 = 3\sqrt{5}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2 = 7x - 1 \cdots \cdots \textcircled{1} (\rightarrow \text{トナ})$$

① の両辺に $x (\neq 0)$ をかけると

$$x^3 = 7x^2 - x$$

① を代入して

$$x^3 = 7(7x - 1) - x = 48x - 7 \quad (\rightarrow \text{ニ～ネ})$$

$x^n = a_n x - b_n$ のとき, 両辺に x をかけると

$$x^{n+1} = a_n x^2 - b_n x$$

(1) を代入すると

$$x^{n+1} = a_n(7x - 1) - b_n x = (7a_n - b_n)x - a_n$$

また, $x^{n+1} = a_{n+1}x - b_{n+1}$ であるから

$$(7a_n - b_n)x - a_n = a_{n+1}x - b_{n+1}$$

これが x の恒等式になるので

$$a_{n+1} = 7a_n - b_n, \quad b_{n+1} - a_n = 0 \quad (\rightarrow \text{ノハ})$$

【5】 2012 金沢医大・医・5

$y = z$ のとき

① は $x + z + 2|z - x| = 13 \cdots \cdots ①'$

② は $x + z = 20 \cdots \cdots ②'$

①' - ②' より

$$-2|z - x| = 7 \quad (\rightarrow \text{ヒ})$$

よって $|z - x| = -\frac{7}{2}$ となり, x, z が整数であることを満たさないので $y \neq z$ である。

同様に

$x = y$ のとき

② は $y + 2|y - z| + z = 20 \cdots \cdots ②''$

③ は $y + z = 19 \cdots \cdots ③'$

②'' - ③' より

$$2|y - z| = 1 \quad (\rightarrow \text{フ})$$

$|y - z| = \frac{1}{2}$ となり, y, z が整数であることを満たさないので $x \neq y$ である。

同様に考えると $x \neq z$ でもあるから, x, y, z の大小関係の表し方は

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

である。($\rightarrow$ ヘ)

(i) $x > y > z$ のとき

$$\begin{cases} x + y - 2(z - x) = 13 \\ x + 2(y - z) + z = 20 \\ 2(x - y) + y + z = 19 \end{cases}$$

これを解くと $x = 9, y = 12, z = 13$ これは $x > y > z$ を満たさない。

(ii) $x > z > y$ のとき

$$\begin{cases} x + y - 2(z - x) = 13 \\ x - 2(y - z) + z = 20 \\ 2(x - y) + y + z = 19 \end{cases}$$

これを解くと $x = 7, y = -2, z = 3$ これは $x > z > y$ を満たす。

(iii) $y > x > z$ のとき

$$\begin{cases} x + y - 2(z - x) = 13 \\ x + 2(y - z) + z = 20 \\ -2(x - y) + y + z = 19 \end{cases}$$

これを解くと $x = -9, y = 6, z = -17$ これは $y > x > z$ を満たす。

(iv) $y > z > x$ のとき

$$\begin{cases} x + y + 2(z - x) = 13 \\ x + 2(y - z) + z = 20 \\ -2(x - y) + y + z = 19 \end{cases}$$

これを解くと $x = 7, y = \frac{46}{5}, z = \frac{27}{5}$ y, z は整数であることを満たさない。

(v) $z > x > y$ のとき

$$\begin{cases} x + y + 2(z - x) = 13 \\ x - 2(y - z) + z = 20 \\ 2(x - y) + y + z = 19 \end{cases}$$

これを解くと $x = \frac{43}{5}, y = 6, z = \frac{39}{5}$ x, z は整数であることを満たさない。

(vi) $z > y > x$ のとき

$$\begin{cases} x + y + 2(z - x) = 13 \\ x - 2(y - z) + z = 20 \\ -2(x - y) + y + z = 19 \end{cases}$$

これを解くと $x = 45, y = 32, z = 13$ これは $z > y > x$ を満たさない。

よって, (i)~(vi) より 3 つの等式を満たす整数の組は

$$(7, -2, 3) \text{ と } (-9, 6, -17) \quad (\rightarrow \text{ホ} \sim \text{モ})$$