過去問めぐり。日大 2014

平行六面体 略して ヘンタイ

3　平行六面体 ABCD-EFGH は，$AB = 2$，$AD = 3$，$AE = 1$，$\angle BAD = 60^\circ$，$\angle BAE = 90^\circ$，$\angle DAE = 90^\circ$ をすべて満たしている．辺 FG を 1 : 2 に内分する点を J とし，3 点 E，B，J を頂点とする三角形 EBJ を作るとき，以下の問いに答えなさい．ただし，(1)，(3) については答えだけを解答欄に書きなさい．

(1)　三角形 EBJ の面積を求めなさい．

(2)　三角形 EBJ の面と線分 FD の交点を K とする．$\overrightarrow{EK}$ を $\overrightarrow{EB}$ と $\overrightarrow{EJ}$ を用いて表しなさい．

(3)　(2) の線分 EK の延長と線分 BJ との交点を L とする．4 点 K，F，B，L を頂点とする四面体 KFBL の体積を求めなさい．

$$\triangle PBH=\{1-(1-\sqrt{3})\}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

斜線部の面積を S とおくと

$$S=\triangle ABD-\triangle PBH-(\text{扇形 APH})$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1^2\pi\times\frac{1}{3}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

別解 $\triangle PBH \backsim \triangle DBA$ で　$BH=\sqrt{3}$, $AB=AP+PB=1+2=3$

相似比は　$\sqrt{3}:3=1:\sqrt{3}$　よって，面積比は　$1:3$

$\triangle PBH=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle DBA=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ より

$$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

(3) 問題文より，C_n, C_{n+1} の関係を〔解答〕の図のように正しく捉えること。このとき，2円の外接の関係より，r_n と r_{n+1} の関係式を作ること。このとき，P_n, P_{n+1} は $\angle ADO$ の角の二等分線上にあることから，

$\angle P_nP_{n+1}Q_n=\frac{1}{2}\angle ADO=30°$ を利用して，r_n+r_{n+1} と r_n-r_{n+1} の比の値がわかる。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，部分和の極限から計算してもよいが，無限等比級数となることから，和の公式を利用するとよい。

3

解答 (1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(2) $\overrightarrow{EK}=x\overrightarrow{EB}+y\overrightarrow{EJ}$ とおく。

$$\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AE}=x(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE})+y(\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AE})$$
$$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+(1-x-y)\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AJ}$$

ここで

$$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

よって

$$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+(1-x-y)\overrightarrow{AE}+y\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=(x+y)\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots①$$

一方，K は線分 FD 上にあるので　DK : KF $=t:1-t$

$$\overrightarrow{AK}=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AD}$$
$$=t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+(1-t)\overrightarrow{AD}$$
$$=t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}+(1-t)\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots②$$

4点A，B，D，E は同一平面上にないので

$$\begin{cases} x+y=t & \cdots\cdots③\\ 1-x=t & \cdots\cdots④\\ \frac{1}{3}y=1-t & \cdots\cdots⑤\end{cases}$$

③−④ より　$2x+y=1$　……⑥

④+⑤ より　$1-x+\frac{1}{3}y=1$　$3x-y=0$　……⑦

⑥，⑦を解いて　$x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{3}{5}$

よって　$\overrightarrow{EK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{EB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{EJ}$　……(答)

(3) $\frac{\sqrt{3}}{40}$

◀解　説▶

《平面と直線の交点の位置ベクトル，四面体の体積》

(1) $\triangle BAE$ において，$\angle BAE=90°$, $AE=1$, $AB=2$ より

$$EB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$\triangle FBJ$ において，$\angle BFJ=90°$, $FB=FJ=1$ より

$$BJ=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$\triangle EFJ$ において，$\angle EFJ=120°$, $EF=2$, $FJ=1$ より

$$EJ^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cos 120°$$
$$=5+2=7$$
$$EJ=\sqrt{7}$$

$$\triangle \mathrm{PBH}=\{1-(1-\sqrt{3})\}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

斜線部の面積を S とおくと

$$S=\triangle \mathrm{ABD}-\triangle \mathrm{PBH}-(\text{扇形 APH})$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1^2\pi\times\frac{1}{3}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

別解 $\triangle \mathrm{PBH}\backsim\triangle \mathrm{DBA}$ で　$\mathrm{BH}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=1+2=3$

相似比は　$\sqrt{3}:3=1:\sqrt{3}$　よって，面積比は　$1:3$

$\triangle \mathrm{PBH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle \mathrm{DBA}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ より

$$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

(3) 問題文より，C_n，C_{n+1} の関係を〔解答〕の図のように正しく捉えること。このとき，2円の外接の関係より，r_n と r_{n+1} の関係式を作ること。このとき，P_n，P_{n+1} は $\angle \mathrm{ADO}$ の角の二等分線上にあることから，

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\frac{1}{2}\angle \mathrm{ADO}=30°$ を利用して，r_n+r_{n+1} と r_n-r_{n+1} の比の値がわかる。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，部分和の極限から計算してもよいが，無限等比級数となることから，和の公式を利用するとよい。

3

解答 (1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=x\overrightarrow{\mathrm{EB}}+y\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=x(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}})+y(\overrightarrow{\mathrm{AJ}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x-y)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+y\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x-y)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+y\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$
$$=(x+y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots\cdots①$$

一方，Kは線分 FD 上にあるので　$\mathrm{DK}:\mathrm{KF}=t:1-t$

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=t(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots\cdots②$$

4点A，B，D，Eは同一平面上にないので

$$\begin{cases} x+y=t & \cdots\cdots③ \\ 1-x=t & \cdots\cdots④ \\ \frac{1}{3}y=1-t & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

③−④より　$2x+y=1$　……⑥

④+⑤より　$1-x+\frac{1}{3}y=1$　$3x-y=0$　……⑦

⑥，⑦を解いて　$x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{3}{5}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EK}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$　……(答)

(3) $\frac{\sqrt{3}}{40}$

◀解　説▶

≪平面と直線の交点の位置ベクトル，四面体の体積≫

(1) $\triangle \mathrm{BAE}$ において，$\angle \mathrm{BAE}=90°$，$\mathrm{AE}=1$，$\mathrm{AB}=2$ より

$$\mathrm{EB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$\triangle \mathrm{FBJ}$ において，$\angle \mathrm{BFJ}=90°$，$\mathrm{FB}=\mathrm{FJ}=1$ より

$$\mathrm{BJ}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$\triangle \mathrm{EFJ}$ において，$\angle \mathrm{EFJ}=120°$，$\mathrm{EF}=2$，$\mathrm{FJ}=1$ より

$$\mathrm{EJ}^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cos 120°$$
$$=5+2=7$$
$$\mathrm{EJ}=\sqrt{7}$$

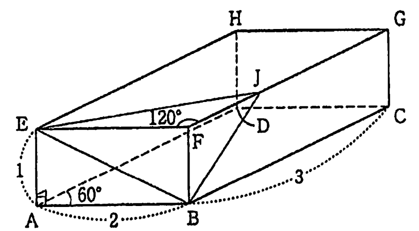
過去問めぐり．日大 2014
平行六面体 略して ヘンタイ

3 平行六面体 ABCD-EFGH は，$AB = 2$，$AD = 3$，$AE = 1$，$\angle BAD = 60^\circ$，$\angle BAE = 90^\circ$，$\angle DAE = 90^\circ$ をすべて満たしている．辺 FG を 1:2 に内分する点を J とし，3 点 E，B，J を頂点とする三角形 EBJ を作るとき，以下の問いに答えなさい．ただし，(1)，(3) については答えだけを解答欄に書きなさい．

(1) 三角形 EBJ の面積を求めなさい．

(2) 三角形 EBJ の面と線分 FD の交点を K とする．$\overrightarrow{EK}$ を $\overrightarrow{EB}$ と $\overrightarrow{EJ}$ を用いて表しなさい．

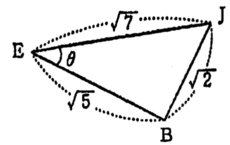
(3) (2) の線分 EK の延長と線分 BJ との交点を L とする．4 点 K，F，B，L を頂点とする四面体 KFBL の体積を求めなさい．



$\angle \mathrm{JEB} = \theta$ とおくと，$\triangle \mathrm{EBJ}$ において

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{35}}$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{35}$$



$\cos\theta > 0$ より，θ は鋭角だから　$\sin\theta > 0$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

よって

$$\triangle \mathrm{EBJ} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{35}\times\frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

参考　$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{7})^2$ に気づけば，$\angle \mathrm{EBJ} = 90°$ であることがわかり，少し計算が楽になる。

(2)　Kが平面 EBJ 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{EK}} = x\overrightarrow{\mathrm{EB}} + y\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$ とおき，また，Kが線分 FD 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = t\overrightarrow{\mathrm{AF}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおく。ここで，基点をAとすることで，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて①，②のように2通りに表すことができる。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は一次独立なので，係数を比較して x，y を求めることができる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が一次独立とは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が同一平面上にないということである。

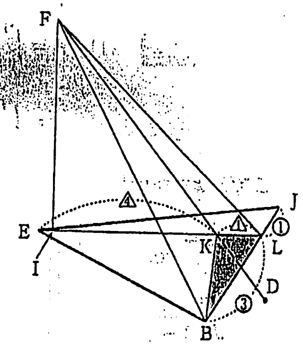
また，$t = \frac{4}{5}$ であることから $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表せ，Kは線分 FD を1：4に内分する点であることもわかる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{EK}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{EB}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{EB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{EJ}}}{4}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EL}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{EB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{EJ}}}{4}$

であり，Lは線分 BJ を3：1に内分し，Kは線分 EL を4：1に内分する点である。



したがって

$$\triangle \mathrm{KBL} = \frac{1}{5}\triangle \mathrm{EBL} = \frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\triangle \mathrm{EBJ}$$

$$= \frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$= \frac{3}{40}\sqrt{10}$$

ここで，四面体 EFBJ の体積は　$\triangle \mathrm{EFJ}\times \mathrm{FB}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\triangle \mathrm{EFJ}$

$$\triangle \mathrm{EFJ} = \frac{1}{2}\cdot 2\times 1\times\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，四面体 EFBJ の体積は　$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Fから平面 EBJ へ下ろした垂線の足をIとおくと，四面体 EFBJ の体積は

$$\triangle \mathrm{EBJ}\times \mathrm{FI}\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{10}}{2}\times \mathrm{FI}\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{10}}{6}\mathrm{FI}$$

と表すこともできる。

したがって

$$\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{6}\mathrm{FI} \qquad \therefore\quad \mathrm{FI} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

以上より，四面体 KFBL の体積は

$$\triangle \mathrm{KBL}\times \mathrm{FI}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{40}\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{30}}{10}\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{40}$$