ネタバレ・楕円⇔円変換が使えます

【１】2018 日本大学・医 第３問

楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を点 P は動くとする。また，2 点 $A\left(-1,\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$，$B(0,\ -2\sqrt{2})$ をとる。このとき，以下の問いに答えなさい。

(1)　3 点 A，B，P を順に線分で結んでできる三角形ABP の面積が最大値をとるのは点 P の座標が $\left(\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}},\ \dfrac{\boxed{38}}{\boxed{39}}\sqrt{\boxed{40}}\right)$ のときであり，そのときの三角形ABP の面積は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\sqrt{\boxed{43}}$ である。

(2)　点 B を通り，第 4 象限で楕円に接する直線の方程式は $y=\boxed{44}x-\boxed{45}\sqrt{\boxed{46}}$ であり，接点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{47}}}{\boxed{48}},\ -\sqrt{\boxed{49}}\right)$ である。

(3)　点 P が楕円上を 1 周するとき，三角形ABP の周および内部が通る領域の面積は $\dfrac{\boxed{50}\sqrt{\boxed{51}}+\boxed{52}+\boxed{53}\pi}{\boxed{54}}$ である。

3 **解答** (1) 36－1　37－3　38－4　39－3　40－2　41－7　42－4　43－2

(2) 44－2　45－2　46－2　47－2　48－2　49－2

(3) 50－7　51－2　52－4　53－5　54－4

(1)　P$(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，三角形 ABP の面積を $S(\theta)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(-1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\cos\theta,\ 2\sin\theta+2\sqrt{2})$$

なので

$$S(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left|(-1)\cdot(2\sin\theta+2\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right|$$

$$=\frac{1}{4}|4\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta+4\sqrt{2}|$$

$$=\frac{1}{4}|3\sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)+4\sqrt{2}|$$

$\left(\text{ただし，}\alpha\text{ は }\sin\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}\text{ をみたす角}\right)$

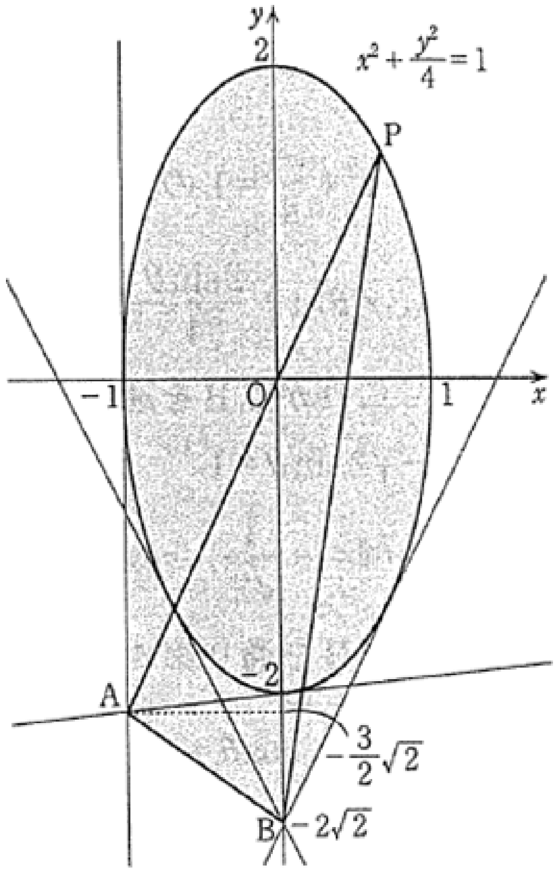

図 1

よって，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ なので，$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき，$S(\theta)$ は最大

値$\frac{1}{4}|3\sqrt{2}+4\sqrt{2}|=\frac{7}{4}\sqrt{2}$をとる。 →41～43

またこのとき，$\sin(\theta+\alpha)=1$より，$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}+2n\pi$（$n$は整数）と表せ

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi-\alpha\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\sin\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi-\alpha\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，点Pの座標は$\left(\frac{1}{3},\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$である。 →36～40

(2) 楕円$x^2+\frac{y^2}{4}=1$の点Pにおける接線の方程式は

$$(\cos\theta)x+\frac{2\sin\theta}{4}y=1 \Longleftrightarrow 2(\cos\theta)x+(\sin\theta)y-2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

と表せ，これが点Bを通るとき

$$-\sqrt{2}\sin\theta=1$$

$$\therefore\quad \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，点Bを通り第4象限で楕円に接する直線の方程式は，

$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$の場合で

$$\frac{2}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-2=0 \qquad \therefore\quad y=2x-2\sqrt{2}$$ →44～46

またこのときの接点の座標は，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right)$である。

→47～49

(3)　点Pが楕円上を1周するとき，三角形ABPの周および内部が通る領域は図1の網かけ部分（境界も含む）であり，図1を y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍した図（図2）を考えると，図2の網かけ部分（境界も含む）の面積は，台形OCA′B′，三角形OB′D，扇形OCD（ただし面積のより大きい方）の面積の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot\pi\cdot\frac{5}{8}$$

$$=\frac{7}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\pi$$

よって，図1の網かけ部分（境界も含む）の面積は

$$\left(\frac{7}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\pi\right)\times 2=\frac{7\sqrt{2}+4+5\pi}{4}$$

→50〜54

である。

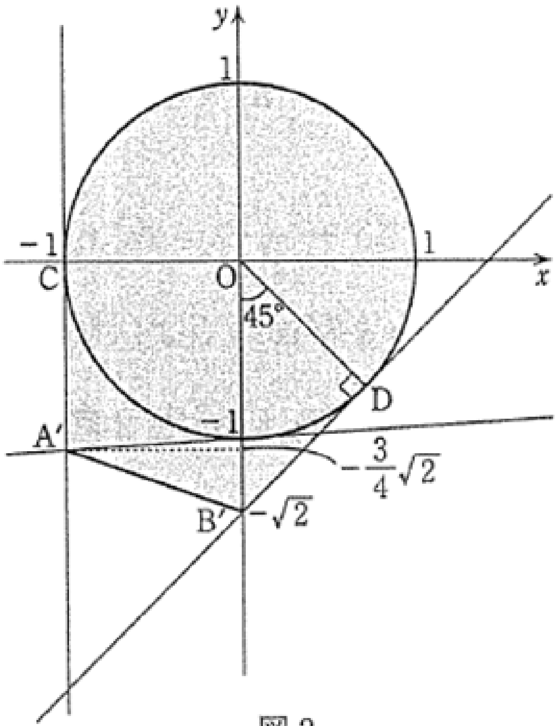

図2