数学

(70 分)

次の空欄を埋めなさい。
解答は，分数の場合には既約分数の形で，自然数の根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となる形で書きなさい。

1

(1) $x^2-10x+y^2+24y=0$ は，点 (ア , イ) を中心とし，半径が ウ の円の方程式である。

(2) $0<\theta<\pi$ とする。$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos 2\theta=$ エ ，$\sin\dfrac{\theta}{2}=$ オ である。

(3) 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ -1,\ 2)$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=$ カ である。

(4) 直線 $2x-3y+2=0$ に関して点 (7, 14) と対称な点の座標は，(キ , ク) である。

(5) 2^{85} は ケ 桁の整数である。ただし，$\log_{10}2=0.301$ とする。

2

2 以上の自然数 N がある。くり返しさいころを投げて，次のルール(i)，(ii)に従ってゲームをする。

(i) さいころを投げて，異なる目が出たらゲームを終了し，さいころを投げた回数を得点とする。

(ii) さいころを投げて，N 回続けて同じ目が出たらゲームを終了し，得点を $N+1$ 点とする。

例えば，$N=4$ とする。1 回目と 2 回目に 5 の目が出て，3 回目に 5 以外の目が出たとき得点は 3 となり，1 回目から 4 回目まで同じ目が出たとき得点は 5 となる。

(1) $N\geqq 4$ とする。さいころをちょうど 2 回投げて，ゲームが終了する確率は ア であり，ちょうど 3 回投げて，ゲームが終了する確率は イ である。

(2) 得点が N 以上になる確率は ウ である。

(3) $N=3$ のとき，得点の期待値は エ である。

(4) $2\leqq n\leqq N$ のとき，得点が n となる確率は オ (カ)^n であり，得点の期待値を a_N とすると，$a_N=$ キ ，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}a_N=$ ク である。

3

4 頂点の座標が (0, 0)，(2, 0)，(2, 2)，(0, 2) の正方形と，4 頂点の座標が (2, 0)，$(2+x,\ 0)$，$(2+x,\ x)$，$(2,\ x)$，(ただし，$x>0$) の正方形をあわせた図形を F とする。点 $(0,\ h)$ を通り x 軸に平行な直線が F を面積の等しい 2 つの図形に分けている。

(1) $x=3$ のとき $h=$ ア ，$x=8$ のとき $h=$ イ である。また，$h=3$ のとき $x=$ ウ であり，$h\leqq\dfrac{7}{8}$ となるような x の範囲は エ $\leqq x\leqq$ オ である。

(2) h を x の関数と考える。

(i) 関数 h の $x=3$ における微分係数は カ である。

(ii) 曲線 $y=h$ と直線 $x=6$，$x=8$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は キ である。

◀解　説▶

(1) encourage「～を励ます，～を奨励する」 of … importance は，of＋抽象名詞の形で形容詞的になっており，「重要な」と訳す。of places は identification「特定，同定」と preservation「保護，保全」の両方の名詞を修飾している。ともに抽象名詞なので，動詞 identify「～を特定する」，preserve「～を保護する，～を保全する」の語形変化と解して和訳するとよい。また，places の後の that は主格の関係代名詞。

(2) meet は「(要求・期待など) を満たす」という意味で用いられている (fulfill, satisfy などの類義語)。criteria は criterion「判断基準」の複数形。unique and rare「独自で珍しい」は ecological and biological evolutionary process「生態学上および生物学上の進化過程」を修飾している。of は同格的働きをしており「～という」と訳すことが可能である。

8 **解答** (1) The first *Shinkansen* used in the Tokaido route was introduced in 1964 as a symbol of Japan's economic growth and development.

(2) Since then the *Shinkansen* has been developed and expanded, and now it has become one of the most comfortable vehicles.

◀解　説▶

(1)「～を導入する」は introduce。「日本の経済成長と発展」は Japan's〔Japanese〕economic growth and development などと英訳する。動詞部分を受動態にすることと，時制を過去形にすることに気をつける。

(2)「進化する」は develop / evolve などを，また「拡張する」は expand / extend などを用いる。これらの動詞は自動詞も他動詞もあるが，人の手による進化，拡張なので，他動詞を用いるとそのニュアンスを示せる。「～し続ける」は現在完了形の継続用法を使えばよいが，has continued to *do* のように書くことも可能である。また，「最も快適な乗物の１つ」は one of the most comfortable vehicles とし，vehicle を単数形にしないように注意する。

数学

1 **解答** (1)ア．5　イ．-12　ウ．13　(2)エ．$\frac{1}{8}$　オ．$\frac{\sqrt{2}}{4}$

(3)カ．$\frac{11}{14}$　(4)キ．15　ク．2　(5)ケ．26

◀解　説▶

≪小問５問≫

(1) 与えられた円の方程式を変形すると

$$(x-5)^2+(y+12)^2=5^2+12^2=13^2$$

よって，中心は　$(5,\ -12)$　→ア，イ

半径は　13　→ウ

(2) $\cos\theta=\frac{3}{4}$ のとき，２倍角の公式より

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}\quad\text{→エ}$$

また，半角の公式より

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$=\frac{1-\frac{3}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

$0<\theta<\pi$ より，$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\frac{\theta}{2}>0$ であることに注意して

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad\text{→オ}$$

(3) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$

$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3+(-2)\cdot(-1)+3\cdot2$

$=3+2+6=11$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{11}{14}\quad\rightarrow カ$$

(4) 直線 $2x-3y+2=0$ を l とする。l に関して点 (7, 14) と対称な点の座標を $(p,\ q)$ とすると，この2点を結ぶ線分の中点が l 上にあることより

$$2\cdot\frac{p+7}{2}-3\cdot\frac{q+14}{2}+2=0$$

整理して

$$2p-3q=24\quad\cdots\cdots①$$

一方，与えられた方程式は $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ と変形できるから，l の傾きは $\frac{2}{3}$ であり，2点を結ぶ線分が l と直交することより

$$\frac{q-14}{p-7}\cdot\frac{2}{3}=-1$$

整理して

$$3p+2q=49\quad\cdots\cdots②$$

①，②を連立して解くと　$p=15,\ q=2$

よって，求める点の座標は　(15, 2)　→キ，ク

(5) $\log_{10}2^{85}=85\log_{10}2$

$=85\times0.301=25.585$

より　$25<\log_{10}2^{85}<26$

すなわち $10^{25}<2^{85}<10^{26}$ であるから，2^{85} の桁数は　26桁　→ケ

2 解答

(1)ア. $\frac{5}{6}$　イ. $\frac{5}{36}$　(2)ウ. $\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}$　(3)エ. $\frac{79}{36}$

(4)オ. 30　カ. $\frac{1}{6}$　キ. $\frac{11}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}$　ク. $\frac{11}{5}$

◀解 説▶

≪さいころの確率，数列の和と極限≫

(1) 2回目に，1回目と異なる目が出る確率は $\frac{5}{6}$ であるから，ちょうど2回投げてゲームが終了する確率は

$$1\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\quad\rightarrow ア$$

2回目に，1回目と同じ目が出る確率は $\frac{1}{6}$，3回目に，2回目までとは異なる目が出る確率は $\frac{5}{6}$ であるから，ちょうど3回投げてゲームが終了する確率は

$$1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}\quad\rightarrow イ$$

(2) (1)と同様に考えていくと，得点が N になる確率は

$$1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}$$

得点が $N+1$ になる確率は

$$1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}$$

よって，得点が N 以上になる確率は

$$\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}+\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}=\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}=\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}\quad\rightarrow ウ$$

(3) $N=3$ のとき，得点が2，3となる確率は，(1)と同様にそれぞれ

$$\frac{5}{6},\ \frac{5}{36}$$

得点が4となる確率は

$$1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}=\frac{1}{36}$$

以上より，得点の期待値は

$$2\cdot\frac{5}{6}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{1}{36}=\frac{60+15+4}{36}=\frac{79}{36}\quad\rightarrow エ$$

(4) これまでに考えたことより，$2\leqq n\leqq N$ のとき，得点が n となる確率は

$$1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}=6^2\cdot\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}=30\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\quad\rightarrow オ，カ$$

また，得点が $N+1$ となる確率は

$$1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}$$

得点の期待値 a_N は

$$a_N=2\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^2+3\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^3+4\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^4+\cdots$$

$$+N\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^N+(N+1)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}\quad\cdots\cdots①$$

ここで

$$\frac{1}{6}a_N=2\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^4+\cdots$$

$$+(N-1)\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^N+N\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^{N+1}+(N+1)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^N\quad\cdots\cdots②$$

①－② より

$$\frac{5}{6}a_N=2\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^2+30\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^N\right\}$$

$$+5(N+1)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^N-N\cdot30\left(\frac{1}{6}\right)^{N+1}$$

$$=\frac{5}{3}+30\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}\right\}}{1-\frac{1}{6}}+5\left(\frac{1}{5}\right)^N$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}\right\}+5\left(\frac{1}{6}\right)^N$$

$$=\frac{11}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^N$$

したがって

$$a_N=\frac{6}{5}\left\{\frac{11}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^N\right\}=\frac{11}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}\quad\to キ$$

よって

$$\lim_{N\to\infty}a_N=\frac{11}{5}\quad\to ク$$

3 **解答**　(1)ア．$\frac{13}{10}$　イ．$\frac{15}{4}$　ウ．$3+\sqrt{13}$　エ．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

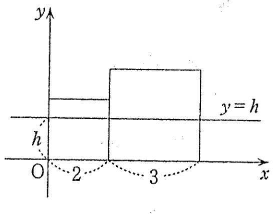
オ．$\frac{7+\sqrt{17}}{8}$

(2)(i)カ．$\frac{17}{50}$　(ii)キ．$\frac{125}{6}\pi$

◀解　説▶

≪座標平面上の図形と微・積分，回転体の体積≫

(1)　F の面積を，x の関数として $S(x)$ と表すと



$$S(x)=2^2+x^2=x^2+4$$

$x=3$ のとき　　$S(3)=13$

であり，$h=2$ と仮定すると，直線 $y=h$ より下の部分の面積が

$$2\cdot(2+3)=10>\frac{1}{2}S(3)$$

となるから，$h<2$ であり

$$h\cdot(2+3)=\frac{1}{2}S(3)=\frac{13}{2}$$

よって　　$h=\frac{13}{10}$　$\to$ア

$x=8$ のとき　　$S(8)=68$

であり，同様に考えると $h>2$ であり

$$2^2+8h=\frac{1}{2}S(8)=34$$

よって　　$h=\frac{15}{4}$　$\to$イ

$h=3$ のとき，$x>h$ に注意して

$$2^2+3x=\frac{1}{2}S(x)=\frac{1}{2}(x^2+4)$$

$$8+6x=x^2+4$$

$$x^2-6x-4=0$$

$x>h=3$ より　　$x=3+\sqrt{13}$　$\to$ウ

以下，$h \leqq \frac{7}{8}$ であるときについて考える。まず，$x \leqq h$ と仮定すると

$$2h + x^2 = \frac{1}{2}S(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)$$

$$4h + 2x^2 = x^2 + 4$$

よって　$h = \frac{4-x^2}{4}$

$h \leqq \frac{7}{8}$ より　$\frac{4-x^2}{4} \leqq \frac{7}{8}$

$$8 - 2x^2 \leqq 7 \qquad \therefore \quad x^2 \geqq \frac{1}{2}$$

$x>0$ より　$x \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$　……①

一方，$x \leqq h$ より $x \leqq \frac{4-x^2}{4}$ であるから

$$4x \leqq 4 - x^2 \qquad \therefore \quad x^2 + 4x - 4 \leqq 0$$

$x>0$ のもとで解くと　$0 < x \leqq -2+2\sqrt{2}$　……②

$-2+2\sqrt{2} < \frac{7}{8}$ に注意して，①，②の共通範囲を求めると

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq -2+2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots③$$

次に，$x>h$ と仮定すると

$$h(2+x) = \frac{1}{2}S(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)$$

$$2h(x+2) = x^2+4$$

$x>0$ より $x+2 \neq 0$ であることに注意すると

$$h = \frac{x^2+4}{2(x+2)}$$

$h \leqq \frac{7}{8}$ より　$\frac{x^2+4}{2(x+2)} \leqq \frac{7}{8}$

$x+2>0$ より　$4x^2+16 \leqq 7x+14$

$$4x^2 - 7x + 2 \leqq 0$$

$$\frac{7-\sqrt{17}}{8} \leqq x \leqq \frac{7+\sqrt{17}}{8} \quad \cdots\cdots④$$

同様に，$x>h$ より　$x > -2+2\sqrt{2}$　……⑤

であるから，④，⑤の共通範囲を求めると

$$-2+2\sqrt{2} < x \leqq \frac{7+\sqrt{17}}{8} \quad \cdots\cdots⑥$$

$h \leqq \frac{7}{8}$ を満たす x の値の範囲は③または⑥の範囲であるから

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \frac{7+\sqrt{17}}{8} \quad \to エ，オ$$

(2)(i)　(1)で考えたことより

$x=3$ のとき　$h = \frac{x^2+4}{2(x+2)}$

これを x で微分すると

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x(x+2)-(x^2+4)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-4}{2(x+2)^2}$$

$x=3$ を代入して，求める微分係数は

$$\frac{3^2+4\cdot 3-4}{2\cdot(3+2)^2} = \frac{17}{50} \quad \to カ$$

(ii)　(1)と同様に考えると，$6 \leqq x \leqq 8$ においては $2<h$ としてよいから

$$2^2 + hx = \frac{1}{2}S(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)$$

$$8 + 2hx = x^2 + 4$$

$x>0$ に注意して　$h = \frac{x^2-4}{2x}$

$6 \leqq x \leqq 8$ において，$h>2$ であるから，求める体積 V は

$$V = \pi\int_6^8 h^2 dx = \pi\int_6^8 \left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_6^8 \left(x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3} - 8x - \frac{16}{x}\right]_6^8$$

$$= \frac{\pi}{4}\left\{\frac{8^3-6^3}{3} - 8(8-6) - \frac{16}{8} + \frac{16}{6}\right\}$$

$$= \frac{125}{6}\pi \quad \to キ$$