過去問めぐり モンモールで悶々とする

2011 獨協医科大学

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字(0〜9)，符号(−，±)，自然対数の底(e)のいずれかが入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

1 から n までの通し番号がついた n 個の箱と，1 から n までの通し番号がついた n 個の球がある。n 個の箱に 1 つずつ球を入れる方法の数は $n!$ 通りだけあるが，このうち箱の番号と球の番号とがすべて異なるような入れ方の総数を a_n とする。たとえば，$a_1 = 0$，$a_2 = 1$ である。

(1)　$a_3 = \boxed{\text{ア}}$，$a_4 = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　a_{n+1} について考える。$n+1$ 番の球を 1 番の箱に入れる場合は，1 番の球が $n+1$ 番の箱に入る場合と入らない場合を考えれば

$$a_{n-\boxed{\text{ウ}}} + a_n \text{ 通り}$$

だけあることがわかる。$n+1$ 番の球が他の箱に入る場合も同様なので，

$$a_{n+1} = n(a_{n-\boxed{\text{ウ}}} + a_n) \quad (n \geqq \boxed{\text{エ}})$$

となる。

(3)　$n \geqq \boxed{\text{エ}}$ のとき，$a_n - na_{n-\boxed{\text{ウ}}} = (\boxed{\text{オカ}})^n$ である。

(4)　$n \geqq \boxed{\text{エ}}$ のとき，$\dfrac{a_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=\boxed{\text{キ}}}^{n} \dfrac{(\boxed{\text{クケ}})^k}{k!}$ である。

$n=1$ のときは箱の番号と球の番号が一致するから

$$a_1=0$$

$n=2$ のときは，箱の番号と球の番号がすべて異なるのは，箱 1 に球 2，箱 2 に球 1 の 1 通りだけだから

$$a_2=1$$

(1) $n=3$ のとき

箱の番号	1	2	3
球の番号	2	3	1
	3	1	2

の 2 通りあるから　　$a_3=2$　(→ア)

$n=4$ のとき

箱の番号	1	2	3	4
球の番号	2	1	4	3
	2	3	4	1
	2	4	1	3
	3	1	4	2
	3	4	1	2
	3	4	2	1
	4	1	2	3
	4	3	1	2
	4	3	2	1

の 9 通りあるから　　$a_4=9$　(→イ)

(2) a_{n+1} について，球 $n+1$ を箱 1 に入れる場合を考える。

まず，球 1 が箱 $n+1$ に入る場合は，箱 1 と箱 $n+1$ を除く残り $n-1$ 個の箱の番号と球の番号がすべて異なるように入れればよいから，入れ方は a_{n-1} 通りある。

箱の番号	1	2　3　…　n	$n+1$
球の番号	$n+1$	$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1\text{個}}$	1

次に，球 1 が箱 $n+1$ に入らない場合は，箱 $n+1$ を箱 1 とみなし，n 個の箱と番号がすべて異なるように入れる入れ方と一致するから，その入れ方は a_n 通りある。

箱の番号	1	2	3	…	n	$n+1$
球の番号	$n+1$			$\underbrace{\qquad\qquad}_{n\text{個}}$		1 以外

よって，球 $n+1$ を箱 1 に入れる場合は

$a_{n-1}+a_n$ 通り　(→ウ)

だけあることがわかる。

球 $n+1$ が箱 2 ～ n に入る場合も同様に $a_{n-1}+a_n$ 通りあるから

$$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)\quad (n\geqq 2)\quad (\text{→エ})$$

$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)$ で $n=2$，3 とおくと

$$a_3=2(a_1+a_2)=2(0+1)=2$$

$$a_4=3(a_2+a_3)=3(1+2)=9$$

となり，確かに(1)の結果と一致する。

(3) $n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)$ を変形すると

$$a_{n+1}-(n+1)a_n=-(a_n-na_{n-1})$$

となるので，数列 $\{a_n-na_{n-1}\}$ は公比 -1 の等比数列をなす。よって

$$\begin{aligned} a_n-na_{n-1}&=(a_2-2a_1)\cdot(-1)^{n-2} \\ &=(1-2\times 0)\cdot(-1)^{n-2} \\ &=(-1)^{n-2}=(-1)^n \quad (\text{→オカ}) \end{aligned}$$

(4) $n\geqq 2$ のとき，$a_n-na_{n-1}=(-1)^n$ の両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

上式において n を 2，3，…，n とおいて辺々加える。

$$\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{1!}=\frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{a_3}{3!}-\frac{a_2}{2!}=\frac{(-1)^3}{3!}$$

$$\frac{a_4}{4!}-\frac{a_3}{3!}=\frac{(-1)^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$+)\ \frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\frac{a_n}{n!}-\quad\frac{a_1}{1!}\quad=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$a_1=0$ を用いて

$$\frac{a_n}{n!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\quad(\to キ\sim ケ)$$