

# テーマ演習 反転

## 問題 1

原点  $O$  と異なる点  $P$  に対して、 $O$  を端点とする半直線  $OP$  上にあり、 $OP \cdot OQ = 1$  を満たす点  $Q$  を考える。点  $P$  が直線  $3x + 4y = 1$  上を動くとき、点  $Q$  の軌跡を求めよ。

## 問題 2

2 点  $P(x, y), Q(X, Y)$  の間に

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

の関係がある。点  $P$  が不等式

$$(4x + 3y - 5)(4x - 3y + 5) > 0$$

で表される範囲を動くとき、点  $Q$  の動く範囲を図示せよ。

## 問題 3

空間内で原点  $O$  を中心とする半径 1 の球面上に、 $N(0, 0, 1), S(0, 0, -1)$  と異なる点  $P$  をとって、 $P$  と  $N, P$  と  $S$  を結ぶ直線が  $xy$  平面と交わる点を、それぞれ  $Q(z, y, 0), R(X, Y, 0)$  とする。 $Q$  が円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上を動くとき、 $R$  はどんな曲線上を動くか。

## 問題 4

2019 東京慈恵会医科大学

方程式  $x^3 + 1 = 0$  の解のうち、虚部が正であるものを  $\alpha$  とする。複素数平面上の 3 点  $A(\alpha), B(-1), C(\bar{\alpha})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  を考える。 $\triangle ABC$  の周上の点  $P(z)$  に対して、原点  $O$  を端点とし  $P(z)$  を通る半直線上に  $|w| = \frac{1}{|z|}$  をみたす点  $Q(w)$  をとるとき、次の問いに答えよ。ただし、複素数  $\gamma$  に共役な複素数を  $\bar{\gamma}$  で表し、複素数平面上で複素数  $\gamma$  を表す点  $G$  を  $G(\gamma)$  と書く。

(1)  $w = \frac{1}{z}$  となることを示せ。

(2)  $P(z)$  が  $\triangle ABC$  の周上を動くとき、 $Q(w)$  が描く図形によって囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

## 問題 5

2019 国際医療福祉大学

複素数平面上で、点  $z$  が、2 点  $6 + 2i, -2 + 6i$  を結んでできる線分上を動く。ただし、 $i$  は虚数単位とする。 $w = \frac{1}{z}$  とすると、 $|w|$  が最大となる点  $w$  は、 $w = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}i$

であり、 $w$  が描く曲線の長さは  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}\pi$  である。