YAWARAKA!
数学道具箱　【体験版】

【例題 01】

方程式 $2x^2-3x+4=0$ の 2 解を α, β とするとき，$\left(\alpha^2+2\right)\left(2\beta^2+3\beta+4\right)$ の値を求めよ。

【例題 02】

k を実数とする。x の 3 次方程式 $x\left(x^2-4k+4\right)+k(k-2)^2=0$ の解がすべて実数であるような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}} \leqq k \leqq \boxed{ツ}$ である。

【例題 03】

方程式 $x^3+ax+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

【例題 04】$x^2+y^2=2$ のもとで，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。(できるだけ多くの解法で解け)

【例題 05】正の数 a, b が $a^3+b^3=5$ を満たすとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。(2012 昭和)

解の問題の処理

（１）　解を求める。

（２）　解を元の方程式に代入＆次数下げ

（３）　解と係数の関係

（４）　解　⇔　因数

（５）　解　⇔　グラフの共有点のx座標　（できれば**定数分離**）

（特殊な問題）

○共通解

○共役解

○1 の 3 乗根ω

○相反方程式

○3 次方程式の重解問題に注意

最大最小

$\boxed{\text{基礎}}$　グラフを描いて高さ比べ

２次関数⇒平方完成
三角関数⇒諸公式の利用
一般には⇒微分

$\boxed{\text{応用}}$　２変数以上 or 整式（n 次式）でないとき　など

（１）$\boxed{\text{一文字消去}}$（ただし変域に注意）

（２）$\boxed{\text{図示}}$して共有点の存在条件に帰着（線形計画法）

（３）$\boxed{\text{文字の置き換え（変域に注意）}}$

（対称式は和と積で，$x=\frac{b}{a}$ など）

（注）和と積の置き換えでは隠れた実解条件に注意

$\boxed{\text{パラメーター表示}}$（円・だ円・双曲線など）

$x^2+y^2=r^2$ のとき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と表せる。（２変数⇒１変数）

（４）$\boxed{\text{有名不等式の利用}}$

（例）相加相乗，Cauchy-Schwarz の不等式など

相加相乗　$a>0, b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成立　（等号成立は $a=b$）

CS-不等式　$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$　（等号成立は $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ のとき）

三角不等式　$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　（等号成立は $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向きのとき）

（５）$\boxed{\text{逆手法}}$（主役交代して，解の存在条件に帰着）

（６）（最後の手段）$\boxed{\text{一文字固定}}$

三角関数の諸公式

三角関数の定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

三角関数の基本公式

①$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

②$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

④$-1\leqq\sin\theta\leqq1, -1\leqq\cos\theta\leqq1$

加法定理

①$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

②$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

③$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

2倍角公式

①$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

②$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=2\cos^2\theta-1$

$=1-2\sin^2\theta$

3倍角公式

①$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

②$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

半角公式

①$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{2}$

②$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

③$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

積和変換

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

和積変換

$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

変換公式

①$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$，$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$，$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

②$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

③$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

④$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，$\tan(\pi-\theta)=\tan\theta$

⑤$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

⑥$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$，$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$，$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

三角関数の典型問題

①　$\sin x,\cos x$ の１次式　⇒　合成

②　$\sin x,\cos x$ の２次同次式　⇒　半角＆合成

③　$\sin x,\cos x$ の対称式　⇒　$t=\sin x+\cos x$　でおきかえ

最後の手段

①　$\sin x=Y,\cos x=X$ とおくと，$X^2+Y^2=1$　となり，座標平面に帰着できる

②　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　となり，分数計算に帰着できる。

準有名角

① $\boxed{15^\circ \text{ family}}$ ～ 加法定理から

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$$

② $\boxed{22.5^\circ \text{ family}}$ ～ 半角公式から

$$\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$$

③ $\boxed{18^\circ \text{ family}}$ ～ 2倍角＆3倍角，正5角形の対角線利用，相似利用

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

三角関数基本チェック

【例題 06】 $0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $2\cos 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} = 2$ を解け

【例題 07】 関数 $f(x) = 3\sin 2x - 4\cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 08】 関数 $f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

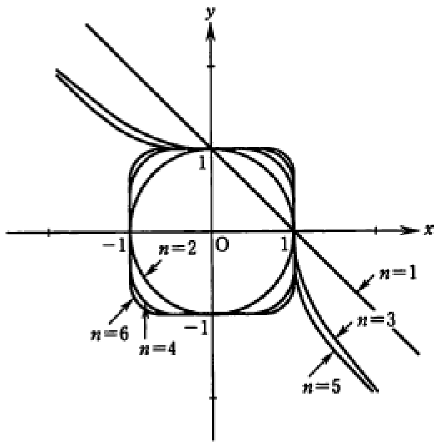
【例題 09】 関数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 4\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 10】 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 2}$ の最大値と最小値を求めよ。

有名曲線（抜粋）

$x^n + y^n = 1$　（n は自然数）

最大最小問題などで知っておくと得をする問題が散見される。



【例題】　曲線 $x^4 + y^4 = 4$ に異なる 4 点で外接する円の方程式は $x^2 + y^2 =$ $\boxed{\quad ① \quad}$ であり，第 1 象限における接点座標は $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。（2001 久留米）

答　①　$2\sqrt{2}$，②　$(\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2})$