和尚の数学♪過去問めぐり・東邦の極限

【１】2012

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{3+\sin x}}\right)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

【２】2013

関数 $f(x)=\sqrt{2+x}$ について，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(2+h)}{f(2-h)}-\left(\frac{3-h}{3+h}\right)^3\right\}=\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

【３】2013

n を自然数とし，e を自然対数の底とする。n の関数 $f(n)$ を，

$f(n)=\log_e({}_{2n}C_n)+n\left\{1-\log_e\left(\dfrac{n}{4!}\right)\right\}+\log_e(n!)$ で定める。

$X=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$ とおくとき，$e^X=\boxed{\text{ニヌ}}$ である。

【１】

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{3-\sin x}}{x\sqrt{3-\sin x}\sqrt{3+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{3-\sin x})(\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x})}{x\sqrt{3-\sin x}\sqrt{3+\sin x}(\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3+\sin x)-(3-\sin x)}{x\sqrt{3-\sin x}\sqrt{3+\sin x}(\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-\sin x}\sqrt{3+\sin x}(\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x})}$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

【２】

$f(x)=\sqrt{2+x}$ より

$$\lim_{h\to 0}f(2+h)=f(2)=2,\quad \lim_{h\to 0}f(2-h)=f(2)=2$$

また，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$ より　　$f'(2)=\dfrac{1}{4}$

このとき

$$(与式)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(2+h)\cdot(3+h)^3-f(2-h)\cdot(3-h)^3}{f(2-h)\cdot(3+h)^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\{f(2+h)-f(2)\}(3+h)^3-\{f(2-h)-f(2)\}(3-h)^3+f(2)\{(3+h)^3-(3-h)^3\}}{f(2-h)\cdot(3+h)^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}(3+h)^3+\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}(3-h)^3\right.\right.$$

$$\left.\left.+f(2)\cdot 2(27+h^2)\right\}\times\frac{1}{f(2-h)\cdot(3+h)^3}\right]$$

$$=\{f'(2)\times 3^3+f'(2)\times 3^3+2\times f(2)\times 3^3\}\times\frac{1}{f(2)\times 3^3}$$

$$=\frac{2f'(2)+2f(2)}{f(2)}$$

$$=\frac{9}{4}$$

【３】

$$f(n)=\log_e\frac{(2n)!}{n!n!}+\log_e n!-\log_e n^n+n(1+\log_e 4!)$$

$$=\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}+n(1+\log_e 4!)$$

両辺を n で割って

$$\frac{f(n)}{n}=\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}+1+\log_e 4!$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log_e\frac{n+1}{n}+\log_e\frac{n+2}{n}+\log_e\frac{n+3}{n}+\cdots+\log_e\frac{n+n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log_e\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\log_e(1+x)\,dx$$

$$=\Big[(1+x)\log_e(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=2\log_e 2-1$$

よって

$$X=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}+1+\log_e 4!\right\}$$

$$=2\log_e 2-1+1+\log_e 4!$$

$$=\log_e 96$$

ゆえに　　$e^X=96$