

2014

I の解答は解答群の中から最も適当なものを1つ選べ.

n を 100 以下の自然数とし, n の約数の個数を $f(n)$, 空集合を ϕ とする.

(a) $f(48) =$ であり, $f(n) = 9$ を満たす最小の自然数は $n =$ である.
 $f(n) = 5$ を満たす n の個数は 個であり, $f(n) = 6$ を満たす n の個数は 個である.

(b) $f(n)$ の最大値は である. したがって, $f(f(n)) > 4$ を満たす最小の自然数は $n =$ となる.

(c) $f(n) = 2$ を満たす 100 以下の自然数 n の集合を A , 100 以下の素数の集合を B とすると,
 が成り立つ.

の解答群

- | | | |
|--|-------------------------------|---------------------|
| ① $A \in B$ | ② $B \in A$ | ③ $A = B$ |
| ④ $A \subset B$ かつ $A \neq B$ | ⑤ $B \subset A$ かつ $A \neq B$ | ⑥ $A \cap B = \phi$ |
| ⑦ $A \cap B \neq \phi$ かつ $A \neq A \cup B \neq B$ | | |

《約数の個数》

(a) $f(48)=f(2^4 \times 3)=5 \times 2=10 \rightarrow \text{アイ}$

$f(n)=9$ を満たす n は $2^2 \times 3^2=36$, $2^2 \times 5^2=100$ の 2 個あり, 最小の n は
 $n=36 \rightarrow \text{ウエ}$

$f(n)=5$ を満たす n は, $2^4=16$ と $3^4=81$ の 2 個である。 $\rightarrow \text{オ}$

$f(n)=6$ を満たす n は, 次の 16 個である。 $\rightarrow \text{カキ}$

$$2^5=32$$

$$2^2 \times 3=12 \quad 2^2 \times 5=20 \quad 2^2 \times 7=28$$

$$2^2 \times 11=44 \quad 2^2 \times 13=52 \quad 2^2 \times 17=68$$

$$2^2 \times 19=76 \quad 2^2 \times 23=92 \quad 3^2 \times 2=18$$

$$3^2 \times 5=45 \quad 3^2 \times 7=63 \quad 3^2 \times 11=99$$

$$5^2 \times 2=50 \quad 5^2 \times 3=75 \quad 7^2 \times 2=98$$

(b) $f(n)$ のとる値は ($1 \leq n \leq 100$)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12

の 11 通りであり, $f(n)$ の最大値は 12 $\rightarrow \text{クケ}$

また, これまでのことから, $f(1)=1$, $f(2)=f(3)=f(5)=f(7)=2$, $f(4)=f(9)=3$, $f(6)=f(8)=f(10)=4$, $f(12)=6$ であるから, $1 \leq n \leq 100$ を満たす自然数 n に対して, $f(f(n)) > 4$ となるのは $f(f(n))=6=f(12)$ となる場合である。

$f(n)=12$ を満たす n は

$$2^5 \times 3=96 \quad 2^3 \times 3^2=72 \quad 2^2 \times 3 \times 5=60$$

$$2^2 \times 3 \times 7=84 \quad 3^2 \times 2 \times 5=90$$

の 5 通りであり, $f(f(n)) > 4$ を満たす最小の n は $n=60 \rightarrow \text{コサ}$

(c) 約数を 2 つ持つという素数の定義と, $f(n)=2$ という条件は同値だから, $A=B$ が成り立つ。 $\rightarrow \text{シ}$