■◇◇ 北里大学 ◇◇■

◇医〈1次〉◇

〔試験日〕 1月24日 〔時間〕 80分 〔入試科目〕 数I・II・III・A・B(列ベ)ただし，数Iはデを除く．

1 次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答を求めよ．

(1) 1辺の長さが4の正四面体ABCDにおいて，辺BCの中点をEとおく．動点Pは $\mathrm{PE} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AE}$ を満たしながら△AEDの内部および周上を動くものとし，$\angle\mathrm{PED} = \theta$ とおく．このとき $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \boxed{\text{ア}}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を θ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}} = \boxed{\text{イ}}$ であり，その最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}}$ が最大となるときの点Pと平面ACDの距離は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) i を虚数単位とし，$z_1 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^{17}}{(1+i)^{19}(1-\sqrt{3}i)^7}$，$z_2 = -1+i$ とする．z_1 の偏角 θ のうち $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすものは $\theta = \boxed{\text{オ}}$ であり，$|z_1| = \boxed{\text{カ}}$ である．複素数平面上で z_1，z_2 を表す点をそれぞれA，Bとする．このとき線分ABを1辺とする正三角形ABCの，頂点Cを表す複素数の実部は0または $\boxed{\text{キ}}$ である．

a，b を正の整数とし，複素数 $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^7}{(1+i)^a(1-\sqrt{3}i)^b}$ の偏角の1つが $\dfrac{\pi}{12}$ であるとき，$a+b$ の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $f(\theta) = 2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

$g(x,\ y) = \dfrac{2\sqrt{3}\,xy + 2x^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1}$ について考える．a を正の定数とし，点 $(x,\ y)$ が円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上を動くとき，$g(x,\ y)$ の最大値は a を用いて $\boxed{\text{コ}}$ と表される．また，点 $(x,\ y)$ が xy 平面全体を動くとき，$g(x,\ y)$ の最大値は $\boxed{\text{サ}}$ である．

(4) 関数 $f(x)$ は微分可能であり，すべての実数 x について $f(x) = e^{2x+1} + 4\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を満たすとする．関数 $g(x)$ を $g(x) = e^{-4x}f(x)$ により定めるとき，$g'(x) = \boxed{\text{シ}}$ であり，$f(x) = \boxed{\text{ス}}$ である．また，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は $\boxed{\text{セ}}$ である．

2 n を正の整数とし，1，2，3，4，5，6の6個の数字から同じ数字をくり返し用いることを許して n 桁の整数をつくる．このような整数のうち，1が奇数個用いられるものの総数を A_n，それ以外のものの総数を B_n とする．また，1と6がいずれも奇数個用いられるものの総数を C_n とする．次の問に答えよ．

(1) A_4 を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，A_{n+1} を A_n と B_n を用いて表せ．

(3) 正の整数 n に対して，A_n と B_n を求めよ．

(4) p を定数とする．$X_1 = p$，$X_{n+1} = 2X_n + 6^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列を $\{X_n\}$ とする．正の整数 n に対して，X_n を n と p を用いて表せ．

(5) 正の整数 n に対して，C_n を求めよ．

3 関数 $f(x) = x^5 - 2x^3 + 9x$ について考える．実数 t に対して，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線と x 軸の交点の x 座標を $g(t)$ とおく．また，正の実数 t に対して $h(t) = \dfrac{g(t)}{t}$ とおく．次の問に答えよ．

(1) $g(t)$ を求めよ．

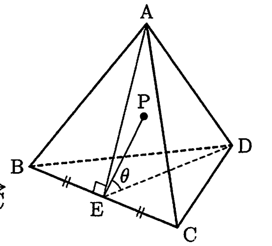
(2) $h'(t) = 0$ を満たす正の実数 t を求めよ．

(3) 実数 p は，すべての正の実数 t に対して $|h(t)| \leqq p$ を満たすとする．このような p の最小値を求めよ．

(4) a を定数とする．$a_1 = a$，$a_{n+1} = g(a_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ．

1 (1) $\boxed{\text{B}}$ (ベクトルと図形 (空間))

$\boxed{\text{解 答}}$ $\mathrm{AE}=\sqrt{3}\,\mathrm{BE}=2\sqrt{3}$ より，$\mathrm{PE}=\sqrt{3}$ である．
また，平面 AED と直線 BC は垂直なので

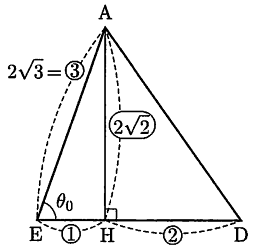


$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$
$$=(\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PE}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$$
$$=3+0+0+2\cdot 2\cos\pi$$
$$=\mathbf{-1}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PE}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}$$
$$=3-\overrightarrow{\mathrm{EP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}+0+0$$
$$=3-\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=\mathbf{3-6\cos\theta}$$

ここで，頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とする．H は △BCD の重心である．よって，$\angle\mathrm{AED}=\theta_0$ とすると $\cos\theta_0=\dfrac{1}{3}$ である．



$0\leqq\theta\leqq\theta_0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ は $\theta=\theta_0$ のとき最大値 $3-6\cos\theta_0=\mathbf{1}$ をとる．
このとき，点 P は線分 AE の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって，頂点 B から平面 ACD へ下ろした垂線を BJ とすると，求める距離は

$$\frac{1}{4}\mathrm{BJ}=\frac{1}{4}\mathrm{AH}=\frac{1}{4}\times 2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}$$

(2) $\boxed{\text{III}}$ $\boxed{\text{A}}$ (ド・モアブルの定理，除法の性質と整数の分類)

$\boxed{\text{解 答}}$ ド・モアブルの定理より

$$(\sqrt{3}+i)^{17}=2^{17}\left(\cos\frac{17}{6}\pi+i\sin\frac{17}{6}\pi\right)$$
$$(1+i)^{19}=(\sqrt{2})^{19}\left(\cos\frac{19}{4}\pi+i\sin\frac{19}{4}\pi\right)$$
$$(1-\sqrt{3}i)^7=2^7\left\{\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)\right\}$$

だから

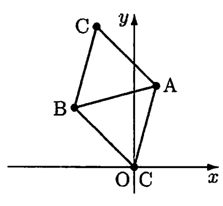
$$\theta=\frac{17}{6}\pi-\frac{19}{4}\pi+\frac{7}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}$$
$$|z_1|=\frac{2^{17}}{(\sqrt{2})^{19}\cdot 2^7}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

また，

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

だから

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{2},$$
$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{4}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{3}$$



より △OAB は正三角形である．よって，頂点 C のひとつは原点 O であり，もうひとつの頂点 C を表す複素数は z_1+z_2 なので，その実部は

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-3}{2}}$$

次に，$z_3=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^7}{(1+i)^a(1-\sqrt{3}i)^b}$ とおくと

$$\arg z_3=\frac{7}{6}\pi-\frac{a}{4}\pi-\left(-\frac{b}{3}\pi\right)$$
$$=\frac{14-3a+4b}{12}\pi$$

よって，z_3 の偏角のひとつが $\dfrac{\pi}{12}$ である条件は

$$\frac{14-3a+4b}{12}\pi=\frac{\pi}{12}+2n\pi$$
$$\therefore\ 13-3a+4b=24n \qquad\cdots\cdots①$$

を満たす整数 n が存在することである．① は

$$a=4(a-b+6n-4)+3$$

と変形できるので，a は 4 で割って 3 余る整数である．
$a=3$ のとき，① は $b=6n-1$ となるので，条件を満たす最小の b は $b=5$ であり，このとき $a+b=8$ である．$a=7$ のとき，① は $b=6n+2$ となるので，条件を満たす最小の b は $b=2$ であり，このとき $a+b=9$ である．次に小さい a は $a=11$ であるが，このとき $a+b\geqq 12$ である．以上より，z_3 の偏角のひとつが $\dfrac{\pi}{12}$ であるとき，$a+b$ の最小値は **8** である．

(3) $\boxed{\text{II}}$ (三角関数のグラフと最大・最小)

$\boxed{\text{解 答}}$ $f(\theta)=2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$

$$=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$$
$$=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta+1$$
$$=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$f(\theta)$ の最大値は **3** である．
点 $(x,\ y)$ が円 $x^2+y^2=a^2$ 上を動くとき

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

と表せる．このとき

$$g(x,\ y)=\frac{2x(\sqrt{3}y+x)}{(x^2+y^2)^2+1}=\frac{a^2f(\theta)}{a^4+1}$$

より，$g(x,\ y)$ が最大となるのは $f(\theta)$ が最大のときだから $g(x,\ y)$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3a^2}{a^4+1}}$ である．
さらに a を正の範囲で動かせば点 $(x,\ y)$ は原点を除くすべての点を動くことになる．
相加平均と相乗平均の不等式より

$$\frac{3a^2}{a^4+1}=\frac{3}{a^2+\dfrac{1}{a^2}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{1}{a^2}}}=\frac{3}{2}$$

等号は $a=1$ のときに成り立つ．また，$g(0,\ 0)=0$ であるから，点 $(x,\ y)$ が xy 平面全体を動くとき，$g(x,\ y)$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ である．

(4) $\boxed{\text{III}}$ (積分を含む等式，体積)

解答 $f(x)=e^{2x+1}+4\int_0^x f(t)\,dt$ ……①

の両辺を微分して

$$f'(x)=2e^{2x+1}+4f(x) \quad \cdots\cdots②$$

を得る．また，

$$g(x)=e^{-4x}f(x) \quad \cdots\cdots③$$

の両辺を微分して

$$g'(x)=-4e^{-4x}f(x)+e^{-4x}f'(x)$$
$$=e^{-4x}\left\{f'(x)-4f(x)\right\}$$

② より

$$g'(x)=e^{-4x}\cdot 2e^{2x+1}=\mathbf{2e^{-2x+1}}$$

である．よって，C を定数として

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=-e^{-2x+1}+C \quad \cdots\cdots④$$

と表せる．①，③ において $x=0$ とすると

$$f(0)=e$$
$$g(0)=f(0)=e$$

である．一方，④ より $g(0)=-e+C$ であるから

$$-e+C=e$$
$$\therefore\ C=2e$$

したがって

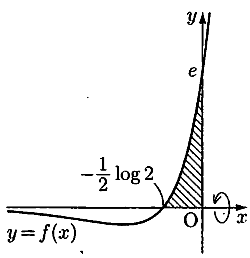
$$g(x)=-e^{-2x+1}+2e=e(2-e^{-2x})$$
$$f(x)=e^{4x}g(x)=\mathbf{e^{4x+1}(2-e^{-2x})}$$

である．

$f(x)=0$ とすると

$$e^{-2x}=2$$
$$\therefore\ x=-\frac{1}{2}\log 2$$

より，$y=f(x)$ と x 軸との交点は $\left(-\frac{1}{2}\log 2,\ 0\right)$ である．



また，y 軸との交点は $(0,\ e)$ である．したがって，求める回転体の体積を V とすると

$$V=\int_{-\frac{1}{2}\log 2}^{0}\pi\left\{f(x)\right\}^2dx$$
$$=\pi\int_{-\frac{1}{2}\log 2}^{0}e^{8x+2}(2-e^{-2x})^2\,dx$$
$$=\pi\int_{-\frac{1}{2}\log 2}^{0}(4e^{8x+2}-4e^{6x+2}+e^{4x+2})\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{8x+2}-\frac{2}{3}e^{6x+2}+\frac{1}{4}e^{4x+2}\right]_{-\frac{1}{2}\log 2}^{0}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{2}{3}e^2+\frac{1}{4}e^2\right)$$
$$\quad -e^2\pi\left(\frac{1}{2}e^{-4\log 2}-\frac{2}{3}e^{-3\log 2}+\frac{1}{4}e^{-2\log 2}\right)$$
$$=\frac{e^2\pi}{12}-e^2\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)$$
$$=\mathbf{\frac{7e^2\pi}{96}}$$

2 $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{A}}$ (漸化式，場合の数)

解答 (1) 1 をちょうど 1 個使うものは，どの位に 1 を使うかで 4 通り，残りの 3 つの位には 1 以外の 5 通りが入るので $4\times 5^3=500$ 通りある．1 をちょうど 3 個使うものは，どの位に使うかで ${}_4C_3$ 通り，残り 1 つの位には 1 以外の 5 通りが入るので ${}_4C_3\times 5=20$ 通りある．よって

$$A_4=500+20=\mathbf{520}$$

(2) 題意の n 桁の整数で数字 k が奇数個用いられているもの全体を O_k で表す．n 桁の整数の左端（最高位）に 1 から 6 のいずれかをおいて $n+1$ 桁の整数を作ることにする．$n+1$ 桁の整数に 1 が奇数個用いられるのは，次の 2 つのいずれかの場合である．

- n 桁の整数が O_1 に属し，$n+1$ 桁目が 1 以外
- n 桁の整数が O_1 に属さず，$n+1$ 桁目が 1

したがって

$$\mathbf{A_{n+1}=5A_n+B_n} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

(3) $A_n+B_n=6^n$ であるから，① から B_n を消去すると

$$A_{n+1}=5A_n+(6^n-A_n)=4A_n+6^n$$
$$\frac{A_{n+1}}{6^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{A_n}{6^n}+\frac{1}{6}$$
$$\frac{A_{n+1}}{6^{n+1}}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(\frac{A_n}{6^n}-\frac{1}{2}\right)$$

$A_1=1$ より，数列 $\left\{\frac{A_n}{6^n}-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$\frac{A_n}{6^n}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ A_n=\mathbf{3\cdot 6^{n-1}-2\cdot 4^{n-1}}$$

また

$$B_n=6^n-A_n=\mathbf{3\cdot 6^{n-1}+2\cdot 4^{n-1}}$$

(4) $X_{n+1}=2X_n+6^n$ を変形すると

$$\frac{X_{n+1}}{6^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{X_n}{6^n}+\frac{1}{6}$$
$$\frac{X_{n+1}}{6^{n+1}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(\frac{X_n}{6^n}-\frac{1}{4}\right)$$

よって，数列 $\left\{\frac{X_n}{6^n}-\frac{1}{4}\right\}$ は初項 $\frac{p}{6}-\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\frac{X_n}{6^n}-\frac{1}{4}=\left(\frac{p}{6}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ X_n=\mathbf{\frac{6^n+(2p-3)\cdot 2^n}{4}}$$

(5) $n+1$ 桁の整数に 1 と 6 がいずれも奇数個用いられるのは，次の 3 つのいずれかの場合である．

- n 桁の整数が $O_1\cap O_6$ に属し，$n+1$ 桁目が 1，6 以外
- n 桁の整数が $O_1\cap\overline{O_6}$ に属し，$n+1$ 桁目が 6
- n 桁の整数が $\overline{O_1}\cap O_6$ に属し，$n+1$ 桁目が 1

したがって，n 桁の整数で $\overline{O_1}\cap\overline{O_6}$ に属するものの個数を D_n とすれば

$$C_{n+1}=4C_n+(6^n-C_n-D_n) \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．
同様に D_n についても漸化式を立てると

$$D_{n+1}=4D_n+(6^n-C_n-D_n) \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．
② − ③ より

$$C_{n+1}-D_{n+1}=4(C_n-D_n)$$

$C_1=0$，$D_1=4$ より，数列 $\{C_n-D_n\}$ は初項 -4，公比 4 の等比数列であるから

$$C_n-D_n=-4^n \quad \cdots\cdots ④$$

② + ③ より，

$$C_{n+1}+D_{n+1}=2(C_n+D_n)+2\cdot 6^n$$

$$\frac{C_{n+1}+D_{n+1}}{2}=2\cdot\frac{C_n+D_n}{2}+6^n$$

よって，(4) において $X_n=\dfrac{C_n+D_n}{2}$ とすれば，$X_1=2$ より

$$\frac{C_n+D_n}{2}=\frac{6^n+2^n}{4} \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ より

$$\boldsymbol{C_n=\frac{6^n+2^n-2\cdot 4^n}{4}}$$

3 Ⅲ (数列の極限，微分法の不等式への応用)

解答　(1)　$f'(x)=5x^4-6x^2+9$ より，接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=(5t^4-6t^2+9)(x-t)+t^5-2t^3+9t\\ &=(5t^4-6t^2+9)x-4t^5+4t^3 \end{aligned}$$

よって，$y=0$ として

$$0=(5t^4-6t^2+9)g(t)-4t^5+4t^3$$

$5t^4-6t^2+9=5\left(t^2-\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{36}{5}>0$ であるから

$$\therefore\ \boldsymbol{g(t)=\frac{4t^5-4t^3}{5t^4-6t^2+9}}$$

(2)　(1) より

$$h(t)=\frac{4t^4-4t^2}{5t^4-6t^2+9}$$

だから

$$\begin{aligned} &(5t^4-6t^2+9)^2h'(t)\\ &=(16t^3-8t)(5t^4-6t^2+9)\\ &\qquad-(4t^4-4t^2)(20t^3-12t) \quad \cdots\cdots ①\\ &=-8t(t^4-18t^2+9)\\ &=-8t\left\{t^2-(9+6\sqrt{2})\right\}\left\{t^2-(9-6\sqrt{2})\right\} \end{aligned}$$

より $h'(t)=0$ を満たす正の実数 t は

$$t^2=9\pm 6\sqrt{2}=(\sqrt{6}\pm\sqrt{3})^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{t=\sqrt{6}\pm\sqrt{3}}$$

(3)　(2) より $h(t)$ の $t\geqq 0$ における増減表は下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\sqrt{6}-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{6}+\sqrt{3}$	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	0	↘		↗		↘

$\alpha=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，$\beta=\sqrt{6}+\sqrt{3}$ とおく．① で $t=\alpha$ とすると，$h'(\alpha)=0$，$\alpha^2=9-6\sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned} h(\alpha)&=\frac{4\alpha^4-4\alpha^2}{5\alpha^4-6\alpha^2+9} \quad (*)\\ &=\frac{16\alpha^3-8\alpha}{20\alpha^3-12\alpha}\\ &=\frac{4\alpha^2-2}{5\alpha^2-3}\\ &=\frac{4(9-6\sqrt{2})-2}{5(9-6\sqrt{2})-3}\\ &=\frac{17-12\sqrt{2}}{21-15\sqrt{2}}\\ &=\frac{1-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

同様に計算して $h(\beta)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ を得る．ここで

$$|h(\beta)|-|h(\alpha)|=\frac{1+\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}-1}{3}=\frac{2}{3}>0$$

より，$|h(\alpha)|<|h(\beta)|$ である．また

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{4-\dfrac{4}{t^2}}{5-\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{9}{t^4}}=\frac{4}{5}$$

であるから，すべての正の実数 t に対して $|h(t)|\leqq p$ を満たす最小の p は

$$\boldsymbol{p=\frac{1+\sqrt{2}}{3}}$$

〔参考〕　一般に $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ のとき，

$$f'(x)=\frac{h'(x)g(x)-h(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

より，$f'(\alpha)=0$ ならば

$$h'(\alpha)g(\alpha)-h(\alpha)g'(\alpha)=0$$

なので

$$f(\alpha)=\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

が成り立つ．(3) の $(*)$ ではこの事実を用いた．

(4)　$a=0$ とすると，$g(0)=0$ であるから帰納的に $a_n=0$ である．よって $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ が成り立つ．以下では $a\neq 0$ とする．$h(t)$ は偶関数なので，任意の実数 t に対して $|h(t)|\leqq p$ が成り立つ．したがって

$$|a_{n+1}|=|g(a_n)|=|h(a_n)||a_n|\leqq p|a_n|$$

$$\therefore\ |a_n|\leqq p^{n-1}|a_1|=p^{n-1}|a|$$

が成り立つ．ここで

$$|p|=\left|\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right|<\frac{1+2}{3}=1$$

であるから $\lim\limits_{n\to\infty}p^{n-1}|a|=0$ である．

ゆえに，はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ となる．

〈**H.H.**〉〈A.O.〉

例年通り **1** は空欄補充，**2**，**3** は記述式である．いずれも前半は易しいのでしっかりと得点したい．後半部分はどの問題も思考力または計算力を要する問題で一筋縄ではいかないだろう．80 分ですべてを解き切るのは至難の業であろうと思われるので，しっかりと解ける問題を見抜く眼を養おう．