

# テーマ演習 反転

## 問題 1

原点  $O$  と異なる点  $P$  に対して、 $O$  を端点とする半直線  $OP$  上にあり、 $OP \cdot OQ = 1$  を満たす点  $Q$  を考える。点  $P$  が直線  $3x + 4y = 1$  上を動くとき、点  $Q$  の軌跡を求めよ。

## 問題 2

2 点  $P(x, y), Q(X, Y)$  の間に

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

の関係がある。点  $P$  が不等式

$$(4x + 3y - 5)(4x - 3y + 5) > 0$$

で表される範囲を動くとき、点  $Q$  の動く範囲を図示せよ。

## 問題 3

空間内で原点  $O$  を中心とする半径 1 の球面上に、 $N(0, 0, 1), S(0, 0, -1)$  と異なる点  $P$  をとって、 $P$  と  $N, P$  と  $S$  を結ぶ直線が  $xy$  平面と交わる点を、それぞれ  $Q(z, y, 0), R(X, Y, 0)$  とする。 $Q$  が円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上を動くとき、 $R$  はどんな曲線上を動くか。

## 問題 4

2019 東京慈恵会医科大学

方程式  $x^3 + 1 = 0$  の解のうち、虚部が正であるものを  $\alpha$  とする。複素数平面上の 3 点  $A(\alpha), B(-1), C(\bar{\alpha})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  を考える。 $\triangle ABC$  の周上の点  $P(z)$  に対して、原点  $O$  を端点とし  $P(z)$  を通る半直線上に  $|w| = \frac{1}{|z|}$  をみたす点  $Q(w)$  をとるとき、次の問いに答えよ。ただし、複素数  $\gamma$  に共役な複素数を  $\bar{\gamma}$  で表し、複素数平面上で複素数  $\gamma$  を表す点  $G$  を  $G(\gamma)$  と書く。

(1)  $w = \frac{1}{z}$  となることを示せ。

(2)  $P(z)$  が  $\triangle ABC$  の周上を動くとき、 $Q(w)$  が描く図形によって囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

## 問題 5

2019 国際医療福祉大学

複素数平面上で、点  $z$  が、2 点  $6+2i, -2+6i$  を結んでできる線分上を動く。ただし、 $i$  は虚数

単位とする。 $w = \frac{1}{z}$  とすると、 $|w|$  が最大となる点  $w$  は、 $w = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}i$

であり、 $w$  が描く曲線の長さは  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}}\pi$  である。

# テーマ演習 反転 【解答】

## 問題 1 【解答】

円  $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$ , ただし原点を除く

## 問題 2 【解答】

2点  $P(x, y), Q(X, Y)$  の間に

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

の関係がある。点  $P$  が不等式

$$(4x + 3y - 5)(4x - 3y + 5) > 0$$

で表される範囲を動くとき、点  $Q$  の動く範囲を図示せよ。

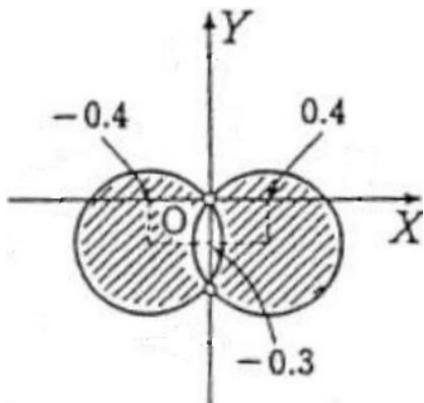
$x, y$  について解くと、 $x = \frac{X}{X^2 + Y^2}, y = -\frac{Y}{X^2 + Y^2}$  となるから、

$(4x + 3y - 5)(4x - 3y + 5) > 0$  は

$$\{4X - 3Y - 5(X^2 + Y^2)\} \{4X + 3Y + 5(X^2 + Y^2)\} > 0$$

つまり

$$\left\{ \left(X - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(Y + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} \left\{ \left(X + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(Y + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} < 0$$





**問題 4** 【解答】

(1) 半直線上にあるので

$$w = tz \quad (t > 0)$$

と表せ、条件に代入すると

$$|tz| = \frac{1}{|z|}$$
$$t = \frac{1}{|z|^2} k^k$$

(1) に代入して

$$w = \frac{1}{|z|^2} z$$
$$w = \frac{1}{z}$$

(2)  $S = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 4\pi)$

**問題 5** 【解答】

$$\frac{1-2i}{10}, \frac{\sqrt{5}}{20}\pi$$