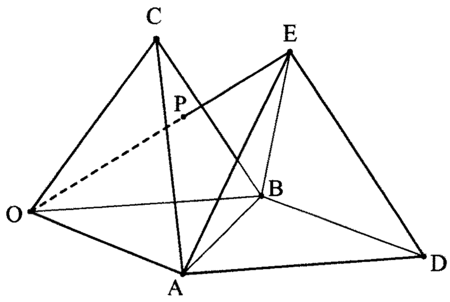
過去問めぐり｜金沢医の正四面体

【１】2021 金沢医科大学　後期医

図のような，1 辺の長さが 1 である 2 つの正四面体OABC， ABDE がある。ただし，4 点 O，A，B，D は同一平面上にある。線分OE と△ABCの交点を P，線分AE を2 : 1に内分する点を F，線分OF と△ABC の交点を Q とする。



(1)　$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{リ}}\,\overrightarrow{OC}}{\boxed{\text{ル}}}$，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}\overrightarrow{OE}$ である。

(2)　$\overrightarrow{OF}=\dfrac{\boxed{\text{ワ}}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{ヲ}}\,\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{あ}}\,\overrightarrow{OC}}{\boxed{\text{い}}}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{えお}}}\overrightarrow{OF}$ である。

(3)　線分PQ の長さは $\dfrac{\boxed{\text{か}}\sqrt{\boxed{\text{きく}}}}{\boxed{\text{けこ}}}$ である。

(4)　△PQF と△PEF の面積を最も簡単な整数比で表すと△PQF : △PEF = $\boxed{\text{さ}}$: $\boxed{\text{しす}}$ である。

【２】2019 金沢医科大学　後期医

図 1 のように，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{BOA}=60^\circ$ である平行四辺形OACBにおいて，OA の中点を M とし，BC の中点を N とする。NA と OC の交点を D とし，直線 BD と直線 AC の交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

次に，この平行四辺形を線分 BM，MN，NA で折り曲げて図 2 のような 1 辺の長さが 1 の正四面体を作る。ただし，2 点 A，O が重なった点を P とし，2 点 B，C が重なった点を Q とする。正四面体PQMN において，$\mathrm{MD}=\dfrac{\sqrt{\boxed{メ}}}{\boxed{モ}}$，$\cos\angle\mathrm{MDQ}=\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユヨ}}$ である。また，四面体MDQE の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ラ}}}{\boxed{リル}}$ であり，点 E から平面 MDQ に垂線 EH を下ろすとき，$\mathrm{EH}=\dfrac{\sqrt{\boxed{レロ}}}{\boxed{ワヲ}}$ である。

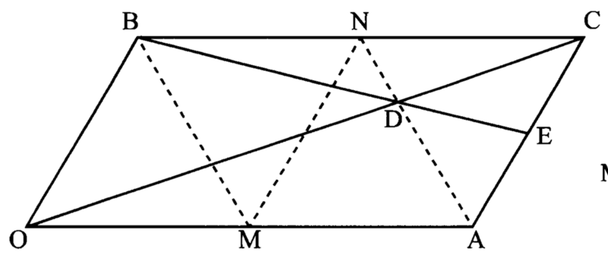


図 1

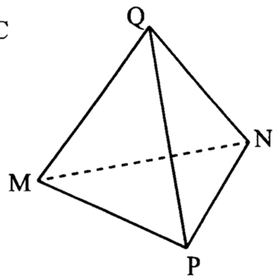


図 2

【１解答】

解答 (1)リ．3　ル．3　レ．3　ロ．5
(2)ワ．5　ヲ．2　あ．6　い．9　う．9　えお．13
(3)か．3　きく．13　けこ．65
(4)さ．6　しす．13

【１解説】

(1)　△OAB と △ABD の重心を G，G′ とすると

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{3}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$

$$=\frac{2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$$

点 C，E から △OAB，△ABD に下ろした垂線は G，G′ を通るので

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{GG'}$$

よって

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{GG'}$$

$$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{OG}$$

$$=\overrightarrow{OC}+\frac{2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3}$$　(→リ，ル)

点 P は直線 OE 上にあるから，k を実数とすると

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OE}$$

と表される。よって

$$\overrightarrow{OP}=k\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$$

また，点 P は △ABC 上にあるから

$$\frac{k}{3}+\frac{k}{3}+k=1$$

よって　　$k=\frac{3}{5}$

ゆえに

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OE}$$　(→レ，ロ)

(2)　点 F は AE を 2：1 に内分するので，(1)より

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$=\frac{5\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}}{9}$$　(→ワ～い)

点 Q は直線 OF 上にあるから，l を実数とすると

$$\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{OF}=l\cdot\frac{5\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}}{9}$$

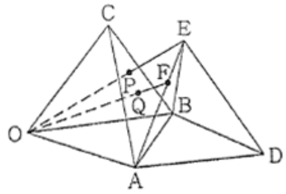
$$=\frac{5}{9}l\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}l\overrightarrow{OB}+\frac{6}{9}l\overrightarrow{OC}$$

また，点 Q は △ABC 上にあるから

$$\frac{5}{9}l+\frac{2}{9}l+\frac{6}{9}l=1$$

よって　　$l=\frac{9}{13}$

ゆえに



$$\overrightarrow{OQ}=\frac{9}{13}\overrightarrow{OF}$$　(→う〜お)

(3)　(1)，(2)より

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{9}{13}\overrightarrow{OF}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{9}{13}\cdot\frac{5\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}}{9}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$=\frac{12\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}-9\overrightarrow{OC}}{65}$$

$$=\frac{3}{65}(4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC})$$

また

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

であるから

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\frac{3}{65}\right)^2|4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}|^2$$

$$=\left(\frac{3}{65}\right)^2(16|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+9|\overrightarrow{OC}|^2$$

$$-8\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-24\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$$

$$=\left(\frac{3}{65}\right)^2\left(16\cdot 1+1+9\cdot 1-8\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{2}-24\cdot\frac{1}{2}\right)$$

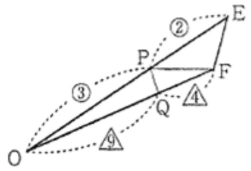
$$=\left(\frac{3}{65}\right)^2\cdot 13$$

したがって

$$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{3\sqrt{13}}{65}$$　(→か〜こ)

(4) (1), (2)より，OP：PE＝3：2，OQ：QF＝9：4

であるから，△OEF の面積を S とすると



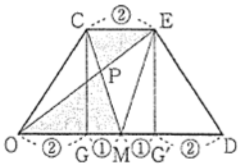
$$\triangle\text{PQF の面積}：S\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{13}=\frac{12}{65}S$$

$$\triangle\text{PEF の面積}：S\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}S$$

よって

$$\triangle\text{PQF}：\triangle\text{PEF}=\frac{12}{65}S：\frac{2}{5}S=6：13$$ （→さ～す）

別解 (1)　2つの正四面体の頂点 C，E から平面 OADB に下ろした垂線の足は，それぞれ △OAB，△ABD の重心である。これらを G，G′ とすると，$\overrightarrow{\text{CE}}=\overrightarrow{\text{GG}'}$ である。



AB の中点を M とすると，O，G，M，G′，D はこの順に一直線上にあり

OG：GM：MG′：G′D＝2：1：1：2

が成り立つから

$$\overrightarrow{\text{CE}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{OD}}=\frac{\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\text{OE}}=\overrightarrow{\text{OC}}+\overrightarrow{\text{CE}}=\overrightarrow{\text{OC}}+\frac{\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}}{3}$$

$$=\frac{\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}+3\overrightarrow{\text{OC}}}{3}$$

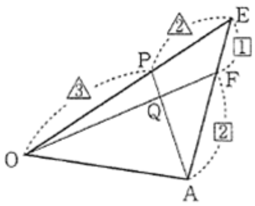
また，$\overrightarrow{\text{CE}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{OM}}$ であり，△OPM∽△EPC であるから

OP：EP＝OM：EC＝3：2

したがって

$$\overrightarrow{\text{OP}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\text{OE}}$$

(2) $$\overrightarrow{\text{OF}}=\frac{\overrightarrow{\text{OA}}+2\overrightarrow{\text{OE}}}{2+1}$$



$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{OA}}+\frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}+3\overrightarrow{\text{OC}}}{3}\right)$$

$$=\frac{5\overrightarrow{\text{OA}}+2\overrightarrow{\text{OB}}+6\overrightarrow{\text{OC}}}{9}$$

ここで，Q は平面 OAE 上の点であるから，(1)の結果を用いれば，△OEF と直線 AP についてメネラウスの定理より

$$\frac{\text{EA}}{\text{AF}}\times\frac{\text{FQ}}{\text{QO}}\times\frac{\text{OP}}{\text{PE}}=1$$

$$\frac{3}{2}\times\frac{\text{FQ}}{\text{QO}}\times\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{\text{FQ}}{\text{QO}}=\frac{4}{9}$$

すなわち

OF：OQ＝13：9

$$\overrightarrow{\text{OQ}}=\frac{9}{13}\overrightarrow{\text{OF}}$$

【２解答】

解答 フ．2　ヘ．3　ホ．2　マ．3　ミ．1　ム．2
メ．7　モ．3　ヤ．5　ユヨ．14　ラ．2　リル．36
レロ．38　ワヲ．19

【２解説】

AD：DN＝s：$(1-s)$（s は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots①$$

また，O，D，C は一直線上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$\left(1-\frac{1}{2}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でないから，$1-\frac{1}{2}s=k$ かつ $s=k$ より

$$s=k=\frac{2}{3}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（→フ～マ）

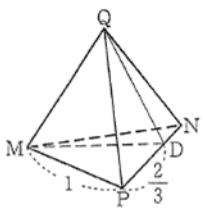
また，△ODB と △CDE において，∠BOD＝∠ECD，∠ODB＝∠CDE から

△ODB∽△CDE

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，△ODB と △CDE の相似比は 2：1 である。

よって，EC＝$\frac{1}{2}$OB より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（→ミ，ム）

次に，正四面体 PQMN の △PMD について，PM＝1，PD＝AD＝$\frac{2}{3}$，∠DPM＝60° であるから，余弦定理より



$$\mathrm{MD}^2=1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot\cos60^\circ$$

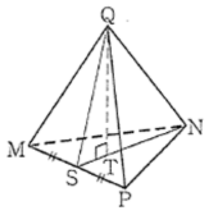
$$=1+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$$

MD＞0 より　$\mathrm{MD}=\frac{\sqrt{7}}{3}$　（→メ，モ）

また，△MDQ について，MD＝QD＝$\frac{\sqrt{7}}{3}$，QM＝1 であるから，余弦定理より

$$\cos\angle \mathrm{MDQ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{5}{14} \quad (\to ヤ～ヨ)$$

正四面体 PQMN の体積について，PM の中点を S，Q から平面 PMN に下ろした垂線と平面の交点を T とする。△PQM は正三角形より



$$\mathrm{QS} = \mathrm{QM}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

同様に，△PMN も正三角形より　$\mathrm{NS} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

また，T は △PMN の重心であるから

$$\mathrm{TS} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

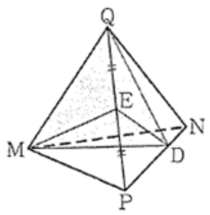
△QST について，三平方の定理より

$$\mathrm{QT} = \sqrt{\mathrm{QS}^2 - \mathrm{TS}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって，正四面体 PQMN の体積は

$$\frac{1}{3} \times (\triangle \mathrm{PMN}\ の面積) \times \mathrm{QT} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60°\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

また，四面体 PQMD の体積は正四面体 PQMN の体積の $\frac{2}{3}$ 倍であるから



$$\frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

また，QP の中点が E であるから，四面体 MDQE の体積は，四面体 PQMD の体積の $\frac{1}{2}$ 倍で

$$\frac{\sqrt{2}}{18} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{36} \quad (\to ラ～ル)$$

次に，$\sin\angle \mathrm{MDQ} > 0$ より

$$\sin\angle \mathrm{MDQ} = \sqrt{1 - \cos^2\angle \mathrm{MDQ}} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{19}}{14}$$

であるから，△MDQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{MD}\cdot \mathrm{QD}\cdot \sin\angle \mathrm{MDQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{19}}{14} = \frac{\sqrt{19}}{12}$$

よって，四面体 MDQE の体積と，△MDQ の面積から，EH の長さについて

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{19}}{12}\cdot \mathrm{EH} = \frac{\sqrt{2}}{36} \quad より \quad \mathrm{EH} = \frac{\sqrt{38}}{19} \quad (\to レ～ヲ)$$