過去問めぐり 2007 聖マリアンナ医科大学

【問題】

[1] 以下の から の中に、解答群にある数字、文字、記号の中から最もふさわしいものを選択して、①から③に記入しなさい。なお、同じ数字、文字、記号を何回選んでもよい。

n を自然数として、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ の値を以下のように求める。

ⁿ < 2ⁿ + 3ⁿ < 2 × ⁿ だから、この各辺を $\frac{1}{n}$ 乗して、

< (2ⁿ + 3ⁿ) ^{$\frac{1}{n}$} < 2 ^{$\frac{1}{n}$} × となる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \times \text{}) = \text{}$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = \text{}$

(解答群)

0, 1, 2, 3, e , $2e$, $3e$, e^2 , e^3 , ∞

(e は自然対数の底を表す)

[2] $0 \leq a < b$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \text{}$

[3]

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2n} x + \sin^{2n} x)^{\frac{1}{n}}$ とおく。

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{}$ である。

[4] 前問[3]の $f(x)$ について、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を計算しなさい。なお、計算の過程も含めて記載しなさい。

【解答】 解答 ①3 ②3 ③3 ④b ⑤ $\frac{3}{4}$ ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ $\frac{3}{4}$

[1] $0 < 2^n < 3^n$ であるから $3^n < 2^n + 3^n < 2 \cdot 3^n$

各辺を $\frac{1}{n}$ 乗して $3 < (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \cdot 3) = 3$ であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$$

[2] [1] と同様に考えると

$0 < a^n < b^n$ より $b^n < a^n + b^n < b^n + b^n = 2b^n$

各辺を $\frac{1}{n}$ 乗して $b < (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \cdot b$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \cdot b) = b$ であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = b$$

[3] (i) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ のとき

$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ だから

$\cos x > \sin x > 0$ より

$$\cos^2 x - \sin^2 x > 0 \quad \therefore \cos^2 x > \sin^2 x$$

よって、 $a = \sin^2 x$, $b = \cos^2 x$ とおくと、[2] により

$$f(x) = \cos^2 x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$$

(ii) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

(i) と同様に考えると、 $\cos^2 x < \sin^2 x$ である。

$a = \cos^2 x$, $b = \sin^2 x$ とおくと、[2] により

$$f(x) = \sin^2 x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ のとき

$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ より

$$(\cos^{2n} x + \sin^{2n} x)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{ 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} [4] \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$