

【1】 <H215M14> 2007 聖マリアンナ医科大学 1/30, 第1次試験 医

[1]

以下の $\boxed{\text{①}}$ から $\boxed{\text{③}}$ の中に、解答群にある数字、文字、記号の中から最もふさわしいものを選択して、①から③に記入しなさい。なお、同じ数字、文字、記号を何回選んでもよい。

n を自然数として、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ の値を以下のように求める。

$\boxed{\text{①}}^n < 2^n + 3^n < 2 \times \boxed{\text{①}}^n$ だから、この各辺を $\frac{1}{n}$ 乗して、

$\boxed{\text{①}} < (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \times \boxed{\text{①}}$ となる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \times \boxed{\text{①}}) = \boxed{\text{②}}$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{\text{③}}$

(解答群)

0, 1, 2, 3, e , $2e$, $3e$, e^2 , e^3 , ∞

(e は自然対数の底を表す)

[2] $0 \leq a < b$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{\text{④}}$

[3]

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2n} x + \sin^{2n} x)^{\frac{1}{n}}$ とおく。

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\text{⑤}}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{⑥}}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{⑦}}$ である。

[4] 前問[3]の $f(x)$ について、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を計算しなさい。なお、計算の過程も含めて記載しなさい。

【解答 1】 <H215M14> 2007 聖マリアンナ医科大学 1/30, 第 1 次試験 医

[1] ① 3 ② 3 ③ 3

[2] ④ b

[3] ⑤ $\frac{3}{4}$ ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ $\frac{3}{4}$

[4] $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

4 **解答** ① 3 ② 3 ③ 3 ④ b ⑤ $\frac{3}{4}$ ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 [4] \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

◀数列の極限, 定積分の計算▶

$$[1] \quad 0 < 2^n < 3^n \text{ であるから } 3^n < 2^n + 3^n < 2 \cdot 3^n$$

$$\text{各辺を } \frac{1}{n} \text{ 乗して } 3 < (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \cdot 3) = 3 \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$$

$$[2] \quad [1] \text{ と同様に考えると}$$

$$0 < a^n < b^n \text{ より } b^n < a^n + b^n < b^n + b^n = 2b^n$$

$$\text{各辺を } \frac{1}{n} \text{ 乗して } b < (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \cdot b) = b \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = b$$

$$[3] \quad (i) \quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ のとき}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \text{ だから}$$

$$\cos x > \sin x > 0 \text{ より}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x > 0 \quad \therefore \cos^2 x > \sin^2 x$$

$$\text{よって, } a = \sin^2 x, \quad b = \cos^2 x \text{ とおくと, } [2] \text{ により}$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$$

$$(ii) \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$(i) \text{ と同様に考えると, } \cos^2 x < \sin^2 x \text{ である。}$$

$$a = \cos^2 x, \quad b = \sin^2 x \text{ とおくと, } [2] \text{ により}$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

$$(iii) \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$(\cos^{2n} x + \sin^{2n} x)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$[4] \quad [\text{解答}] \text{ に示したように, } 2 \text{ 倍角の公式を用いてから不定積分する。}$$