

## 【 1 】 2009 東京医科大学 2/7, 第 1 次 医

不等式

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{100}$$

をみたす正の整数  $n$  の最大値は アイウエ である。

## 【 4 】 2009 東京医科大学 2/7, 第 1 次 医

 $f(x) = \frac{|\sin 2x|}{5 - \sin x}$  とし、関数  $g(x)$  は次の条件(a)をみたすとする。(a) 関数  $g(x)$  は奇関数であり、かつ  $h(x) = f(x) - g(x)$  とおけば関数  $h(x)$  は偶関数である。

このとき、

$$(1) \quad g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}},$$

$$(2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) dx = 5 \log \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{キ}}$$

である。ただし、対数は自然対数とする。

(1)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  とおく。

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  より,  $a_n > \frac{1}{100}$  は  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 100$  と同値である。

$\sqrt{n} = 50$  の近辺の数値で考えると

$n = 2499$  のとき

$$\sqrt{2500} + \sqrt{2499} < 50 + 50 = 100$$

よって  $a_{2499} > \frac{1}{100}$

$n = 2500$  のとき

$$\sqrt{2501} + \sqrt{2500} > 50 + 50 = 100$$

よって  $a_{2500} < \frac{1}{100}$

数列  $\{a_n\}$  は単調減少であるから,  $a_n > \frac{1}{100}$  をみたす正の整数  $n$  の最大値は 2499 である。

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

両辺の  $x$  を  $-x$  に入れ替えると

$$h(-x) = f(-x) - g(-x)$$

ここで、 $g(x)$  は奇関数、 $h(x)$  は偶関数より

$$g(-x) = -g(x), \quad h(-x) = h(x)$$

であるから

$$h(x) = f(-x) + g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(1)  $\textcircled{3}$  に  $x = \frac{\pi}{3}$  を代入して

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left| \sin \frac{2\pi}{3} \right|}{5 - \sin \frac{\pi}{3}} - \frac{\left| \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right|}{5 - \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{10 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{10 + \sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}(10 + \sqrt{3} - 10 + \sqrt{3})}{(10 - \sqrt{3})(10 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{97} = \frac{3}{97} \end{aligned}$$

(2)  $\textcircled{3}$  より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{|\sin 2x|}{5 - \sin x} - \frac{|\sin(-2x)|}{5 - \sin(-x)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{\sin 2x}{5 - \sin x} - \frac{\sin 2x}{5 + \sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{\sin x}{5 - \sin x} - \frac{\sin x}{5 + \sin x} \right) \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{t}{5 - t} - \frac{t}{5 + t} \right) dt \quad (t = \sin x \text{ とおいた}) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{5}{5 - t} + \frac{5}{5 + t} - 2 \right) dt \\ &= \left[ -5 \log(5 - t) + 5 \log(5 + t) - 2t \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -5 \log \frac{9}{2} + 5 \log \frac{11}{2} - 1 + 5 \log 5 - 5 \log 5 \\ &= 5 \log \frac{11}{9} - 1 \end{aligned}$$