

【１】

$0 \leq \theta \leq \pi$ とするとき、方程式

$$3\sin^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\sin\theta\cos\theta + (2 - \sqrt{3})\cos^2\theta = 2$$

を満たす角 θ を小さい順に並べよ。

【２】

方程式 $6x + (\log_3 x)\log_2 x^{x-2} - \log_2 x^{2x} - \log_3 x^{3x} + \log_2 x^4 + \log_3 x^6 - 12 = 0$ の解を小さい順に並べよ。

【３】

$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{\boxed{(1)}} + \sqrt{\boxed{(2)}} + \sqrt{\boxed{(3)}}$ である。ただし、

$\boxed{(1)} \leq \boxed{(2)} \leq \boxed{(3)}$ とする。

【４】

第 n 項が $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{2n-1}{n^2-2n+2} \right)$ である数列において、

$$a_1 a_2 \cdots a_{10} = \frac{\boxed{(1)} \boxed{(2)} \boxed{(3)}}{\boxed{(4)} \boxed{(5)}} \text{ である。}$$

解答解説

【1】

$0 \leq \theta \leq \pi$ とするとき、方程式

$$3\sin^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\sin\theta\cos\theta + (2 - \sqrt{3})\cos^2\theta = 2$$

を満たす角 θ を小さい順に並べよ。

$$\begin{aligned}\text{問 3. } 3\sin^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\sin\theta\cos\theta + (2 - \sqrt{3})\cos^2\theta \\ = 2 = 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\end{aligned}$$

より

$$\sin^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\cos^2\theta = 0$$

$$(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\cos\theta = 0$ のとき、 $\sin\theta = 0$ となり、矛盾するから $\cos\theta \neq 0$

よって、 $\textcircled{4}$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$(\tan\theta - \sqrt{3})(\tan\theta + 1) = 0 \quad \therefore \tan\theta = \sqrt{3}, -1$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \theta = \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi \quad (\rightarrow (7) \sim (10))$$

【2】

方程式 $6x + (\log_3 x)\log_2 x^{x-2} - \log_2 x^{2x} - \log_3 x^{3x} + \log_2 x^4 + \log_3 x^6 - 12 = 0$ の解を小さい順に並べよ。

問 3. 真数は正より $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

与式を変形すると

$$6(x-2) + (x-2)\log_3 x \cdot \log_2 x - 2(x-2)\log_2 x - 3(x-2)\log_3 x = 0$$

$$(x-2)(6 + \log_3 x \cdot \log_2 x - 2\log_2 x - 3\log_3 x) = 0$$

$$(x-2)(\log_2 x - 3)(\log_3 x - 2) = 0$$

よって $x = 2, 8, 9$ (これらは $\textcircled{4}$ を満たす) ($\rightarrow (15) \sim (17)$)

【3】

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{\boxed{(1)}}+\sqrt{\boxed{(2)}}+\sqrt{\boxed{(3)}} \text{ である。ただし,}$$

$$\boxed{(1)} \leq \boxed{(2)} \leq \boxed{(3)} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} \text{問 1} \quad (\text{与式}) &= \sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \quad (\rightarrow (1)\sim(3)) \end{aligned}$$

【4】

第 n 項が $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{2n-1}{n^2-2n+2} \right)$ である数列において,

$$a_1 a_2 \cdots a_{10} = \frac{\boxed{(1)} \boxed{(2)} \boxed{(3)}}{\boxed{(4)} \boxed{(5)}} \text{ である。}$$

$$\text{問 4} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n^2+1}{n^2-2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n^2+1}{(n-1)^2+1}$$

よって

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{10} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{17}{10} \cdot \frac{26}{17} \cdot \frac{37}{26} \cdot \frac{50}{37} \cdot \frac{65}{50} \cdot \frac{82}{65} \cdot \frac{101}{82} \right) \\ &= \frac{101}{32} \quad (\rightarrow (11)\sim(15)) \end{aligned}$$