

【1】2008 埼玉医科大学

△ABC の各頂点 A, B, C から対辺に引いた垂線の長さがそれぞれ 2, 3, 4 であるとき,

$$\cos \angle ACB = \frac{\boxed{(1)(2)}}{\boxed{(3)(4)}}$$

である。

【2】2007 埼玉医科大学

方程式

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)(\sqrt{2} + 1)^x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2} - 1)^x = \sqrt{2} - 1$$

の解は $x = \boxed{10}$ である。

【3】2006 埼玉医科大学

問A ベクトル $(0, 0, 1)$, $(4, 0, 3)$, $(2, 2, 1)$ のいずれとも等しい角をなすベクトルがある。この角

を θ とすると $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{\boxed{(1)}}}{\boxed{(2)}}$ である。

問B $a^2 < b < a < 1$ のとき,

$$0, \frac{1}{2}, 1, \log_a b, \log_b a, \log_a \frac{a}{b}, \log_b \frac{b}{a}$$

を大きさの順に並べると, $\log_b \frac{b}{a}$ は $\boxed{(3)}$ 番目に小さく, 1 は $\boxed{(4)}$ 番目に小さい。

問C 1 から 8 までの 8 個の異なる自然数を 2 つのグループに分け, 各々のグループに属する数の総和をそれぞれ S_1 , S_2 とする。このとき, 積 $S_1 S_2$ の最大値は $\boxed{(5)(6)(7)}$ である。

問D x の 2 次方程式 $x^2 + 4kx - 5k + 1 = 0$ は異符号の整数解をもつ。ここで k は整数である。このとき $k = \boxed{(8)}$ であり, 2 次方程式の解は $-\boxed{(9)}$ と $\boxed{(10)}$ である。

【4】2005 埼玉医科大学

問A $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ のとき,

$$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 20 = \boxed{\text{ (1) }}$$

である。

問B $\tan \theta = 2$ のとき,

$$\frac{6 \sin 2\theta + 5 \cos 2\theta}{5 \sin 2\theta + 4 \cos 2\theta} = \frac{\boxed{\text{ (3) }}}{\boxed{\text{ (4) }}}$$

である。

【5】2001 埼玉医科大学 3/4, 1次試験, 地方 医学部

(1) 3時と4時の間で、短針と長針のなす角が 100° に最も近くなるのは $\boxed{\text{ア}}$ 分のときである(整数値を記入すること)。

(2) 1辺の長さが1の正四面体の体積は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) 立方体の積み木を縦横 51×51 個敷きつめ、その上に縦横 49×49 個の積み木を重ねる。重ねる積み木が1個になるまでこの操作を繰り返してピラミッドの模型を作るとき、必要な積み木の本数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個である。

(4) $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ とする。いま t を任意の実数とすると, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ であり, そのときの t の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(5) x, y, z, u, v の5個の文字からなる, 係数が1の3次の単項式は $\boxed{\text{カ}}$ 種類ある。

【1】

問2 $\triangle ABC$ の各頂点に向き合う辺の長さを a, b, c , 面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} a \cdot 2 = \frac{1}{2} b \cdot 3 = \frac{1}{2} c \cdot 4$$

よって $a=S, b=\frac{2}{3}S, c=\frac{1}{2}S$

これより $a=6k, b=4k, c=3k$ (k は実数)

とおけるから、余弦定理より

$$\cos \angle ACB = \frac{(6k)^2 + (4k)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 6k \cdot 4k} = \frac{43}{48} \quad (\leftarrow ④ \sim ⑦)$$

【2】

(3) 与式を変形して

$$(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^x - (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^x \\ = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$(\sqrt{2}+1)^x - (\sqrt{2}+1)^3(\sqrt{2}-1)^x = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

$(\sqrt{2}+1)^x = A$ (>0) とおくと、 $(\sqrt{2}-1)^x = A^{-1}$ だから

$$A - (\sqrt{2}+1)^3 A^{-1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\therefore A^2 - (2 + \sqrt{2})A - (\sqrt{2}+1)^3 = 0$$

$$\{A - (\sqrt{2}+1)^3\} \{A + (\sqrt{2}+1)\} = 0$$

$$\therefore A = (\sqrt{2}+1)^x = (\sqrt{2}+1)^2 (>0)$$

よって $x=2$

【3】

① [答] ① 6 ② 3 ③ 3 ④ 6

⑤⑥⑦ 324 ⑧ 2 ⑨ 9 ⑩ 1

[解 説] (1) 原点を O , $A(0, 0, 1)$, $B(4, 0, 3)$, $C(2, 2, 1)$ として、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ のいずれにも等しい角 θ をなすベクトルを $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ とおく。
 $|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=5, |\overrightarrow{OC}|=3$ だから

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{z}{|\overrightarrow{OP}|} \quad \dots\dots\dots ①$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{4x+3z}{5|\overrightarrow{OP}|} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$= \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{2x+2y+z}{3|\overrightarrow{OP}|} \quad \dots\dots\dots ③$$

①, ②から $5z=4x+3z \quad z=2x \quad \dots\dots\dots ④$

①, ③から $3z=2x+2y+z$

整理して $z=x+y$

ここに④を代入して $z=2y \quad \dots\dots\dots ⑤$

④, ⑤を①に代入すると

$$|\cos \theta| = \frac{|z|}{\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + z^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) $a^2 < b < a < 1$

だから底を a とする辺々の対数をとると

$$\log_a a^2 > \log_a b > \log_a a > \log_a 1$$

整理して $1 < \log_a b < 2 \quad \dots\dots\dots ①$

この結果を用いて

$$\frac{1}{2} < \log_b a = \frac{1}{\log_a b} < 1 \quad \dots\dots\dots ②$$

また $\log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b$

よって $-1 < \log_a \frac{a}{b} < 0 \quad \dots\dots\dots ③$

さらに $\log_b \frac{b}{a} = \log_b b - \log_b a = 1 - \log_b a$

よって $0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ④$

①, ②, ③, ④から

$$\log_a \frac{a}{b} < 0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < 1 < \log_a b$$

したがって、7つの数のうち $\log_b \frac{b}{a}$ は3番目に小さく、1は6番目に小さい。

(3) n を自然数とする。いくつかの自然数の和が $2n$ のとき、自然数を2つのグループに分ける。2つのグループの和がともに n のとき、この2つのグループの積 n^2 が最大となる。それは k を0でない整数として

$$n^2 > (n+k)(n-k) = n^2 - k^2$$

が成り立つからである。この問題では

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

だから

$$S_1=1+2+7+8=18, S_2=3+4+5+6=18$$

とおくことによって、積 $S_1 S_2$ の最大値は

$$18 \times 18 = 324$$

(4) $x^2 + 4kx - 5k + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots ①$

から $x^2 + 1 = k(5 - 4x)$

①が異符号の整数解をもつとき、

2つのグラフ $y = x^2 + 1$ と

$y = k(5 - 4x)$ が x 座標が正の部分と負の部分で共有点をもつ

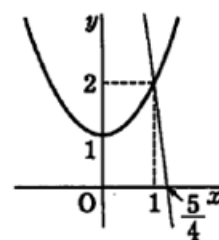
て x 座標が整数になるときである。それは直線のグラフが点 $(1, 2)$ を通るときに限られるから、 $x=1$ を①に代入して

$$1 + 4k - 5k + 1 = 0 \quad \text{から} \quad k=2$$

この値を①に代入して

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \quad (x+9)(x-1) = 0$$

から、2次方程式の解は $x = -9, 1$



【4】

解説 (1) $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$

だから

$$(x-3)^2 = (-2\sqrt{2})^2, \quad x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\therefore x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 20$$

$$= (x^2 - 6x + 1)(x^2 - 6x + 17) + 3 = 3$$

(3) $\tan \theta = 2$ のとき

$$\frac{6\sin 2\theta + 5\cos 2\theta}{5\sin 2\theta + 4\cos 2\theta}$$

$$= \frac{12\sin \theta \cos \theta + 5(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{10\sin \theta \cos \theta + 4(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}$$

$$= \frac{12\tan \theta + 5(1 - \tan^2 \theta)}{10\tan \theta + 4(1 - \tan^2 \theta)} = \frac{12 \cdot 2 + 5(1 - 2^2)}{10 \cdot 2 + 4(1 - 2^2)} = \frac{9}{8}$$

別解 $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}$

を与式 $= \frac{6\tan 2\theta + 5}{5\tan 2\theta + 4}$ に代入する方法もある。

【5】

① [答] ア 35 イ $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ウ 23426 エ $\sqrt{5}$

オ -1 カ 35

解説 (1) 3時と4時の間で、短針と長針のなす角が 100° になる時刻を3時 x 分とすると、次の方程式が成り立つ。

$$6x = 90 + \frac{1}{2}x + 100 \iff \frac{11}{2}x = 190 \iff x = 34\frac{6}{11}$$

これに最も近い整数は 35

(2) 1辺の長さが1の正四面体の底面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 、高さは

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ であるから、体積は } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$(3) 51^2 + 49^2 + \dots + 1^2 = \sum_{k=1}^{26} (2k-1)^2$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{26} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{26} k + 26$$

$$= 4 \times \frac{26 \times 27 \times 53}{6} - 4 \times \frac{26 \times 27}{2} + 26 = 23426$$

(4) $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ のとき、

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 10 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5 = 25$$

となるから $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ 、このとき

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 5t^2 + 10t + 10$$

$$= 5(t+1)^2 + 5$$

は $t = -1$ のとき最小値 5 をとる。よって $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値は $\sqrt{5}$ 、そのときの t の値は -1

$$(5) {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$