過去問めぐり　減衰の答

【解答１】2006 聖マリアンナ医科大学 1/28, 第１次, 本学 医学部

❹ (1) $f(x)=e^{-\frac{x}{a}}\sin ax\ (x\geqq 0)$

$f(x)=0$ より　$\sin ax=0$　　$\therefore$　$ax=n\pi$

$$\therefore\quad x=\frac{n\pi}{a}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

よって　$x_m=\dfrac{m\pi}{a}$　………[答]

(2) $S_k=\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{x}{a}}\sin ax\,dx$

$$=\left[-ae^{-\frac{x}{a}}\sin ax\right]_{x_{k-1}}^{x_k}+\int_{x_{k-1}}^{x_k} a^2e^{-\frac{x}{a}}\cos ax\,dx$$

$$=\left[-ae^{-\frac{x}{a}}\sin ax-a^3e^{-\frac{x}{a}}\cos ax\right]_{x_{k-1}}^{x_k}+\int_{x_{k-1}}^{x_k} a^3e^{-\frac{x}{a}}\cdot(-a\sin ax)\,dx$$

$$=\left[-ae^{-\frac{x}{a}}\sin ax-a^3e^{-\frac{x}{a}}\cos ax\right]_{x_{k-1}}^{x_k}-a^4\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{x}{a}}\sin ax\,dx$$

よって

$$(1+a^4)S_k$$

$$=\left[-ae^{-\frac{x}{a}}\sin ax-a^3e^{-\frac{x}{a}}\cos ax\right]_{x_{k-1}}^{x_k}$$

$$=-ae^{-\frac{x_k}{a}}\sin ax_k-a^3e^{-\frac{x_k}{a}}\cos ax_k+ae^{-\frac{x_{k-1}}{a}}\sin ax_{k-1}+a^3e^{-\frac{x_{k-1}}{a}}\cos ax_{k-1}$$

$$=-a^3e^{-\frac{k\pi}{a^2}}\cos k\pi+a^3e^{-\frac{(k-1)\pi}{a^2}}\cos(k-1)\pi$$

$$=(-1)^{k-1}a^3e^{-\frac{(k-1)\pi}{a^2}}e^{-\frac{\pi}{a^2}}+(-1)^{k-1}a^3e^{-\frac{(k-1)\pi}{a^2}}$$

$$=a^3(e^{-\frac{\pi}{a^2}}+1)(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^{k-1}$$

$$\therefore\quad S_k=\frac{a^3(1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})}{1+a^4}(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^{k-1}$$ ………[答]

(3) 数列 $\{S_k\}$ は公比 $(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})$ の等比数列だから

$$W_n=\frac{a^3(1+e^{-\frac{\pi}{a^2}})}{1+a^4}\,\frac{1-(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^n}{1+e^{-\frac{\pi}{a^2}}}$$

$$=\frac{a^3}{1+a^4}\{1-(-e^{-\frac{\pi}{a^2}})^n\}$$

ここで

$$|-e^{-\frac{\pi}{a^2}}|=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{a^2}}}<1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}W_n=\frac{a^3}{1+a^4}$$ ………[答]

【解答２】2013 兵庫医科大学 1/23, １次 医

(1)　$f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$, (計算省略)

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{4}\pi}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{17}{4}\pi}$, (計算省略)

(3)　$V_k=\dfrac{\pi}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2k\pi}$, (計算省略)

(4)　$\dfrac{\pi}{8}$, (計算省略)

【解答３】2015 杏林大学 1/23, 1次(一般・東京都地域・茨城県地域枠) 医

(a)　アイ　-3　　ウエ　25　　オカ　-4　　キク　25　　ケ　4

　　コサ　25　　シ　4　　スセ　25

(b)　ソタ　-3　　チ　4　　ツ　⑨

3 解答

(1) $f(x)=e^{-x}\sin x$ のとき

$$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$$
$$=e^{-x}(-\sin x+\cos x) \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1)の結果より

$$f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

$0<x<5\pi$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{17}{4}\pi$	$\cdots$	(5π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	

よって，$f(x)$ の極大値は

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}},\quad f\left(\frac{9}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{4}\pi},\quad f\left(\frac{17}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{17}{4}\pi}$$

$\cdots\cdots$(

(3) 条件より

$$V_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\pi\{f(x)\}^2dx=\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx$$

ここで，$t=x-(k-1)\pi$ とおくと，$dt=dx$，$\begin{array}{c|ccc} x & (k-1)\pi & \longrightarrow & k\pi \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & \pi \end{array}$ より

$$V_k=\pi\int_0^{\pi}e^{-2\{(k-1)\pi+t\}}[\sin\{(k-1)\pi+t\}]^2dt$$
$$=e^{-2(k-1)\pi}\pi\int_0^{\pi}e^{-2t}(\pm\sin t)^2dt$$
$$=(e^{-2\pi})^{k-1}\pi\int_0^{\pi}e^{-2t}\sin^2 t\,dt$$
$$=(e^{-2\pi})^{k-1}V_1 \quad \cdots\cdots①$$

さらに

$$V_1=\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi}e^{-2x}dx-\int_0^{\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx\right) \quad \cdots\cdots②$$

ここで，$I=\int_0^{\pi} e^{-2x}\cos 2x dx$ とおくと

$$I=\left[e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2e^{-2x})\cdot\frac{1}{2}\sin 2x dx$$

$$=0+\int_0^{\pi} e^{-2x}\sin 2x dx$$

$$=\left[e^{-2x}\cdot\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2e^{-2x})\cdot\frac{-1}{2}\cos 2x dx$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2\pi}-1)-\int_0^{\pi} e^{-2x}\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2\pi})-I$$

となるから

$$I=\frac{1}{4}(1-e^{-2\pi})$$

②に代入すると

$$V_1=\frac{\pi}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\pi}-I\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}(1-e^{-2\pi})-\frac{1}{4}(1-e^{-2\pi})\right\}$$

$$=\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})$$

これを①に代入すると

$$V_k=\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})(e^{-2\pi})^{k-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

(4) (3)の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} V_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})(e^{-2\pi})^{k-1} \quad \cdots\cdots ③$$

③は，初項 $\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})$，公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数であり，$|(公比)|<1$ より，その和は収束し

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} V_k=\frac{\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})}{1-e^{-2\pi}}=\frac{\pi}{8} \quad \cdots\cdots(答)$$