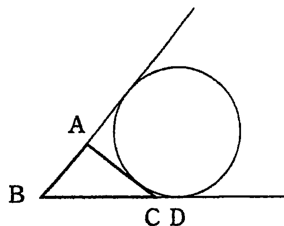


過去問めぐり・東邦大学

【1】2016 東邦大学

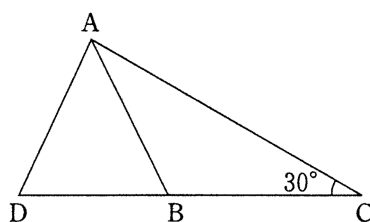
- [4] $\triangle ABC$ において、辺 AC に接する傍接円と直線 BC との接点を D とする。 $AB=19$, $BC=27$, $CA=24$ のとき、 $BD = \boxed{\text{セソ}}$ である。



- [9] $BC=2$, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=105^\circ$ である $\triangle ABC$ において、辺 AB 上に点 D があり $\angle BCD=30^\circ$ である。このとき、 $CD = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シ}}$ である。また、辺 CA 上に点 E を $\angle CBE=30^\circ$ となるようにとるとき、 $DE^2 = \boxed{\text{スセ}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タチ}}$ である。

【2】2014 東邦大学

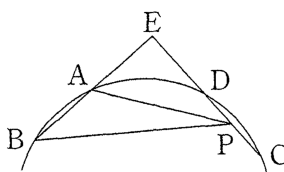
- [4] 次図のように、 $\angle ABC$ が鈍角である $\triangle ABC$ があり、 $AB=6$, $CA=11$, $\angle ACB=30^\circ$ である。辺 CB の B を越える延長上に $AD=AB$ であるような点 D をとるとき、 $BD = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ が成り立つ。



- [12] 正五角形の外接円および内接円の半径をそれぞれ R , r とするとき、 $\frac{r}{R} = \frac{\boxed{\text{ミ}} + \sqrt{\boxed{\text{ム}}}}{\boxed{\text{メ}}}$ が成り立つ。

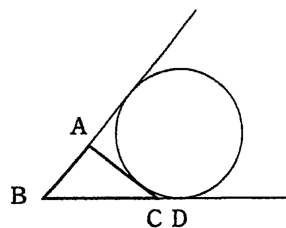
【3】2013 東邦大学

- [4] 次図のように、円周上の4点 A , B , C , D に対して、直線 AB と直線 CD の交点を E とし、 $AB=4$, $AE=5$, $\angle AED=90^\circ$ とする。線分 CD 上を動く点 P が $\angle APB$ を最大にするとき、 $EP = \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である。



【1】2016 東邦大学

- [4] $\triangle ABC$ において、辺 AC に接する傍接円と直線 BC との接点を D とする。 $AB=19$ ， $BC=27$ ， $CA=24$ のとき、 $BD=$ である。



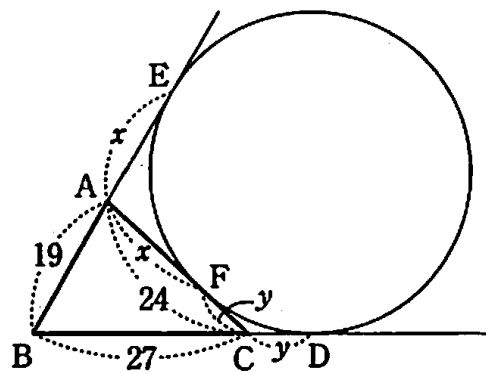
直線 AB ，直線 CA と傍接円の接点をそれぞれ E ， F とし， $AE=AF=x$ ， $CD=CF=y$ とおくと， $BE=BD$ より

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x+19=y+27 \end{cases}$$

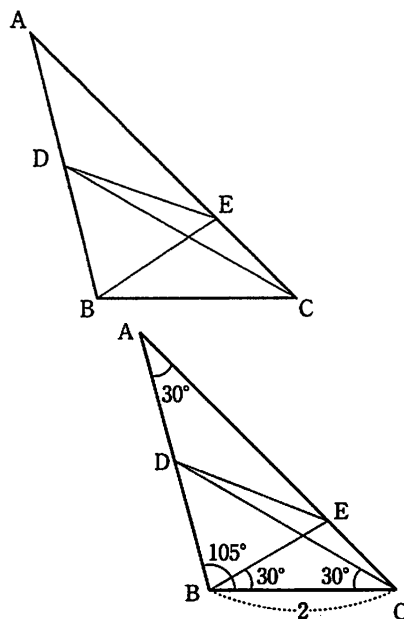
$$\therefore x=16, y=8$$

したがって、求める BD の長さは

$$BD=BC+CD=27+8=35$$



- [9] $BC = 2$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 105^\circ$ である $\triangle ABC$ において、辺 AB 上に点 D があり $\angle BCD = 30^\circ$ である。このとき、 $CD = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シ}}$ である。また、辺 CA 上に点 E を $\angle CBE = 30^\circ$ となるようにとるとき、 $DE^2 = \boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タチ}}$ である。



$\triangle BCD$ において

$$\begin{aligned}\angle BDC &= 180^\circ - (\angle CBD + \angle BCD) \\ &= 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ\end{aligned}$$

正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin 105^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}$$

ゆえに、加法定理より

$$\begin{aligned}CD &= 2\sqrt{2} \sin 105^\circ = 2\sqrt{2} \sin (60^\circ + 45^\circ) \\ &= 2\sqrt{2} (\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ) \\ &= 2\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{3} + 1\end{aligned}$$

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ \text{ より}$$

$$\angle DCE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$\angle BEC = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$\triangle BCE$ において、正弦定理より

$$\frac{CE}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 105^\circ}$$

ゆえに

$$CE = \frac{2 \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

次に、 $\triangle CDE$ において、余弦定理より

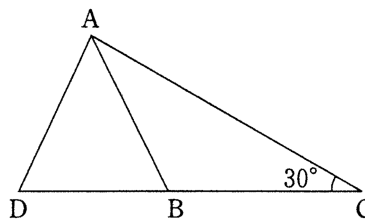
$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \times CD \times CE \times \cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}DE^2 &= (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{3} + 1) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ &= -4\sqrt{3} + 10\end{aligned}$$

【2】2014 東邦大学

4 次図のように、 $\angle ABC$ が鈍角である $\triangle ABC$ があり、 $AB=6$ 、 $CA=11$ 、 $\angle ACB=30^\circ$ である。辺 CB の B を越える延長上に $AD=AB$ であるような点 D をとるとき、 $BD=\sqrt{\text{サシ}}$ が成り立つ。



$\triangle ACD$ において、正弦定理より

$$\frac{11}{\sin \angle ADC} = \frac{6}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore \sin \angle ADC = \frac{11}{12}$$

$0^\circ < \angle ADC < 90^\circ$ より、 $\cos \angle ADC > 0$ であるから

$$\cos \angle ADC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{12}$$

$\triangle ABD$ において

$$BD = 2 \times 6 \cos \angle ADC = \sqrt{23}$$

別解 <その1> 頂点 A から辺 CD に垂線 AH を下ろすと

$$AH = 11 \sin 30^\circ = \frac{11}{2}$$

$\triangle ADH$ において、三平方の定理より

$$DH = \sqrt{6^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{2}$$

よって $BD = 2DH = \sqrt{23}$

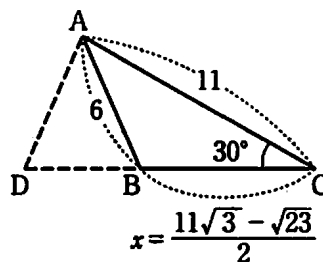
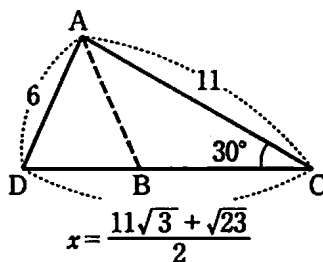
<その2> $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADC$ において、余弦定理より、 BC または DC の長さを x とおくと、どちらも方程式 $6^2 = x^2 + 11^2 - 2 \times 11 \times x \times \cos 30^\circ$ を満たす。

これを解くと

$$x^2 - 11\sqrt{3}x + 85 = 0 \quad \therefore x = \frac{11\sqrt{3} \pm \sqrt{23}}{2}$$

$DC > BC$ より

$$DC = \frac{11\sqrt{3} + \sqrt{23}}{2}, \quad BC = \frac{11\sqrt{3} - \sqrt{23}}{2}$$



よって $BD = DC - BC = \sqrt{23}$

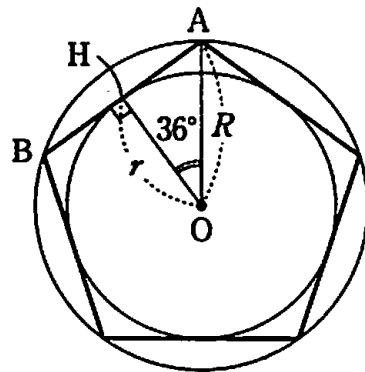
正五角形の外接円および内接円の半径をそれぞれ R, r とするとき、 $\frac{r}{R} = \frac{\boxed{\text{ミ}} + \sqrt{\boxed{\text{ム}}}}{\boxed{\text{メ}}}$ が成り立つ。

正五角形の外接円および内接円の中心を O 、正五角形の 1 辺 AB と内接円の接点を H とする。

$$\angle AOB = 360^\circ \div 5 = 72^\circ \quad \therefore \angle AOH = 36^\circ$$

$\triangle AOH$ において

$$\frac{r}{R} = \cos 36^\circ$$



$$\theta = 36^\circ \text{ とおくと, } 5\theta = 180^\circ \iff 3\theta = 180^\circ - 2\theta \text{ より}$$

$$\cos 3\theta = \cos (180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta$$

$$2 \text{ 倍角, } 3 \text{ 倍角の公式 } \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ より}$$

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -(2\cos^2\theta - 1)$$

整理すると

$$4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$$

$$(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

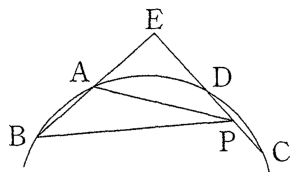
$$0 < \cos\theta < 1 \text{ より}$$

$$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{したがって } \frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

【3】2013 東邦大学

- 4 次図のように、円周上の4点A, B, C, Dに対して、直線ABと直線CDの交点をEとし、 $AB=4$, $AE=5$, $\angle AED=90^\circ$ とする。線分CD上を動く点Pが $\angle APB$ を最大にするとき、 $EP=\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である。



$EP=x$ とし、 $\angle APE=\alpha$, $\angle BPE=\beta$ とおく。 $\triangle APE$, $\triangle BPE$ はともに $\angle AED=90^\circ$ の直角三角形であるから、与えられた図より

$$\tan \alpha = \frac{5}{x}, \quad \tan \beta = \frac{9}{x} \quad (0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ)$$

このとき

$$\begin{aligned} \tan \angle APB &= \tan (\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{45}{x^2}} = \frac{4}{x + \frac{45}{x}} \end{aligned}$$

$EP=x>0$ であるから、相加・相乗平均より

$$x + \frac{45}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{45}{x}} = 6\sqrt{5}$$

等号成立は、 $x = \frac{45}{x}$ ($x>0$) より、 $x=3\sqrt{5}$ のとき。

$0^\circ < \angle APB < 90^\circ$ であるから、 $x + \frac{45}{x}$ が最小となるとき、 $\tan \angle APB$ すな

わち $\angle APB$ は最大となる。よって、求めるEPの値は、 $x + \frac{45}{x}$ が最小となるときの x の値に等しいので

$$EP=3\sqrt{5}$$