すうがく♪ちゃちゃちゃ！

②数学ⅡB 篇【問題】

第１章　図形と式（１）

《学習項目》

・点　２点間距離公式（三平方の定理），内分・外分公式
・直線　$y=mx+n$ 型　⇒傾き
・直線　$ax+by+c=0$ 型
　　⇒方向ベクトル，法線ベクトル，
・点と直線の距離公式
・２直線の平行・垂直　（傾き利用　または　法線ベクトル利用）
・円　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
　　⇒円のパラメータ表示，円の接線公式，直線との位置関係，２つの円の位置関係
・円と直線⇒（円の中心と直線の距離）と（半径）の関係に帰着することが多い
・グラフの平行移動・対称移動・軸方向への拡大縮小（⑧で扱う）
・曲線束

A 問題

②A-1-1

A$(-2,\ -3)$，　B$(3,\ 7)$，　C$(5,\ 2)$とするとき，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を $4:1$ に内分する点　　(2)　線分 BC を $2:3$ に外分する点

(3)　線分 CA の中点　　(4)　△ABC の重心

(5)　線分 AB の長さ

②A-1-2

次のような直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ -4)$ を通り，傾きが -2 の直線

(2)　2 点 $(-4,\ 3)$，$(6,\ -3)$ を通る直線

(3)　点 $(5,\ -6)$ を通り，x 軸に垂直な直線

(4)　2 点 $(8,\ 0)$，$(0,\ 7)$ を通る直線

②A-1-3

原点と直線 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{15}{4}$ の距離を求めよ。

②A-1-4

A$(-4,\ 4)$，　B$(-2,\ 0)$，　C$(5,\ 7)$ とするとき，次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 A を中心とし，点 B を通る円

(2)　2 点 A，B を直径の両端とする円

(3)　3 点 A，B，C を通る円 S

(4)【B 問題】　点 $(2,\ 3)$ を中心とし，(3) の円 S に内接する円

②A-1-5

円 $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ …… ① がある。次のような円 ① の接線の方程式を求めよ。

(1)　円 ① 上の点 $(1,\ 7)$ における接線。

(2)　傾きが 1 の接線。このときの接点の座標も求めよ。

②A-1-6

円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 $(4,\ 6)$ における，この円の接線の方程式を求めよ。

B 問題

②B-1-1

直線 $l : y=3x+2$ に関して，点 P(3，1) と対称な点の座標を求めよ。

②B-1-2

平行な 2 直線 $3x-4y+4=0$ と $3x-4y-6=0$ の間の距離を求めよ。

②B-1-3

3 直線 $x+y-3=0,\ 2x-y+6=0,\ 3x+2y-12=0$ で囲まれる三角形の面積を求めよ。

②B-1-4

3 直線 $x+3y=0$，$-x+my=1$，$mx+2y=-1$ が三角形を作らないように，定数 m の値を定めよ。

②B-1-5

点 A$(-2,\ -2)$ を通り，点 B$(1,\ 2)$ からの距離が $\sqrt{5}$ である直線の方程式を求めよ。

②B-1-6

2 直線 $x+2y-3=0$，$2x-y-1=0$ のなす角の 2 等分線の方程式を求めよ。

②B-1-7

平面上の 3 直線 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$，$mx+y=0$ が三角形を作り，その面積 S が $\dfrac{7}{3}$ となるような m の値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-1-8}}$

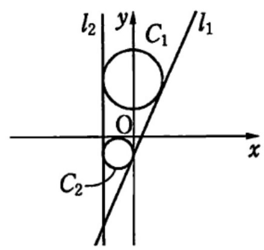
点 (2, 1) を通り，円 $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$ に接する直線の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{B-1-9}}$

平面上の点 $O_1(0,\ 4)$ を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $O_2(-1,\ -1)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。いま，C_1，C_2 に同時に接する接線 l_1，l_2 を右図のようにとる。

(1)　l_1 と l_2 の交点 P の座標を求めよ。

(2)　直線 l_1 の方程式を求めよ。



②$\boxed{\text{B-1-10}}$

(1)　円 $x^2+y^2+2x-2y+k=0$ が y 軸と異なる 2 点で交わるとき，k のとる範囲を求めよ。

(2)　直線 $y=-x+1$ が円 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ と共有する点の個数を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

②$\boxed{\text{B-1-11}}$

(1)　円 $x^2+y^2-2x-2y=0$ が直線 $y=2x-1$ から切り取る線分の長さを求めよ。

(2)　点 A(4, 6) を通る円 $x^2+(y-a)^2=b^2$ ($b>0$ とする) がある。この円が x 軸と交わる点を B，C とする。線分 BC の長さが 8 であるとき，a，b の値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-1-12}}$

xy 平面上の 2 定点を A(5, 0)，B(0, −5) とする。

円 $2x^2+4x+2y^2-12y-5=0$ 上に点 P をとるとき，△ABP の面積の最大値と最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-1-13}}$

2 円 $x^2+y^2+x-2y-5=0$，$x^2+y^2-5x-5y+10=0$ の交点を A，B とするとき，

(1) A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(2) A，B と点 C(0，-1) を通る円の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{B-1-14}}$

点 A(2，7) から円 $(x-1)^2+y^2=25$ に 2 本の接線を引く。2 接点を P，Q として，

(1) 線分 AP の長さを求めよ。

(2) P，Q を通る直線の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{B-1-15}}$

2 つの円 $C_1 : x^2+y^2-\sqrt{3}x-y=a$ $(a>-1)$，$C_2 : x^2+y^2=1$ について，

(1) C_1，C_2 が相異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき，C_1 と C_2 の共通弦の長さを l とする。l の最大値とそのときの a の値を求めよ。

C 問題

②C-1-1

3点 A(4, 0), B(0, 2), C(a, b) がある。点 C は第1象限にあり，△ABC は正三角形である。このとき a, b を求めよ。

②C-1-2

放物線 $y=x^2$ 上の動点 P が，点 A(1, 1) と $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ との間を動くとき，△PAB の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。

②C-1-3

c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。

②C-1-4

m を定数とするとき，x, y の方程式 $x^2+y^2-2mx-2m-2=0$ が表す円について，次の問いに答えよ。

(1)　この円は定数 m の値に関係なくある定点を通る。その定点の座標を求めよ。

(2)　この円の半径を最小にする定数 m の値を求めよ。
また，そのときの円の中心の座標と半径を求めよ。

(3)　2直線 $y=x$, $y=-x$ がともにこの円に接するように，定数 m の値を定めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

(4)　(3)において，この円の外部にあって，円の弧と2直線 $y=x$, $y=-x$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

②C-1-5

直線 $y=x$ と放物線 $y=-x^2+4x-3$ に同時に接する円を C とする。ただし，円と放物線が点Pで接するとは，その円と放物線が点Pを共有し，点Pにおける接線が共通であることをいう。

(1) 円 C と放物線が点 $(2,\ 1)$ で接するとき，円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と放物線の共通接線が $y=x$ に平行なとき，接点の座標を求めよ。また，このときの円 C の中心の座標と半径を求めよ。

②C-1-6

放物線 $y=x^2$ の頂点をO，その上の $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるような２点を $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とする。ただし，$p>0$ とする。

(1) p と q の関係式を求めよ。

(2) 直線PQがつねに通る定点を求めよ。

(3) 三角形OPQの面積の最小値を求めよ。

②C-1-7

２つの円 $C_1: x^2+y^2+4x-4y=2$，$C_2: x^2+y^2-8x=a$ の中心をそれぞれ P_1，P_2とする。また，C_1 と C_2 が相違なる２点Q，Rで交わっている。

(1) 定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{P}_1\mathrm{QP}_2$ が直角のとき，a の値を求めよ。

②C-1-8

C_1 を点 $(0,\ 0)$ を中心とする半径１の円，C_2 を放物線 $y=x^2+a$ $(a>1)$ とする。C_1 と C_2 に共通に接する直線の中で，互いに y 軸上で直交するものがあるとき，a の値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-9}}$

座標平面において，放物線 $C: y=x^2$ と直線 $m: y=1$ の両方に接し，その中心が y 軸上にある円の中心の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-10}}$

円 $C: x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から引いた 2 接線の接点を P，Q とする。

(1)* 2 点 P，Q を通る直線の方程式を求めよ

(2) (1)で求めた直線上にあり，かつ円の外部の任意の点を R とし，R から C に 2 接線を引き，その接点を S，T とする。このとき，3 点 A，S，T は一直線上にあることを証明せよ。

②$\boxed{\text{C-1-11}}$

3 点 $\mathrm{A}(-7,\ 0)$，$\mathrm{B}(7,\ 0)$，$\mathrm{C}(2,\ 12)$ を頂点とする △ABC がある。この三角形の重心，外心，内心，垂心の座標を求めよ。

補充問題

②C-1-12

平面上に 2 点 A$(-1,\ 3)$， B$(5,\ 11)$がある。

(1) 直線 $y=2x$ に関して，点 A と対称な点 P の座標を求めよ。

(2) 点 Q が直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA＋QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

②C-1-13

$10x^2+kxy+2y^2-9x-4y+2=0$ が 2 直線を表すときの k の値を求めよ。

②C-1-14

放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するような a の値の範囲を求めよ。

計算問題（自学自習用）

②C-1-15

(2)* 3 直線 $x+2y=0$，$y=x+6$，$y=mx$ で囲まれる三角形が，直線 $x+2y=0$ 上の辺を底辺とする二等辺三角形になるように m の値を定めよ。

②C-1-16

$y=|x+2|+|x-3|$ のグラフと直線 $(k+1)x+y-4=0$ とで三角形が作られるような k の値の範囲を求めよ。

②C-1-17

直線 $y=kx-4k-1$ と $y=||x|-1||$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

②C-1-18

円 C_1 は円 $C_2 : x^2+y^2-2x=0$ に外接し，直線 $x+\sqrt{3}y=0$ と点 $(3,\ -\sqrt{3})$ において接する。このとき，円 C_1 の方程式を求めよ。

②C-1-19

円 $C : x^2+y^2-4x-2y+4=0$ と点 $(-1,\ 1)$ を中心とする円 D が外接している。このとき，2 円 C，D の共通接線の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-20}}$

2直線 $y=0$，$y=\sqrt{3}x$ に接し，点 $(3,\ 2\sqrt{3})$ を通る円の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-21}}$

円 $x^2+y^2+ax-3ay-5a-5=0$ によって y 軸から切り取られる線分の長さの最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-22}}$

円 $x^2+y^2+2x-y=0$ 上の動点Ｐと２定点 $\mathrm{A}(1,\ -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1)$ に対し，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積が最大になるときの点Ｐの座標と，そのときの $\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-23}}$

放物線 $y=-\dfrac{1}{5}x^2+2x$ と直線 $y=x$ によって囲まれる領域（境界を含む）に含まれ，各辺が x 軸または y 軸に平行となる正方形の面積の最大値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-24}}$

放物線 $L : y=1-\dfrac{x^2}{4}$ 上の，点 $(2a,\ 1-a^2)$ における接線 l_1 と，これに垂直な接線 l_2 がある。l_1，l_2 と x 軸との交点をそれぞれＡ，Ｂとし，l_1，l_2 の交点をＣとする。$a>0$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-25}}$

関数 $y=x^2+x$ のグラフ C_1 を，点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を中心として 180° 回転したグラフを C_2 とする。点 P を通る直線 l は，C_1，C_2 との共有点で長さの等しい 3 つの線分に切り取られる。この直線 l の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-26}}$

2 円 $(x-1)^2+y^2=81$，$(x-a)^2+(y-2a)^2=4a^2$ が接するような定数 a の値は何個あるか。また，そのうちで $|a|$ が最小となる a の値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-27}}$

3 つの円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$，$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ を周上または内部に含む円のうちで最も半径の小さい円の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{C-1-28}}$

放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-a)^2=16$ との共有点の個数を求めよ。ただし，a は任意の実数とする。

②$\boxed{\text{C-1-29}}$

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線と，点 $(a,\ a^2)$ において接する円で，中心が x 軸上にあるものと y 軸上にあるものの半径が等しくなるような a の値を求めよ。

第２章　図形と式（２）

《学習項目》

・積の領域
・軌跡（与えられた条件を満たす点全体の集合）
・軌跡の求め方
　動点を P$(x,\ y)$とおき，x と y の関係式を作る。ただし，軌跡の限界に注意する。

A 問題

②A-2-1
　点 A(6，0) と円 $x^2+y^2=9$ 上の動点 P を結ぶ，線分 AP を 1 : 2 の比に内分する点 Q の軌跡を求めよ。

②A-2-2
　次の不等式で表される領域を図示せよ。
① $(x^2+y^2-4)(y-x^2)<0$　　② $|x+y|\leqq 2$

②A-2-3
　実数$x,\ y$が不等式$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 2y-x-2\leqq 0,\ 2x+y-6\leqq 0$を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

②A-2-4
方程式 $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$ が円を表すとき
(1)　定数 k の値の範囲を求めよ。
(2)　k の値がこの範囲で変化するとき，円の中心の軌跡を求めよ。

B 問題

②B-2-1

2点$\mathrm{A}(5, 2), \mathrm{B}(3, 4)$に対して，点Pが$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=18$を満たすように動くものとする。このとき，点Pの軌跡を求めよ。また，原点Oと点Pとの距離OPの最大値，および最小値を求めよ。

②B-2-2

O(0，0)，A(3，0) と $x^2+y^2=9$ 上の動点 P によってできる△OAP の重心 G の軌跡を求めよ。

②B-2-3

2次方程式 $(1+t)x^2-2tx+(1-t)=0$ の2つの実数解を α，β とし，$t>0$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha\beta$ の値の範囲を求めよ。

(2) $X=\alpha\beta$，$Y=\alpha+\beta$ とするとき，点 P(X, Y) の描く図形をかけ。

②B-2-4

直線$mx-y=0$と$m(y-5)+x-3=0$との交点は，がすべての実数の値を動くとき，どのような図形をえがくか。

②B-2-5

次の不等式の表す領域を図示し，その面積を求めよ。

(1) $x^2+y^2\leqq 2(|x|+|y|)$　　(2) $|2x+y|+|x-2y|\leqq 3$

(3) $|y-x^2|+|y|\leqq 1$

②B-2-6

a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $y=ax+a^2-5$ が通過する領域を表す不等式を求めよ。

(2)練習用　m が 0 以上の実数全体を動くとき，xy 平面において方程式 $x^2+y^2-4mx+2my+4m^2=0$ の表す図形が通過する領域を図示せよ。

②B-2-7

放物線 $y=x^2-2x+a$ に関して，点 $(3,\ 1)$ と点 $(4,\ 2)$ が互いに反対側にあるときの a の値の範囲を求めよ。

②B-2-8

点 $(x,\ y)$ が $4\leqq|x|+|y|\leqq5$ で表される領域を動くとき，$x^2+y^2-4x-2y$ の最大値と最小値を求めよ。

②B-2-9

実数 x，y が不等式 $x^2+xy+y^2\leqq1$ を満たすとき次の問いに答えよ。

(1) $X=x+y$，$Y=xy$ とおくとき，点 $(X,\ Y)$ の存在範囲を図示せよ。

(2) $xy-3x-3y$ の最大値および最小値を求めよ。

②B-2-10

実数 x，y が不等式 $|x|\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}x^2+3$ を満たすとき，$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ のとる値の範囲を求めよ。

②B-2-11

原点 O から出る半直線上に 2 点 P，Q があり，OP・OQ$=2$ を満たしている。点 P が直線 $x-3y+2=0$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

C 問題

②C-2-1

円 $C: x^2+y^2=1$ と 2 点 A(3, 0), B(3, 3) がある。点 A を通る傾き m の直線が円 C と異なる 2 点 P, Q で交わるとき，△BPQ の重心 G の軌跡を求めよ。

②C-2-2

直線 $y=mx+2$ が円 $x^2+y^2=1$ と異なる 2 点で交わるとき，その 2 点の中点の軌跡を求めよ。

②C-2-3

a, b を $a \neq -b$ を満たす実数の組とし，直線 $ax+by-2(a+b)=0$ に原点 O から下ろした垂線の足を P とする。

(1) P の軌跡を式で表せ。

(2) O を端とする半直線 OP 上に点 Q があり OP・OQ=1 を満たすとき，Q の軌跡を式で示せ。

②C-2-4

a, b は実数の定数とする。x の 2 次方程式

$$(x-1)(x-2)=m(x-a^2-b^2)$$

がすべての実数 m に対して実数解をもつような a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

②$\boxed{\text{C-2-5}}$

点 A$(-1,\ -1)$ と点 B$(1,\ 1)$ とを結ぶ線分を $\overline{\mathrm{AB}}$ とする。

(1) 放物線 $y=x^2+ax+b$ のグラフが，$\overline{\mathrm{AB}}$ と 2 点を共有するとき，$(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ のグラフが，$\overline{\mathrm{AB}}$ と共有点をもたないとき，$(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

②$\boxed{\text{C-2-6}}$

実数 a，b が $a^2+b^2=1$ を満たしながら変化するとき，直線 $(1+a)x+(1-a)y=b$ が通過する領域を表す不等式を求めよ。

②$\boxed{\text{C-2-7}}$

$x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{ax+y+1}$ の最大値と最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-2-8}}$

x，y は不等式 $3x+y\leqq 5$，$x+3y\leqq 7$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たすとき，

(1) $x+2y$ の最大値を求めよ。

(2) $x+ay$ の最大値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-2-9}}$

放物線 $y=a(1-x^2)$ と x 軸とで囲まれる範囲内にあり，原点で x 軸に接する円の半径の最大値を求めよ。ただし $a>0$ とする。

②$\boxed{\text{C-2-10}}$

2点P，Qは，放物線 $y=x^2$ 上を $\angle\mathrm{POQ}$ が直角であるように動く。このとき，

(1) 線分PQは定点を通ることを示せ。

(2) 線分PQの長さの最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-2-11}}$

点P $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ があり，点Pは直線 $l:y=-x-3$ 上にある。いま，円 C が放物線 $m:y=x^2$ と点Q$(-2,\ 4)$ で接しているとする。このとき，点Qにおける共通接線の方程式を求めよ。また，a，b の値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-2-12}}$

座標表面上の放物線 $y=x^2$ と直線 l とが異なる2点P，Qで交わっている。この放物線の2点P，Qにおける2つの接線の交点をRとする。直線 l を表す方程式を $y=ax+b$ とするとき，

(1) 点Rの座標を a，b を用いて表せ。

(2) $-1\leqq b\leqq 1$ であるとき，点Rのとりうる範囲を求め，図示せよ。

第３章　三角関数

《学習項目》

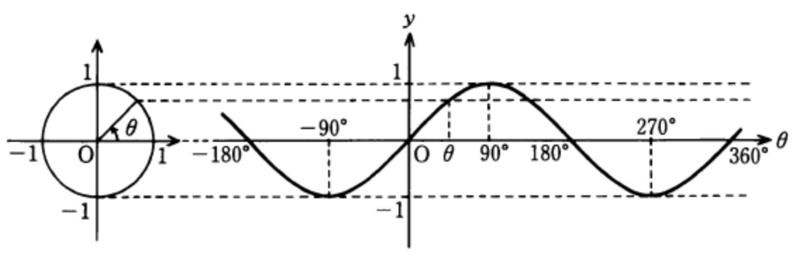
・動径と一般角
・三角関数の定義
・グラフ
・相互関係
・周期
・変換公式
・三角関数の方程式
・三角関数の不等式
・加法定理
・２倍角・半角・３倍角の公式
・三角関数の合成
・積和，和積変換

(1)　$y=\sin\theta$

定義域：任意の角．

値　域：$-1\leqq\sin\theta\leqq1$．

原点対称．

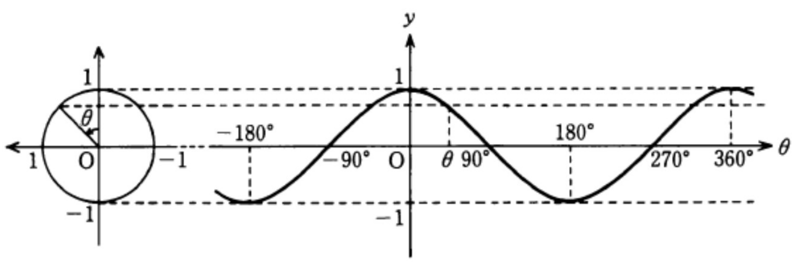


(2)　$y=\cos\theta$

定義域：任意の角．

値　域：$-1\leqq\cos\theta\leqq1$．

y 軸対称．



(3)　$y=\tan\theta$

定義域：

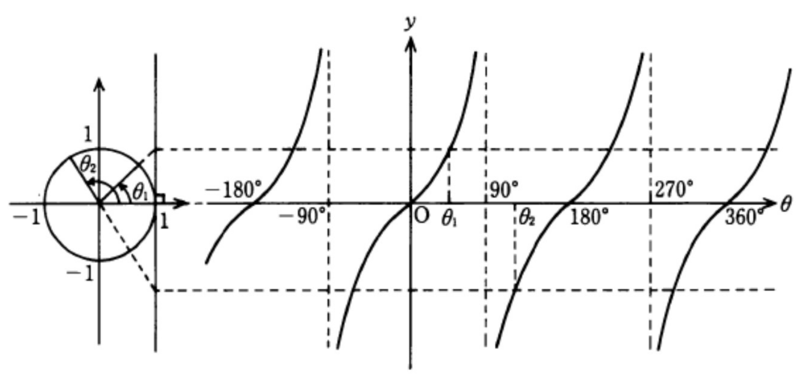
$90^\circ+180^\circ\times n$

（n は整数）以外の

任意の角．

値　域：実数全体．

原点対称．



A 問題

②A-3-1

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値

(2)　$\sin\theta = -2\cos\theta$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値

②A-3-2

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$　　(4)　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　$2\cos\theta + 1 = 0$　　(6)　$\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

②A-3-3

α の動径は第 3 象限にあり，β の動径は第 1 象限にあるとする。$\sin\alpha = -\frac{3}{4}$，$\cos\beta = \frac{2}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(3)　$\cos(\alpha+\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

②A-3-4

$\tan\alpha = -\frac{1}{3}$，$\tan\beta = -2$ のとき，$\tan(\alpha-\beta)$ を求めよ。また，$\alpha-\beta$ を求めよ。

ただし，$0 < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2}$ とする。

②A-3-5

α の動径が第 3 象限にあり，$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$　　(2)　$\cos 2\alpha$　　(3)　$\tan 2\alpha$

②$\boxed{\text{A-3-6}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos 2x + 5\cos x = 2$　　　(2)　$\sin 2x - \cos x = 0$

②$\boxed{\text{A-3-7}}$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

②$\boxed{\text{A-3-8}}$

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y = \sin\theta - \cos\theta$　　　(2)　$y = -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

(3)　$y = 3\sin\theta + 4\cos\theta$　　　(4)　$y = 2\sin\theta - \cos\theta$

②$\boxed{\text{A-3-9}}$

次の積を和または差の形に，また，和・差を積の形に変形せよ。

(1)　$2\cos 4\theta \sin 2\theta$　　　(2)　$\cos\theta \cos 3\theta$

(3)　$\sin 2\theta + \sin 4\theta$　　　(4)　$\cos 4\theta - \cos 2\theta$

B 問題

②B-3-1

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta<0$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

②B-3-2

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{17}{13}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ および $\tan\theta$ の値を求めよ。

②B-3-3

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$　　(2) $2\sin^2\theta+\cos\theta-1<0$

②B-3-4

α，β，γ は正の鋭角で，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ のとき，$\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

②B-3-5

$\theta=18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

②B-3-6

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x$

(2) $f(x)=3\sin x+\cos x$

②$\boxed{\text{B-3-7}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値および，そのときの x を求めよ。

$$f(x)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x$$

②$\boxed{\text{B-3-8}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値および，そのときの x を求めよ。

(1)　$f(x)=(\sqrt{2}\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)$

②$\boxed{\text{B-3-9}}$

(1)　$\tan x=t$ のとき，$\sin 2x$ を t を用いて表せ。

(2)　$-\pi < x < \pi$ の範囲で方程式 $(\sqrt{3}+1)\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\sin x-1=0$ を解け。

②$\boxed{\text{B-3-10}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta)=\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}$ の最大値と最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-3-11}}$

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$x^2-2(\cos\theta)x+2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ が異符号の２つの実数解をもつときの θ の範囲を求めよ。

②$\boxed{\text{B-3-12}}$

方程式 $4\sin^2 x-4(a-1)\sin x+4a-3=0$ が $0 \leqq x < 2\pi$ で異なる２つの実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。

②$\boxed{\text{B-3-13}}$

不等式 $a\sin^2 x+6\sin x+1 \geqq 0$ がつねに成り立つような a の最小値を求めよ。

C 問題

②$\boxed{\text{C-3-1}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(-2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$　　(2) $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$

(3) $\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(4) $\sin\theta+1 \geqq 2\cos^2\theta$

②$\boxed{\text{C-3-2}}$

(1) x の方程式 $\cos 2x+2k\sin x+k-4=0$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の異なる解の個数が２つであるための k の満たす条件を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\sin x+\cos x+2\sqrt{2}\sin x\cos x=a$ の解の個数を定数 a の値の範囲により分類せよ。

②$\boxed{\text{C-3-3}}$

不等式 $\sin x > \sqrt{\cos x+\cos^2 x}$ を解け。ただし，$0<x<2\pi$ とする。

②$\boxed{\text{C-3-4}}$

方程式 $k\cos\theta+\sin\theta=1$ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の範囲で解をもつような正の数 k の値の範囲を求めよ。

②$\boxed{\text{C-3-5}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$|\cos\theta-\cos 2\theta|=l$ $(l \geqq 0)$ の解の個数を定数 l の値により分類せよ。

②$\boxed{\text{C-3-6}}$

y 軸上の２点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$ と動点 P$(a,\ 0)$ $(a>0)$ を考える。$\theta=\angle\mathrm{APB}$ とおく。

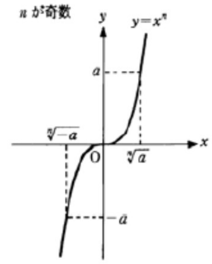
(1) $\tan\theta$ を a で表せ。　　(2) θ が最大になる a を求めよ。

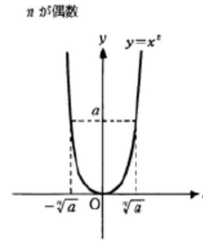
第４章　指数対数関数

《学習項目》

・ｍ乗根

$$x=\sqrt[n]{a}\iff\begin{cases}x^n=a & (n\text{が奇数})\\ x^n=a,\ x\geqq 0 & (n\text{が偶数})\end{cases}$$





・指数法則
・指数の拡張
・指数関数とそのグラフ
・指数の方程式・不等式
・対数関数
・対数法則
・対数関数のグラフ
・対数の方程式
・対数の不等式
・常用対数

A 問題

②A-4-1

次の３つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　3^{18}，5^{12}，15^{6}　　(2)　$\sqrt[6]{11}$，$\sqrt[4]{5}$，$\sqrt[3]{3}$

②A-4-2

$a>0$，$b>0$ とする。次の (1)～(4) を a^r の形に書け。また，(5)，(6) を a^rb^s の形に書け。

(1)　$a^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{2}{3}}$　　(2)　$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[4]{a^3}$　　(3)　$\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt{a}\div\sqrt[6]{a^5}$

(4)　$\sqrt{a\times\sqrt[3]{a}}$　　(5)　$\left(a^{\frac{3}{2}}b^2\right)^2$　　(6)　$\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2\times a^{\frac{5}{3}}$

②A-4-3

次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　　(2)　$\sqrt[3]{\sqrt{125}}\times\sqrt[3]{-25}\div\sqrt[6]{5}$

(3)　$\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{512}$　　(4)　$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$

②A-4-4

次の方程式を解け。

(1)　$4^x-10\cdot 2^x+16=0$　　(2)　$4^x-2^{x+1}-8=0$

②A-4-5

$\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$ とするとき，次の式を a，b を用いて表せ。

(3)　$\log_2 75$　　(4)　$\log_2 0.3$

(5)　$\log_{16} 15$　　(6)　$\log_3 45$

②A-4-6

0 でない実数 x，y，z が $3^x=5^y=15^z$ を満たすとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

②A-4-7

次の方程式を解け。

(1)　$\log_2(x+1)=5$　　(2)　$\log_3(2x+1)+\log_3(x-3)=2$

②A-4-8

次の不等式を解け。

(1)　$\log_4(x+3)\geqq\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>3$

②A-4-9

6^{52} の桁数を調べよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

B 問題

②B-4-1

3 つの数 $\log_3 6$，$\log_5 10$，$\dfrac{3}{2}$ の大小を不等号を用いて表せ。

②B-4-2

(3) $\begin{cases} 8^{x-1}=16^{y+1} \\ 9^x=27^{y-1} \end{cases}$

(4)* $\begin{cases} 2^x+3^y=7 \\ 4^x-2^{x+1}-2\cdot 3^y=2 \end{cases}$

(5) $2^x\cdot 2^y-2^{x+1}-2^y+2=0$

近畿大

②B-4-3

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 3+2\log_4 28-6\log_8\sqrt{21}$

(2) $\log_8(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$

②B-4-4

$2^x=5^y=10^z$ $(x\neq 0)$ のとき，$xy-yz-zx$ の値を求めよ。

②B-4-5

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|\log_3 x+3\log_x 3|=4$

(2) $x^{\log_{10}x}=\sqrt[4]{1000x}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>-2$

(4) $\log_2 x+3\log_x 4-7<0$

(5) $\log_a(x-1)+\log_a(x+1)>\log_a(17-3x)$

(6) $x^{2x^3-3x^2}>x^{3x-2}$ $(x>0)$

②B-4-6

$\log_a(ax^2+2x+2)>\log_a 2+\log_a(x^2+5x+7)$ がすべての実数 x に対して成り立つための a の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

②B-4-7

$f(x)=(\log_4 16x)(\log_2 4x)$ の最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-4-8}}$

$x \geqq \dfrac{1}{2}$，$y \geqq \dfrac{1}{2}$，$x^3y=32$ のとき，$\log_2 x \times \log_2 y$ の最大値と最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-4-9}}$

$f(x)=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-4-10}}$

$x>1$ のとき，$f(x)=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-2(\log_2 x+\log_x 2)-1$ の最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-4-11}}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。このとき，

(1)　n^{13} が 10 桁の数となる自然数 n を求めよ。

(2)　18^{50} の最高位の数字を求めよ。

②$\boxed{\text{B-4-12}}$

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$(\log_x y)^2>2+\log_x y$

(2)　$\log_x y+6\log_y x<5$

C 問題

②C-4-1

$x=(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}$，$y=(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}$ のとき，$x-y$ の値を求めよ。

②C-4-2

方程式 $4^x+4^{-x}+a(2^x+2^{-x})+6-a=0$ が異なる 4 つの実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。

②C-4-3

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が直線 $x+y=2$ の上を動くとき，$z=-4^x-4^y+2^{x+1}+2^{y+1}+3$ の最大値を求めよ。

②C-4-4

x に関する方程式 $(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^4+2(t^2+1)=0$ が実数解 α，β をもつとき

(1)　t の存在範囲を求めよ。

(2)　$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$ の存在範囲を求めよ。

②C-4-5

x についての方程式 $mx+n=|\log_2 x|$ （m，n は定数） は異なる 3 つの実数解をもち，それらは 1 : 2 : 3 の比をなすという。これらの解を求めよ。

②C-4-6

(1)　方程式 $\log_2(2x+3y-2)=\log_2 x+\log_2(y+1)$ を満たす整数 x，y を求めよ。

(2)　$2(\log_y z+\log_z x+\log_x y)=2(\log_z y+\log_x z+\log_y x)=7$，$xyz=2^{10}$，$x\leqq y\leqq z$ を満たす正の整数解 x，y，z を求めよ。

②$\boxed{\text{C-4-7}}$

自然数 $N=7^{777}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，次の値（小数第５位を四捨五入したもの）を用いてよい。

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}7=0.8451$

(1)　N は何桁の数か。

(2)　N の先頭の数字は何か。

(3)　N の末尾の数字は何か。

②$\boxed{\text{C-4-8}}$

実数 x，y が $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=2(\log_2 x^2+\log_2 y^2)$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおき，$x\geqq1$，$y\geqq1$ のとき，X，Y を軸としてグラフをかけ。

(2)　x，y の範囲が $x\geqq1$，$y\geqq1$ のとき，$\log_2 xy^2$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　x，y の範囲が $x\geqq1$，$0<y\leqq1$ のとき，$\log_2 xy^2$ のとりうる値の範囲を求めよ。

第５章　数学Ⅱの微分

《学習項目》

・極限
・微分係数と導関数
・微分公式
・関数の増加減少，極値，グラフ

A 問題

③5-A-9
次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+x-1)}{(x-2)(x+1)}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{2x^2-5x-3}$

③5-A-10
定義に従って，次の関数の与えられた値における微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x+3$　$(x=1)$　　(2)　$f(x)=3x^2$　$(x=2)$

③5-A-11
次の関数を微分せよ。

(1)　$y=2x^3-5x+3$　　(2)　$y=(3x-1)(x^2+1)$

(3)　$y=2x^4-6x^3+3x-1$　　(4)　$y=(x^2-1)(x^2+1)$

③5-A-12
次の関数のグラフ上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^3-3x$，点 $(1,\ -2)$　　(2)　$y=5x-x^3$，点 $(2,\ 2)$

③5-A-13
関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

③5-A-14
次の関数の増減・極値を調べ，グラフをかけ。

(1)　$y=x^3-4x^2+4x$

(2)　$y=x^3-3x^2+3x$

(3)　$y=3x^4-4x^3-12x^2$

B 問題

③5-B-1

$$\lim_{x \to a}\frac{3x^2+5bx-2b^2}{x^2-(a+2)x+2a}=7$$

③5-B-2

3 次式 $f(x)$ が $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$，$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)}{x-2}=0$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

③5-B-3

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数が 2 のとき次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{h \to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$

(2) $\lim_{h \to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-h)}{3h}$

③5-B-4

(1)* $\lim_{x \to a}\frac{x^3f(x)-a^3f(a)}{x^3-a^3}$ を a，$f(a)$，$f'(a)$ で表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が微分可能なとき，$\lim_{x \to 1}\frac{f(2x)-xf(2)}{x-1}$ を $f(2)$，$f'(2)$ で表せ。

③5-B-5

点 $(-2,\ 4)$ から，曲線 $y=-x^3+3x+2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

③5-B-6

放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $(-1,3)$ を通り，かつ点 $(2,6)$ で $y=x^3-x$ と共通接線を持つとき，a,b,c の値を求めよ。

③$\boxed{\text{5-B-7}}$

2 曲線 $y=x^3+3$，$y=x^3-1$ のどちらにも接する直線の方程式を求めよ。

③$\boxed{\text{5-B-8}}$

次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=3x^4-16x^3+18x^2+8$　　　(2)　$y=-x^4+\dfrac{8}{3}x^3-2x^2$

③$\boxed{\text{5-B-9}}$

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が次の 2 条件を満たすとき，a，b，c，d の値を求めよ。

(i)　点 $(1,\ f(1))$ における接線は，$y=4x-3$ である。

(ii)　$x=-1$ において，極値として -7 をとる。

③$\boxed{\text{5-B-10}}$

3 次関数 $f(x)=x^3-3px^2+3px-1$ について，

(1)　極値をもたないための p の値の範囲を求めよ。

(2)　$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で極小値をもつための p の範囲を求めよ。

③$\boxed{\text{5-B-11}}$

方程式 $2x^3+3x^2-12x-k=0$ は，異なる 3 つの実数解 α，β，γ をもつとする。$\alpha<\beta<\gamma$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$-2<\beta<-\dfrac{1}{2}$ となるとき，α，γ の値の範囲を求めよ。

③$\boxed{\text{5-B-12}}$

曲線 $y=x^3-x$ の接線で点 $(a,\ b)$ を通るものがちょうど２本存在する。

(1)　a，b の満たすべき条件を求めよ。

(2)　その２本の接線が直交するときの a，b の値を求めよ。

③$\boxed{\text{5-B-13}}$

$x^4-2x^3-2x^2+a \geqq 0$ がすべての実数 x に対して成立するような a の値の範囲を求めよ。

C 問題

③5-C-1

$f(0)=0$ および $(x+1)f'(x)-2f(x)+1=0$ を満たす整式 $f(x)$ に関して，

(1)　$f(x)$ の最高次の項を ax^n として，n を求めよ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

③5-C-2

関数 $f(x)$ は任意の実数 x，y に対してつねに $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ を満たすとする。このとき

(1)　$f(0)$ を求めよ。　　(2)　$f'(0)=1$ のとき，$f'(x)$ を求めよ。

③5-C-3

関数 $g(x)$ について，$g(1)=\alpha$，$g'(1)=\beta$ とするとき，次の極限を α と β で表せ。

(1)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{g((t+1)^2)-g(1)}{t}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2g(x)-g(1)}{x-1}$

③5-C-4

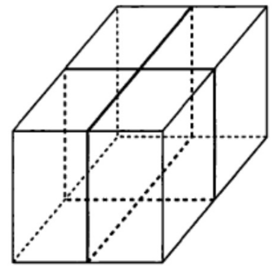
2つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ は，2点 $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ で交わっていて，点 $(2,\ 4)$ におけるそれぞれの放物線の接線のなす角は 45° である。a，b，c を求めよ。

③5-C-5

$f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値およびそのときの x の値を求めよ。

③$\boxed{\text{5-C-6}}$

図のように直方体の各辺に平行に２本のひもがかけてある。ひもの長さの和は 16 で，直方体の表面積は 16 である。このような直方体の体積 V の最大値を求めよ。



③$\boxed{\text{5-C-7}}$

a を実数の定数とし，$f(y)=y^2+ay+a^2-1$，$g(x)=4x^3-3x$ とする。

(1)　x についての方程式 $g(x)=c$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2)　x についての方程式 $f(g(x))=0$ が異なる 6 個の実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

③$\boxed{\text{5-C-8}}$

すべての $x\geqq 0$ に対して，$x^3-3x^2\geqq k(3x^2-12x-4)$ が成り立つ定数 k の値の範囲を求めよ。

③$\boxed{\text{5-C-9}}$

a を定数とし，$f(x)=x^4+x^2-6x$，$g(x)=-2x^2-16x+a$ とする。

(1)　どのような実数 x に対しても $f(x)\geqq g(x)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2)　どのような実数 x_1，x_2 に対しても $f(x_1)\geqq g(x_2)$ となる a の値の範囲を求めよ。

③$\boxed{\text{5-C-10}}$

曲線 $y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における接線を l，l が再びこの曲線と交わる点を Q，Q におけるこの曲線の接線を m とし，２直線 l，m がなす角のうち鋭角であるほうを θ とする。$a>0$ として，次の問いに答えよ。

(1)　$\tan\theta$ を a で表せ。

(2)　θ が最大になるときの a の値と $\tan\theta$ の値を求めよ。

第６章　数学Ⅱの積分

《学習項目》

・不定積分とその公式
・定積分とその公式
・定積分と面積
・1/6公式
・偶関数と奇関数の積分公式
・絶対値の積分
・微分積分学の基本定理
・積分方程式

A 問題

③6-A-1

次の不定積分を求めよ。

$$\int(2y^2+2y+3)dy$$

③6-A-2

等式$\displaystyle\int_0^2(2x^2+ax-5)dx=\frac{4}{3}$ を満たす定数 a の値を求めよ。

③6-A-3

次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^4-5x^3+x^2+9x)dx$　　(2)　$\displaystyle\int_{-3}^{3}(x+1)(x+2)(x+3)dx$

③6-A-4

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^{3}(x-2)^2dx$$

③6-A-5

次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2(x-5)$　　(2)　$y=-x^3-x^2+x+1$

③$\boxed{\text{6-A-6}}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3}|x-2|\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2-4x+3|\,dx$

③$\boxed{\text{6-A-7}}$

等式 $f(x)=3x^2+2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

③$\boxed{\text{6-A-8}}$

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2+6x+5$　　　(2) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x+a$

B 問題

③$\boxed{\text{6-B-1}}$

$S=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)^2dx$ の最小値と，そのときの定数 a，b の値を求めよ。

③$\boxed{\text{6-B-2}}$

$f(x)=\begin{cases} x & (x \leqq 3) \\ -3x+12 & (x>3) \end{cases}$ のとき，$x \geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ と定める。このとき，$g(x)$ を求めよ。

③$\boxed{\text{6-B-3}}$

曲線 $y=2x^3-5x^2+x+2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

③$\boxed{\text{6-B-4}}$

2 つの放物線 $y=-x^2+k$ と $y=x^2+1$ で囲まれた部分の面積 S が $\dfrac{8}{3}$ のとき，k の値を求めよ。

③$\boxed{\text{6-B-5}}$

点 $(1,\ -3)$ を通って，曲線 C : $y=x^2$ に 2 本の接線を引くとき，接線の方程式は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，この 2 接線と C とで囲まれた図形の面積 S は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

③$\boxed{\text{6-B-6}}$

放物線 $y=x^2+ax+b$ が曲線 $y=x^2(x-2)$ と，$x=1$ で共通の接線をもつとき，定数 a と b の値およびこの共通接線の方程式を求めよ。

また，この放物線と共通接線と直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

③$\boxed{\text{6-B-7}}$

曲線 C：$y=x^3-x$ 上の点 A(2，6) における接線と曲線 C で囲まれる面積を求めよ。

C 問題

③6-C-1

$f(x)f'(x)=\int_0^x f(t)dt+\frac{4}{9}$ を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。

③6-C-2

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ は原点 $(0,\ 0)$ を通り，原点での接線の傾きが 2 であるという。さらに，すべての 1 次関数 $g(x)$ に対して，つねに $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ が成立するという。このとき，a，b，c，d を求めよ。

③6-C-3

2 つの曲線 $y=x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x$，$y=x^2-ax$ が囲む 2 つの部分の面積が等しいときの a $(a>0)$ の値を求めよ。

③6-C-4

2 つの曲線 $y=x(x-1)^2$，$y=kx^2$ $(k>0)$ について

(1)　この 2 つの曲線は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(2)　この 2 つの曲線で囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

③6-C-5

曲線 C_1：$y=x^3-x$ を x 軸方向に a $(a>0)$ だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする。2 曲線が異なる共有点をもつとき，この 2 曲線で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ。

③ $\boxed{\text{6-C-6}}$

2つの放物線 $C_1: y=x^2-(a+1)x+a$ と $C_2: y=x^2-(a-1)x-a$ がある。ただし，$-1<a<1$ とする。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 および l によって囲まれた図形の面積を求めよ。

③ $\boxed{\text{6-C-7}}$

xy 平面上に曲線 $C: y=x^3-x^2$ と直線 $l: y=mx$ がある。

(1)　C と l が $x>0$ の範囲で相異なる2つの共有点をもつための m の条件を求めよ。

(2)　(1)の条件のもとで m を変化させるとき，C と l で囲まれる部分の面積の和を最小にする m の値を求めよ。

(3)　(2)における面積の和の最小値を求めよ。

③ $\boxed{\text{6-C-8}}$

曲線 $y=x^4-2x^3-3x^2+5x+5$ に異なる2点で接する接線の方程式を求めよ。また，この曲線と接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

③ $\boxed{\text{6-C-9}}$

関数 $g(x)=\int_x^{x+1}|t(t-3)|dt$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

③ $\boxed{\text{6-C-10}}$

放物線 $y=x^2$ …… ① と半径 r の円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ …… ② がある。

(1)　放物線①と 円② が2点で接するとき，半径 r の値を求めよ。ただし，「2曲線が接する」とは，その共有点における接線が一致することを表すものとする。

(2)　(1)で求めた r の値に対して，①と②で囲まれる部分の面積を求めよ。

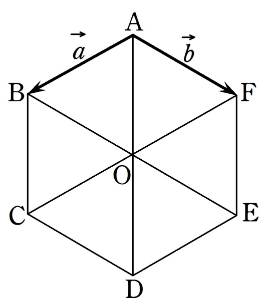
第７章　平面ベクトル

《学習項目》

・ベクトルと有向線分
・和・差・実数倍
・位置ベクトル
・成分表示
・ベクトルの平行
・内分公式，外分公式
・中点，重心
・直線上の点の表し方
・直線のベクトル方程式（方向，法線）
・斜交座標
・円のベクトル方程式
・単位ベクトル
・ベクトルにおける角の二等分
・内積

A 問題

②A-7-1



正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{BC}$　　(2)　$\overrightarrow{EC}$　　(3)　$\overrightarrow{BD}$　　(4)　$\overrightarrow{CA}$

②A-7-2

△OAB において，OA の中点を C，BC の中点を D，DA の中点を E とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，AB を $2:5$ に内分する点を F とするとき，O，E，F は一直線上にあることの理由を述べよ。

②$\boxed{\text{A-7-3}}$

△OABの辺OA，OB上にそれぞれP，Qを，OP : PA＝3 : 2，OQ : QB＝5 : 1となるようにとる。AQとBPの交点をRとし，ORの延長がABと交わる点をSとする。

(1)　$\overrightarrow{OR}$を$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$と$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$で表せ。　(2)　OR : RSを求めよ。

②$\boxed{\text{A-7-4}}$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$の値を求めよ。

②$\boxed{\text{A-7-5}}$

△ABCがAB＝8，BC＝4，CA＝6を満たすとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$の値と△ABCの面積を求めよ。

②$\boxed{\text{A-7-6}}$

$\vec{a}$と$\vec{b}$は単位ベクトルで，$(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{b}$，$|\vec{a}+t\vec{b}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角$\theta$を求めよ。ただし，$t>0$とする。

②$\boxed{\text{A-7-7}}$

$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(-7,\ -9)$がある。実数tを変化させるとき，$\vec{c}=t\vec{a}+\vec{b}$の絶対値$|\vec{c}|$の最小値とそのときのtの値を求めよ。

②$\boxed{\text{A-7-8}}$

次の直線の方程式を，媒介変数tを用いて表せ。また，tを消去した式で表せ。

(1)　点 A$(-5,\ 3)$を通り，ベクトル$\vec{d}=(-1,\ 3)$に平行な直線

(2)　2点 A$(-5,\ -5)$， B$(-2,\ 3)$を通る直線

②$\boxed{\text{A-7-9}}$

次の直線，円の方程式を，ベクトルを利用して求めよ。

(1)　点 A$(-1,\ 2)$を通り，$\vec{n}=(4,\ 3)$が法線ベクトルである直線

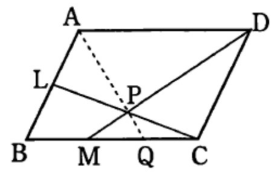
(2)　中心が C$(3,\ -5)$，半径 6の円

(3)　2点 A$(7,\ -3)$， B$(-3,\ 5)$を直径の両端とする円

B 問題

②B-7-1

右の平行四辺形 ABCD において，L は AB の中点，M は BC を 1:2 に内分する点とし，P は CL と DM の交点とする。AP の延長と BC の交点を Q とするとき，BQ:QC を求めよ。



②B-7-2

△ABC と点 P があり，$r\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{BP}}+t\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たしているとする。$r>0$，$s>0$，$t>0$ のとき，△PAB，△PBC，△PCA の面積比を r，s，t で表せ。

②B-7-3

△ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$ が $\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ のとき，△ABC の面積を求めよ。

②B-7-4

AB＝3，BC＝5，AC＝4 の三角形 ABC の内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ で表せ。

②B-7-5

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が 60° で，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ とする。O から直線 AB に下ろした垂線の足を H とするとき，AH:HB を求めよ。

②B-7-6

三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$ である。辺 AC 上の点 D は BD⊥AC を満たし，辺 AB 上の点 E は CE⊥AB を満たす。CE と BD の交点を H とする。
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

②$\boxed{\text{B-7-7}}$

AB=4，BC=6，AC=5 の三角形 ABC の外心を O とする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ として $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ で表せ。

②$\boxed{\text{B-7-8}}$

△ABC は点 O を中心とする半径 1 の円に内接していて，
$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしているという。

(1)　内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ を求めよ。　　(2)　BC を求めよ。

(3)　△ABC の面積を求めよ。

②$\boxed{\text{B-7-9}}$

(1)　平面上の 2 点 A，B に対し，$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=6$ を満たす点 P はどのような図形を描くか。

(2)　△ABC と点 P があり，$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たしている。この点 P が △ABC の内部にあるように k の値の範囲を定めよ。

②$\boxed{\text{B-7-10}}$

平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A，B，C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}$

(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

(3)*　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}\leqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$

②$\boxed{\text{B-7-11}}$

三角形 ABC を含む平面上の点 P が
$a\geqq0$，$b\geqq0$，$1\leqq a+b\leqq3$ となるように a，b が変化する。
$\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ を満たすとき，P はどのような範囲にあるか図示せよ。

C 問題

②C-7-1

平行四辺形 ABCD の辺 AB を $m:n$ に内分する点を E，辺 BC を 3:2 に内分する点を F とする。また，線分 AF と DE の交点を P，対角線 AC と BD の交点を Q とし，さらに $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n で表せ。

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ が $\overrightarrow{AD}$ と平行なとき，$m:n$ を求めよ。

②C-7-2

三角形 ABC において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，さらに $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を $\vec{b}\cdot\vec{c}=m$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$ とおく。

(1)　直線 AB に関して，点 C と対称な点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ。

(2)　直線 AC に関して点 B と対称な点を E とし，ベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{BC}$ が平行なとき，三角形 ABC はどのような三角形か。

②C-7-3

平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}+3\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすように動く。このとき $|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値を R，最小値を r とする。R と r を求めよ。

②C-7-4

$k\geqq 0$，$l\geqq 0$，$2k+3l=1$，$1\leqq m\leqq 2$ とするとき，
$k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{PO}=\vec{0}$ を満たす P の存在範囲を図示せよ。また，その面積を S とするとき，△OAB の面積と S の比を求めよ。

②$\boxed{\text{C-7-5}}$

平面上の 3 点を A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 0)$，C$(2,\ 4)$ とし，△ABC 内に点 P$(2,\ 2)$ をとる。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすように，m，n の値を求めよ。

(2) 原点 O から点 Q$(x,\ y)$ へ向かうベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されている。r，s，t が $r+s+t=2$，$r\geqq 0$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たすとき，そのような点 Q の存在する範囲を図示せよ。

②$\boxed{\text{C-7-6}}$

△ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に引いた垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする。$0<t<1$ の範囲で関係式
$(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-t(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値を求めよ。

(3) $\angle$BAC の大きさを求めよ。

第８章　空間ベクトル

《学習項目》

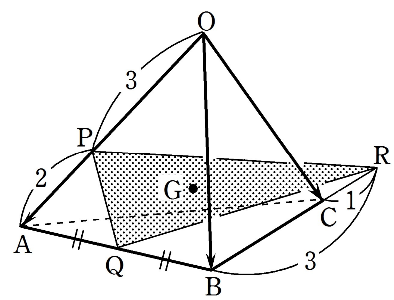
・空間内の平面（2 種）
・空間内の直線，空間内の球面
・点と平面の距離公式
・外積

A 問題

②A-8-1

右の図の四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　線分 OA を 3 : 2に内分する点 $P(\vec{p})$
(2)　線分 AB の中点 $Q(\vec{q})$
(3)　線分 BC を 3 : 1に外分する点 $R(\vec{r})$
(4)　△PQR の重心 $G(\vec{g})$



②A-8-2

3 点 A (7，2，-1)， B (-3，4，5)， C (-2，6，3) に対して，次の各点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点　　(2)　線分 AB を 2 : 1 に内分する点，外分する点
(3)　線分 AB を 3 : 5 に内分する点，外分する点
(4)　△ABC の重心

②A-8-3

空間内に 3 点 A (-1，0，-2)， B (1，2，-3)， C (2，-2，4) がある。次のものを求めよ。

(1)　cos∠BAC の値　　(2)　△ABC の面積 S

②$\boxed{\text{A-8-4}}$

次の 2点 A， Bを通る直線上の点 P の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。
また， tを消去して直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(-2,\ 1,\ -1)$，B$(1,\ 3,\ 2)$　　(2)　A$(0,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ 2,\ 2)$

②$\boxed{\text{A-8-5}}$

次のような平面の方程式を求めよ。

(1)　点 A$(1,\ 3,\ -4)$を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ 5,\ 2)$に垂直な平面

(2)　平面 $2x+y-4z-3=0$に平行で，点 B$(2,\ 0,\ -1)$を通る平面

②$\boxed{\text{A-8-6}}$

2 点 A(4， -1， 3)， B(0， 11， 9) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

②$\boxed{\text{A-8-7}}$

四面体 OABCの辺 OA， OB， OCをそれぞれ $1:1$，$2:1$，$3:1$ に内分する点を P， Q, R とする。点 O と △PQRの重心 Gを通る直線が平面 ABCと交わる点を K とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ で表せ。

②$\boxed{\text{A-8-8}}$

四面体 ABCD の辺 BC の中点を P，線分 PD の中点を Q，線分 AQ の中点を R とする。
また，直線 BR と平面 ACD の交点を S とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ で表せ。

(2)　直線 AS と CD の交点を T とするとき， CT : TD を求めよ。

B 問題

②B-8-1

次のようなベクトルを求めよ。

(1)　$\vec{a}=(1,\ 2,\ -5)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直で x 成分が 1 のベクトル

(2)　$\vec{a}=(2,\ 6,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 0,\ -1)$ の両方に垂直で大きさが 9 のベクトル

(3)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 2)$ の両方に垂直な単位ベクトル

②B-8-2

(1)　A(0，1，1)，B(0，0，4)，C(2，3，3) とする。点 A から直線 BC に引いた垂線の足 H の座標を求めよ。

②B-8-3

点 A(1，0，2)，　B(0，1，0)，　C(2，1，−3) を通る平面の方程式を求めよ。

②B-8-4

原点を通り，方向ベクトルが (1，1，1) の直線を l とする。

(1)　点 P(0，1，0) から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2)　直線 l に関して点 P(0，1，0) と対称な点 Q の座標を求めよ。

②$\boxed{\text{B-8-5}}$

(1) 空間において，$\vec{a}=(3,\ 1,\ -2)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -2)$ とする。s，t をそれぞれ実数として，2 つの直線を $l:\vec{p}=(1,\ -1,\ -2)+s\vec{a}$，$m:\vec{p}=(\alpha,\ \beta,\ 0)+t\vec{b}$ とする。l と m が交わるための α，β の関係式を求めよ。

(2) 点 P は直線 l 上を動き，点 Q は 2 点(1，3，5)，(5，1，1) を通る直線上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

②$\boxed{\text{B-8-6}}$

3 点 A(3，1，1)，B(1，2，3)，C(5，4，3) を含む平面を π とする。点 P(2，3，5) から π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

②$\boxed{\text{B-8-7}}$

空間に 3 点 A(2，−2，−1)，B(−1，2，2)，C(−1，−2，0) をとる。このとき，

(1) △ABC の面積 S を求めよ。

(2) 原点 O から△ABC を含む平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ。

②$\boxed{\text{B-8-8}}$

四面体 OABC の内部の点 P が，$2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5\overrightarrow{\mathrm{BP}}+7\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たしているとき，4 つの四面体 PABC，PBCO，PCOA，POAB の体積の比を求めよ。

②B-8-9

1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，2辺AB, OCの中点をそれぞれM，Nとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，

(1) ベクトル $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{BN}$ の内積を求めよ。

(3) $\angle BNM=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

②B-8-10

空間内に1辺の長さ1の正四面体OABCがある。OAの中点をL，OBを2:1に内分する点をM，OCを1:2に内分する点をNとする。$\triangle LMN$ の面積を求めよ。

②B-8-11

球面 $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=4^2$ と次の平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

(1) xy 平面　(2) yz 平面　(3) zx 平面　(4) 平面 $y=-1$

②B-8-12

座標空間において，原点Oを通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 4,\ 1)$ に平行な直線を l，点 $A(0,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径1の球面を S とする。直線 l と球面 S の交点のうち原点Oに近いものをPとおく。

(1) 点Pの座標を求めよ。

(2) 線分POと線分APを含む平面上で，線分APを含む直線に関して，点Oと対称な点をRとする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{PR}$ を求めよ。

C 問題

②C-8-1

xyz 空間内に 4 点 O(0, 0, 0), A(0, 0, 2), B(2, 0, 0), C(1, $\sqrt{3}$, 0) がある。点 P が線分 AB 上を動くとき，三角形 OPC の面積の最大値と最小値を求めよ。

②C-8-2

空間において，3 点 A(0, 0, 2), B(1, 0, 1), C(0, 1, 3) を通る平面 π がある。a を定数とし，点 P(a, $a+4$, 0) から平面 π に垂線 l を下ろす。l と π の交点を H とするとき，H が △ABC の内部にあるための a の値の範囲を求めよ。

②C-8-3

$\mathrm{O}(0,0,0)$ を原点とし，空間内に 4 点 $\mathrm{A}(2,0,0)$, $\mathrm{B}(0,3,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$, $\mathrm{E}(0,1,0)$ をとる。

(1) 点 P は線分 BC 上にあり，三角形 AEP は三角錐 OABC の体積を二等分するという。このとき，P の座標を求めよ。

(2)【計算】点 Q が線分 BC 上を動くとき，三角形 AEQ の面積が最小になるときの Q の座標と，そのときの三角形 AEQ の面積を求めよ。

②C-8-4

xyz 空間に 4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) を頂点とする四面体 Δ を考える。点 P, Q をおのおの Δ の辺 AC, BC の中点，点 R を辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点とする $(0<t<1)$。

(1) 三角形 PQR の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を求めよ。

(2) 面 PQR に垂直なベクトルを 1 つ求めよ。

(3) 重心 G を通り面 PQR に垂直な直線と xy 平面の交点を H とおく。点 H が $0<t<1$ の範囲でどのような軌跡を描くか図示せよ。

②$\boxed{\text{C-8-5}}$

3 次元空間に原点 O と 3 定点 P_1，P_2，P_3 がある。ただし，ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$ は互いに直交する単位ベクトルとする。点 Q が $|\overrightarrow{P_1Q}|^2+2|\overrightarrow{P_2Q}|^2+3|\overrightarrow{P_3Q}|^2=12$ を満たすように動くとき，Q の描く図形が球面となることを示し，その半径を求めよ。

②$\boxed{\text{C-8-6}}$

四面体 OABC の辺 OA，OB 上にそれぞれ点 D，E をとる。ただし，点 D は点 A，O とは異なり，AE と BD の交点 F は線分 AE，BD をそれぞれ $2:1$，$3:1$ に内分している。また，辺 BC を $t:1$ $(t>0)$ に内分する点 P をとり，CE と OP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ および t を用いて表せ。

(3) 直線 FQ と平面 ABC が平行になるような t の値を求めよ。

②$\boxed{\text{C-8-7}}$

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする。いま，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ が満たされているとする。

(1) $\triangle$ABC は正三角形であることを示せ。

(2) $t=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ とおくとき，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$ を t を用いて表せ。また，t は $-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ を満たすことを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積 V を t を用いて表せ。

(4) V が最大値をとるときの $\angle$AOB の大きさを求めよ。

補充問題

②C-8-8

点Oを中心とする半径1の球面上に4点A，B，C，Dがあって，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ が成立しているとき，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

②C-8-9

xyz 空間に点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$，$D(1,\ 1,\ 1)$ をとる。点A，B，C，Dを頂点とする四面体 T について，次の問いに答えよ。

(1) z 軸上の点 $(0,\ 0,\ a)$ を通り，z 軸に垂直な平面で T を切ったときの切り口の頂点P，Q，R，Sの座標を，a を用いて表せ。ただし，a は $0<a<1$ なる定数とし，P，Q，R，Sはそれぞれ線分AC，AD，BD，BC上にあるものとする。

(2) (1)における切り口の面積 $S(a)$ と，その最大値，およびそのときの a の値を求めよ。

②C-8-10

(1) 1辺の長さが12の正四面体をOABCとする。このとき，$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$，$r+2s+2t=1$ を満たす点P全体は平面になる。その平面を π とするとき，平面 π で切り取られる正四面体の切り口の面積を求めよ。

(2) 4点 $A(0,\ -1,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(3,\ 0,\ 3)$，$D(3,\ 0,\ -3)$ を頂点とする四面体ABCDについて，この四面体ABCDを平面 $x=k$ で切った切り口が正方形となるように k の値を定めよ。

②C-8-11

空間に点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ をとる。次に，$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CO'}=2\overrightarrow{CO}$ によって点 A'，B'，C'，O' をとる。

(1) 点 A'，B'，C'，O' の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 線分 $C'O'$ が xy 平面と交わる点Pの座標を求めよ。また，三角形 $A'B'P$ の面積 S を求めよ。

(3) 四面体 $O'A'B'C'$ の体積は四面体OABCの体積の何倍か。

②C-8-12

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ を満たしており，4 点 P，Q，R，S を $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OS}=x\overrightarrow{OD}$ によって定める。この 4 点 P，Q，R，S が同一平面上に存在するように x を定めよ。

②C-8-13

空間内の 4 点 O，A，B，C に対して $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。これらのベクトルの内積が $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}$ を満たすとき，

(1) 点 C を通り，三角形 OAB を含む平面に垂直な直線が，この平面と交わる点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。

②C-8-14

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。辺 OA，BC上にそれぞれ点 M，N をとり，$|\overrightarrow{OM}|=x$，$|\overrightarrow{BN}|=y$ とおく。

(1) ベクトル $\overrightarrow{MN}$ を $\overrightarrow{MN}=u\vec{a}+v\vec{b}+w\vec{c}$ の形に x，y を用いて表せ。

(2) M，N がそれぞれ辺OA，BC 上を動くとき，$|\overrightarrow{MN}|$ の最小値を求めよ。

②C-8-15

空間内に定点 A(1，1，1) がある。xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円があり，点 P，Q はこの円周上を PQ が直径となるように動く。

(1) ∠PAQ の 最大値と最小値を求めよ。

(2) △PAQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

②C-8-16

O を原点とする xyz 空間に 3 点A(1，0，0)，T(0，t，0)，B(0，0，1) がある。直線 AT 上の点 P を，内積 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AT}=-\frac{1}{2}$ を満たすようにとる。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OT}+(1-s)\overrightarrow{OA}$ と表すとき，s を t を用いて表せ。

(2) P の座標を $(X,\ Y,\ 0)$ とするとき，X，Y を t を用いて表せ。

(3) X と Y の間に成り立つ関係式を求め，xy 平面上に P の描く曲線を図示せよ。

②$\boxed{\text{C-8-17}}$

xyz 空間において，xy 平面上の直線 $l : x=y$，$z=0$ と点 A(1，3，4)をとる。

(1) A から l に下ろした垂線の足 B の座標を求めよ。

(2) l を軸とする回転により，A が xy 平面上の点 C に移ったとする。C の座標を求めよ。

②$\boxed{\text{C-8-18}}$

座標空間内において，原点を中心とする半径 1 の球面を S とし，その上に点 N(0，0，1) をとる。球面 S 上の N と異なる点 P(p，q，r) に対して，直線 NP と xy 平面との交点を Q(u，v，0) とする。

(1) u，v を p，q，r を用いて表せ。

(2) yz 平面を x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動して得られる平面を T とする。点 P が球面 S と平面 T との交線の上を動くとき，対応する点 Q が xy 平面上に描く軌跡の方程式を求め，それがどのような図形か述べよ。

②$\boxed{\text{C-8-19}}$

O を原点とする空間内に 3 点 A，B，C があり，4 点 O，A，B，C，は同一平面上にはないものとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ により定まる点とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 四面体 PABC の体積と四面体 OABC の体積の比を求めよ。

(2) A，B，C の座標をそれぞれ (1，2，0)，(0，2，2)，(1，0，1) とするとき，四面体 PABC の体積を求めよ。

②$\boxed{\text{C-8-20}}$

O を原点とする座標空間内に，4 点 A(1，0，-1)，B(2，1，0)，C(-1，2，-1)，D(-2，-1，3) がある。線分 AB を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，線分 CD を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で定まる点 R に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を s，t を用いて表せ。

(2) s，t が $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 R が描く図形 F の面積を求めよ。

(3) 点 R が図形 F 上を動くとき，線分 OR が動いてできる立体の体積を求めよ。

第９章　数列

《学習項目》

・数列の定義
・等差数列の一般項と和
・等比数列の一般項と和
・等差中項，等比中項
・Σ 記号と和の公式
・階差数列
・等差× 等比の和
・和から一般項を求める公式

A 問題

②9-A-1

（1）第 3 項が-2，第 12 項が 25 である等差数列の一般項を求めよ。

（2）（1）の数列の末項が 109 であるとき，初項から末項までの和を求めよ。

②9-A-2

（1）第 3 項が 12，第 6 項が -96 である等比数列の一般項を求めよ。

（2）（1）の等比数列の末項が -1536 であるとき，初項から末項までの和を求めよ。

②9-A-3

数列 $x, 12, y$ が等比数列になっており，$68, y, x$ が等差数列になっている。$0<x<y$ のとき，x, y の値を求めよ。

②9-A-4

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k-3)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}2k\left(k^2-1\right)$

(3) $\sum_{k=0}^{n-1}(4k+3)$　　(4) $\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)(k-2)$

②9-A-5

次の和を求めよ。

(1) $2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(2) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+4\cdot5\cdot9+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$

②$\boxed{\text{9-A-6}}$

次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\frac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

②$\boxed{\text{9-A-7}}$

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

②$\boxed{\text{9-A-8}}$

初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

B 問題

②9-B-1

(1)　ある等差数列において，初めの 10 項の和が 10 で，次の 10 項の和が 20 である。この数列の一般項を求めよ。

(2)　2 つの自然数 3 と 15 の間にある，分母が 7 の既約分数の和を求めよ。

②9-B-2

(1)　ある等比数列において，初項から第 5 項までの和が 4 で，第 10 項までの和は 132 である。この数列の一般項を求めよ。

(2)　等比数列のはじめの 10 項の和は 2 で，その次の 20 項の和は 12 である。さらにこれにつづく 30 項の和を求めよ。

②9-B-3

初項が 23，公差が整数である等差数列 $\{a_n\}$ があり，初項から第 6 項までは正の数であって，第 7 項から負に変わるという。初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n の最大値を求めよ。

②9-B-4

次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots\cdots$$

②9-B-5

次の数列の和を求めよ。

(1)　$1\cdot(n+1),\ 2\cdot(n+2),\ 3\cdot(n+3),\ \cdots\cdots,\ n(n+n)$

(2)　$1^2\cdot n,\ 2^2\cdot(n-1),\ 3^2\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ n^2\cdot 1$

②$\boxed{\text{9-B-6}}$

次の数列の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{31\cdot33\cdot35}$

②$\boxed{\text{9-B-7}}$

初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられるとき，一般項 a_n を求めよ。ただし，(3)は $a_n>0$ とする。

(1) $S_n=3n^2-6n$　　(2)* $S_n=3^n-4n-1$

(3)* $3S_1{}^2+5S_2{}^2+7S_3{}^2+\cdots\cdots+(2n+1)S_n{}^2=3n^2(n+1)^2(n+2)^2$

②$\boxed{\text{9-B-8}}$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$3,\ \frac{5}{1^3+2^3},\ \frac{7}{1^3+2^3+3^3},\ \frac{9}{1^3+2^3+3^3+4^3},\ \cdots\cdots$$

C 問題

②9-C-1

$S:5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots\cdots,\ 902,\ T:2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \cdots\cdots,\ 997$ なる2つの等差数列がある。S と T に共通に含まれる数を，小さい方から並べて得た数列を U とする。次の問いに答えよ。

(1)　U の初項と公差を求めよ。

(2)　U の和を求めよ。

②9-C-2

等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}=3$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=2$ のとき，積 $a_1a_2\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ。

②9-C-3

2の倍数でも3の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を a_1，a_2，$a_3\cdots\cdots$，a_n，$\cdots\cdots$とする。

(1)　1003は数列 $\{a_n\}$ の第何項か。

(2)　a_{2000} の値を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ。

②9-C-4

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$ が成り立つとき，一般項 a_n を求めよ。

②9-C-5

(1)　数列 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ において，隣接する2数の積の総和を求めよ。

(2)　数列 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ において，互いに相異なり，かつ隣接しない2数の積の総和を求めよ。

〜〜〜MEMO〜〜〜

第 10 章　漸化式・数学的帰納法の基礎

《学習項目》

・階差数列
・２項間漸化式
・３項間漸化式
・２項間帰納法
・３項間帰納法

A 問題

②10-A-1

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=10$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(2)　$a_1=4$，$a_{n+1}=-3a_n$

②10-A-2

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=3a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

②10-A-3

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-6n^2$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+7^n$

②10-A-4

$a_1=-1$，$a_{n+1}={a_n}^2+2na_n-2$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法で証明せよ。

B 問題

②10-B-1

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$5a_n=3S_n+3n+2$，ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とする。

②10-B-2

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

②10-B-3

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+3^n$

②10-B-4

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n$

②10-B-5

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

$a_1=5$，$a_{n+1}=8a_n{}^2$

②10-B-6

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求め，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を計算せよ。

$a_1=1$，$(2n+2)a_n-na_{n+1}=0$

②10-B-7

次の漸化式で与えられた数列の一般項を求めよ。

$x_1=1$，$y_1=5$，$x_{n+1}=2x_n+y_n$，$y_{n+1}=x_n+2y_n$

②10-B-8

$a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を 2 組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

②10-B-9

次の漸化式で与えられた数列の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

②10-B-10

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

②10-B-11

$x=t+\dfrac{1}{t}$ とし，$P_n=t^n+\dfrac{1}{t^n}$　($n=1$，2，3，……)　とおく。このとき，P_n は x の n 次の整式で表されることを，数学的帰納法で示せ。

②10-B-12

n を 3 以上の自然数とするとき，不等式 $3^n>8n$ ……(A) を証明せよ。

C 問題

②10-C-1

$a_1=1$，$a_{2k+1}=\dfrac{1}{3}a_{2k}$，$a_{2k}=\dfrac{1}{2}a_{2k-1}$ （$k=1$，$2\cdots\cdots$） のとき，一般項 a_n を求めよ。

②10-C-2

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=2$，$a_2=6$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n-3$

②10-C-3

$a_1=\dfrac{1}{2}$，$n\geqq 2$ のとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ に対し $a_n=\dfrac{2S_n{}^2}{2S_n-1}$ を満たす。このとき，

(1)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。　　(2)　a_n を求めよ。

②10-C-4

$a_1=5$，$a_{n+1}=n^2-a_n$ ($n=1$，2，3，……) で定められる数列を $\{a_n\}$ とするとき

(1)　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{20}$ を求めよ。

(2)　$a_{n+2}-a_n$ を n の式で表せ。

(3)　a_{2m}，a_{2m-1} を m の式で表せ。

②10-C-5

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。すべての項 a_n が同符号であり，$S_n=2a_n{}^2+\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{3}{2}$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

②10-C-6

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n^2+n$

②$\boxed{\text{10-C-7}}$

数列 $\{x_n\}$ が $x_1=3$，$x_{n+1}=\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}$ で定義されている。

(1)　$x=\dfrac{4x-2}{x+1}$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$y_n=\dfrac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ で定義される数列 $\{y_n\}$ が満たす漸化式を導き，一般項 y_n を求めよ。

(2)　一般項 x_n を求めよ。

～～～MEMO～～～

第 11 章　数列の応用

《学習項目》

・群数列
・数学的帰納法
・格子点
・確率漸化式など
・さまざまな漸化式の応用（作業の繰り返し）

A 問題

②A-11-1

(1) 数列 1，2，1，3，2，1，4，3，2，1，5，4，……の第 337 項を求め

(2) 次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

(1) $\dfrac{1}{20}$ は第何項か。　　(2) $\dfrac{2^n+1}{4^n}$ は第何項か。

②A-11-2

次の等式・不等式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

(2) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$

②$\boxed{\text{A-11-3}}$

座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。

(1) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)* $y \geqq 0$，$y \leqq 2x$，$x+2y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

②$\boxed{\text{A-11-4}}$

直線上に異なる 2 点 A，B があって，P は A と B の 2 点を行ったり来たりする点である。さいころを投げて 1 の目が出たとき，P は他の点に移動し，1 以外の目が出たときはその場所にとどまるとする。初めに P は A にいるとして，さいころを n 回 $(n \geqq 1)$ 投げたとき P が A にいる確率を p_n で表す。

(1) p_1，p_2 を求めよ。　　(2) p_n を求めよ。

B 問題

②B-11-1

分母が 2 の累乗である 1 より小さい既約分数を次のように並べる。

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{16}$, ……

(1)　第 100 項の分数を求めよ。

(2)　初項から第 100 項までの和を求めよ。

(3)　初項から第 n 項までの和を S_n とする。このとき $S_n>20$ となる n の最小値を求めよ。

②B-11-2

奇数からなる数列を，右図のように正方形状に並べていったとき，対角線上に並んだ数列

1，5，13，25，……

の第 n 項を a_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

1	3	9	19
7	5	11	21
17	15	13	23
31	29	27	25

②B-11-3

自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

②$\boxed{\text{B-11-4}}$

3 の累乗を分母とする 1 より小さい正の既約分数を次のように並べる。

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{2}{27},\ \cdots\cdots$$

(1)　第 20 項を求めよ。　　(2)　分母が 3^n のものは何個あるか。

(3)　$\dfrac{1}{3^{n+1}}$ は第何項か。　　(4)　第 90 項を求めよ。

②$\boxed{\text{B-11-5}}$

数列 a_1，a_2，a_3，……を次のように定める。

$a_1=1$，$a_2=a_3=2$，$a_4=a_5=a_6=3$，……

(1)　自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ。

(2)　m を自然数とするとき，初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ。

②$\boxed{\text{B-11-6}}$

(1)　n を自然数とする。$|x|+|y|\leqq n$ となる 2 つの整数の組（x，y）の個数を求めよ。

(2)　n を自然数とするとき，$|x|+|y|+|z|\leqq n$ となる 3 つの整数の組（x，y，z）の個数を求めよ。

②$\boxed{\text{B-11-7}}$

数字 1，2，3 を n 個並べてできる n 桁の数全体を考える。そのうち 1 が奇数回現れるものの個数を a_n，1 が偶数回現れるかまったく現れないものの個数を b_n とする。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　a_n，b_n を求めよ。

C 問題

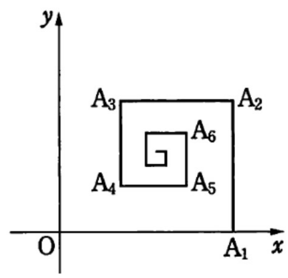
②C-11-1

動点 P が座標平面上を，原点 O から x 軸に沿って A_1 まで進み，次に左に直角に曲って A_2 まで進み，さらに左に直角に曲って A_3 まで進み，……と動いていく。ただし，

$OA_1=1$,

$A_{n-1}A_n=r^{n-1}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

とする。ここで，r は $0<r<1$ の定数である。



A_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおくとき，

(1)　x_{2k-1} を求めよ。　　(2)　x_n を求めよ。

②C-11-2

次の数列の第 n 項を a_n とする。

$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{6}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \cdots,\ \frac{1}{m^2},\ \frac{2}{m^2},\ \cdots,$

$\frac{m^2-1}{m^2},\ \cdots\cdots$

(1)　第 100 項を求めよ。

(2)　数列の各項を約分したとき，最初に $a_n=\frac{5}{12}$ となるのは第何項か。

(3)　数列の各項を約分したとき，2 度目に $a_n=\frac{5}{12}$ となるのは第何項か。

②$\boxed{\text{C-11-3}}$

A，B，C の 3 人がそれぞれ 1 枚ずつ札を持っている。最初，B が赤札，他の 2 人は白札を持っている。赤札を持っている人がコインを投げて，表が出れば A と B の持っている札を交換する。裏が出れば B と C が持っている札を交換する。これを n 回繰り返したとき，最後に A，B，C が赤札を持っている確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする。

(1)　$n=1$，2 のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(2)　p_n，q_n，r_nを求めよ。

②$\boxed{\text{C-11-4}}$

正の整数 n に対して，正の整数 a_n，b_n を次の式で定める。

$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$　　このとき，

(1)　$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ であることを示せ。

(2)　$(2+\sqrt{3})^n$ の小数展開の整数部分が奇数であることを示せ。

確率漸化式の練習

②C-11-5

2 つの箱 A，B のそれぞれに赤玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後，箱 **A** に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。

②C-11-6

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p $(0<p<1)$ であるとする。この試行を n 回行うときに奇数回 A が起こる確率を a_n とする。

(1)　a_1，a_2，a_3 を p で表せ。　　(2)　a_n を n と p で表せ。

②C-11-7

袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率 p_n を求めよ。

②C-11-8

正四面体の各頂点を A_1，A_2，A_3，A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で表す。

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，

$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を求めよ。

漸化式の練習

②C-11-9

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\dfrac{2}{n+1}=1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ。

②C-11-10

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{2n}=2a_{2n-1}$，$a_{2n+1}=a_{2n}+2^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，a_{2n} と a_{2n+1} を求めよ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k$ を求めよ。

②C-11-11

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$(a_{n+1}-a_n)^2=a_{n+1}+a_n$，$a_{n+1}>a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。$b_n=a_{n+1}-a_n$ とするとき，b_n を n の式で表せ。また，a_n を求めよ。

②C-11-12

$a_1=1$，$a_2=6$，$2(2n+3)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}+4(n+2)a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ。

②C-11-13

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=2^{2n-2}(a_n)^2$

②C-11-14

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{9a_n+1}{a_n+9}$

②C-11-15

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$

②C-11-16

数列 a_1，a_2，…，a_n，…の初項から第 n 項までの和 S_n が

$S_1=1$，$S_n=\dfrac{n^2}{n^2-1}S_{n-1}$　$(n\geqq 2)$

を満たすとき，a_n を n を用いて表せ。

②C-11-17

$a_1=1$，$b_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n-\dfrac{3}{4}b_n+1$，$b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{5}{4}b_n+1$

のとき，一般項 a_n，b_n を求めよ。

②C-11-18

$x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=\dfrac{1}{7}$，$x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}x_n}{4x_{n+1}x_n-6x_{n+1}+5x_n}$ のとき x_n を n の式で表せ。

②C-11-19

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=3\cdot\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$ を満たしている。

このとき，$b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ とおいて b_n を n の式で表せ。これから a_n を求めよ。

②C-11-20

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。すべての項 a_n が同符号であり，$S_n=2{a_n}^2+\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{3}{2}$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

数学的帰納法の練習

②C-11-21

数学的帰納法により次の等式を証明せよ。

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

②C-11-22

数学的帰納法により次の等式を証明せよ。

$$S_k=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

$$T_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}$$

とする。このとき $S_{2n}=T_n$ を証明せよ。ただし n は正の整数とする。

②C-11-23

n を自然数とするとき，次の不等式を数学的帰納法により証明せよ。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}$$

②C-11-24

任意の自然数 n について，$a_n>0$ とし，次の関係が成り立つとする。

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3$$

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_n を求めよ。

②C-11-25

実数 x，y について，$x+y$，xy がともに偶数とする。このとき，自然数 n に対して x^n+y^n も偶数となることを示せ。

②C-11-26

a，b を正の数，n を自然数とする。$(a+b)^n\leqq 2^{n-1}(a^n+b^n)$ であることを数学的帰納法によって証明せよ。

②C-11-27

$P_1(x)=2x-3$ とし，2 以上の整数 n に対して多項式 $P_n(x)$ を
$P_n(x)=P_{n-1}(x)\{1+4xP_{n-1}(x)\}$ と順に定義するとき，

(1) $P_n(x)$ の次数を求めよ。

(2) $P_n(x)$ の x の係数を求めよ。

②C-11-28

正の整数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 x_n，y_n を定めるとき，

(1) ${x_n}^2-2{y_n}^2=(-1)^n$ を証明せよ。

(2) 任意の n に対して，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値であることを示せ。

②C-11-29

n を自然数とする。2^n-1 を 3 で割ると，n が奇数のときは 1 余り，n が偶数のときは割り切れることを示せ。

②C-11-30

n を自然数とするとき，次の不等式を数学的帰納法により証明せよ。

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^3}\leqq 2-\frac{1}{n^2}$$

②C-11-31

数列 $\{a_n\}$ が，$0\leqq a_1\leqq 3$，$a_{n+1}=|-2a_n+3|$ により定められているとき，任意の n に対して $0\leqq a_n\leqq 3$ となることを示せ。

②C-11-32

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1) 数列 a_n，b_n ($n=1$，2，3，……) は $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$ を満たすことを示せ。

(2) $n=1$，2，3，……に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

②C-11-33

n を自然数とするとき，次の等式，不等式を数学的帰納法により証明せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n\tan\frac{x}{2^n}}-\frac{1}{\tan x}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $\sin\dfrac{x}{2^n}>\dfrac{1}{2^n}\sin x\quad(0<x\leqq\pi)$