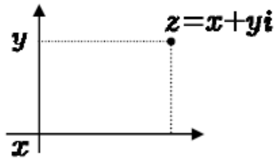
第 24 章　複素数平面



《学習項目》

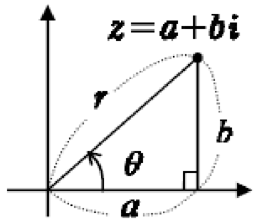
・複素数～～共役複素数，絶対値，純虚数

・絶対値と共役の関係　$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

共役の性質　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$，$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

絶対値の性質　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$　　（注）$|\alpha+\beta|=?$

・実部・虚部の取り出し公式



・複素数平面　右図で，$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

・極形式

$z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ のとき

$$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

・ド・モアブルの定理

n が整数のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

・内分，外分，中点，重心（ベクトルと同様）

・回転＆拡大・縮小

・複素数平面上での円

A問題

〜〜

A 24 - 1

Ⅰ　次の複素数の絶対値，共役複素数を求めよ。

(1)　$-4+3i$

(2)　$-7i$

Ⅱ　次の複素数を$a+bi$の形で表し，その絶対値を求めよ。

(3)　$(3-i)(1-2i)$

(4)　$\dfrac{3+4i}{4+3i}$

A 24 - 2

複素数 α，β において $|\alpha|=1$ とする。

このとき，$|1-\overline{\alpha}\beta|^2-|\overline{\alpha}-\overline{\beta}|^2$ の値を求めよ。

A 24 - 3

A$(-1+4i)$，B$(5-2i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 1 : 2 に内分する点 C

(2)　線分 AB の中点 M

(3)　線分 AB を 3 : 2 に外分する点 D

A 24 - 4

次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ の範囲は，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$1+\sqrt{3}\,i$　　(2)　$1+i$　　(3)　-1　　(4)　i

(5)　$-\sqrt{3}+i$　　(6)　$\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$　　(7)　$-2\sqrt{3}-2i$　　(8)　$-\sqrt{5}\,i$

A 24 - 5

複素数 $z_1=1-i$，$z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ について，z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ を，それぞれ極形式で表せ。偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

A 24 - 6

次の複素数の値を求めよ。

(1)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6$

(2)　$\left\{2\left(\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}\right)\right\}^5$

A 24 - 7

複素数平面上で，次の方程式を満たす点 z 全体はどのような図形を表すか。

(1)　$|z-1-i|=\sqrt{2}$

(2)　$|z-2i|=|z-4|$

B問題

〜〜〜

B 24 - 1

a，b，c，d は実数とする。
複素数 α が，方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解であるとき，$\overline{\alpha}$ も同じ方程式の解であることを証明せよ。

B 24 - 2

次の複素数の値を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^4$　　(2) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8$

(3) $(1-i)^5$　　(4) $(1+\sqrt{3}\,i)^{-3}$

B 24 - 3

方程式 $z^4=-2(1+\sqrt{3}\,i)$ を解け。

B 24 - 4

次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

(1) $z+\overline{z}=2$　　(2) $z-\overline{z}=2i$

(3) $|z+2|=2|z-1|$　　(4) $2|z-i|=|z+2i|$

B 24 - 5

点 z が原点 O を中心とする半径 6 の円の周上を動くとき，点 z と点 $2i$ を結ぶ線分の中点 w は，どのような図形を描くか。

B 24 - 6

(1)　$z=2-6i$ とする。点 z を，原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(ア)　$\dfrac{\pi}{6}$　　　　(イ)　$-\dfrac{\pi}{2}$

(2)　点 $(1-i)z$ は，点 z をどのように移動した点であるか。

B 24 - 7

$\alpha=3+4i$，$\beta=-1+2i$ とする。

(1)　点 β を中心に，点 α を $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2)　点 α を中心に，点 β を $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数 δ を求めよ。

B 24 - 8

次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　複素数 $2-4i$ を表す点を A とするとき，△OAB が正三角形となるような点 B

(2)　複素数 $-2-i$ を表す点を A とするとき，△OAB が OA＝OB の直角二等辺三角形となるような点 B

B 24 - 9

複素数平面上の異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) について，次の等式が成り立つとき，△OAB はどのような三角形か。

(1)　$\alpha^2+\beta^2=0$　　　　(2)　$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$

B 24 - 10

複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) の間に次の関係があるとき，△ABC はどのような三角形か。

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}\,i$　　　　(2)　$\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$

C問題

〜〜

C 24 - 1

複素数 z を $z=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$ とする．

(1) z^2 を計算せよ．

(2) $\arg(z)$ を求めよ．

C 24 - 2

$\theta=\dfrac{360^\circ}{7}$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ のとき

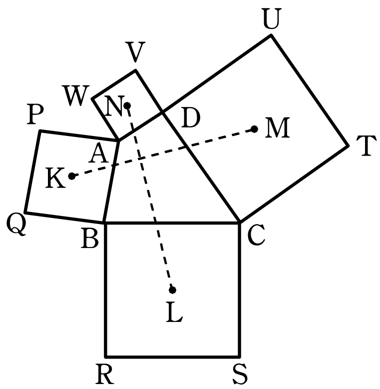
(1) $\overline{\alpha}=\alpha^6$ を示せ．

(2) $\beta+\overline{\beta}$，$\beta\overline{\beta}$ を求めよ．

(3) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$ を求めよ．

C 24 - 3

図のように，複素数平面上に四角形 ABCD があり，4 点 A，B，C，D を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3，z_4 とする．各辺を 1 辺とする 4 つの正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW を四角形 ABCD の外側に作り，正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW の中心をそれぞれ K，L，M，N とおく．



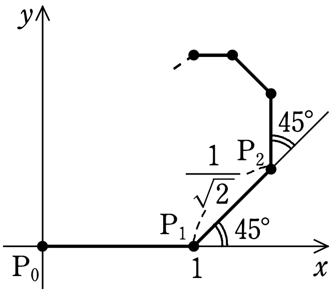
(1) 点 K を表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ．

(2) KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ．

(3) 線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか．

C 24 - 4

右図のように複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする．次に P_1 を中心として $45°$ 回転して向きを変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする．以下同様に P_n に到達した後，$45°$ 回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする．このとき，点 P_{10} が表す複素数を求めよ．



C 24 - 5

単位円上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) と，この円上にない点 H(z) について，等式 $z=\alpha+\beta+\gamma$ が成り立つとき，H は △ABC の垂心であることを証明せよ。

第 25 章　二次曲線と極座標（１）

《学習項目》

・放物線，双曲線，楕円

放物線 $y^2=4px$ の　焦点は $(p,\ 0)$，準線は $x=-p$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ の焦点は　$(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点は　$\pm(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，漸近線は　$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$

・接線公式

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線は　$y_1y=2p(x+x_1)$

楕円，双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線は　$\dfrac{x_1x}{a^2}\pm\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

・パラメータ表示

放物線 $y^2=4px$ の媒介変数表示は　$x=pt^2,\ y=2pt$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示は　$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示は　$x=\dfrac{a}{\cos\theta},\ y=b\tan\theta$

A問題

〜〜〜

A 25 - 1

次の軌跡を求めよ。

(1)　2 点 $(1,\ -3)$，$(1,\ -1)$ からの距離の和が 4 である点の軌跡

(2)　2 点 $(-7,\ 2)$，$(1,\ 2)$ からの距離の差が 6 である点の軌跡

(3)　点 $\left(2,\ \dfrac{3}{2}\right)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ からの距離が等しい点の軌跡

(4)　点 $(-4,\ 3)$ と直線 $x=2$ からの距離が等しい点の軌跡

A 25 - 2

次の曲線の概形をかき，放物線なら頂点の座標，楕円なら中心の座標，双曲線なら漸近線の方程式を求めよ。また，焦点の座標も求めよ。

(1)　$y^2=4x+8$　　(2)　$y^2+2x-2y-3=0$

(3)　$x^2+4y^2-4x+8y+4=0$　　(4)　$9x^2+4y^2+36x-16y+16=0$

(5)　$x^2-y^2+4x+6y-6=0$　　(6)　$4y^2-9x^2-18x-24y-9=0$

A 25 - 3

次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$　$\left(\dfrac{5}{2},\ \sqrt{3}\right)$

(2)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(-3\sqrt{5},\ 4)$

(3)　$2x^2-y^2=2$　$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

(4)　$y^2=10x$　$(2,\ -2\sqrt{5})$

B問題

〜〜〜

B 25 - 1

楕円 $4x^2+y^2=4$ の，点 A$(0,\ 3)$ を通る接線の方程式を求めよ。

B 25 - 2

楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $x+2y=1$ の 2 つの交点を P，Q とするとき

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さ l を求めよ。

B 25 - 3

$2x^2+3y^2=1$ で表される曲線 C がある。

(1) C を xy 平面上に図示せよ。

(2) 点 P$(x,\ y)$ が C 上を動くとき，x^2-y^2+xy の最大値を求めよ。

B 25 - 4

a，b を正の定数とする。双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 P$(x_0,\ y_0)$ から 2 直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$ にそれぞれ垂線 PA，PB を下ろす。

(1) 長さ $\overline{\mathrm{PA}}$，$\overline{\mathrm{PB}}$ を求めよ。

(2) 積 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ を a，b を用いて表せ。

B 25 - 5

楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ と直線 $y=\dfrac{3}{4}x+k$ がある。

(1) 異なる 2 点で交わるような，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 楕円が直線から切り取る線分の中点の軌跡を求めよ。

C問題

〜〜

C 25 - 1

放物線 $y^2=4px$ $(p\neq 0)$ について，焦点 F から任意の接線へ下ろした垂線を FQ とすると，点 Q は y 軸上にあることを示せ。

C 25 - 2

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上に $x_1>0$，$y_1>0$ となるような点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ をとる。

(1)　点 P における接線 l_1 と法線 l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　接線 l_1 が x 軸と交わる点を Q，法線 l_2 が x 軸と交わる点を S とし，線分 SQ の長さが最小となるように点 P を定める。このとき，△PSQ の面積を求めよ。

C 25 - 3

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 P における接線が，2 つの漸近線と交わる点を Q，R とし，原点を O とする。次のことを証明せよ。

(1)　P は線分 QR の中点

(2)　△OQR の面積は一定

C 25 - 4

2 つの楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$C_2:x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ について

(1)　C_1 と C_2 の交点の座標をすべて求めよ。

(2)　C_1 の内部と C_2 の内部の共通部分の面積を求めよ。

C 25 - 5

長さ 10 の線分 AB の両端 A，B が，それぞれ x 軸上，y 軸上を動くとき，線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ。また，線分ABの通過する領域を求めよ。

C 25 - 6

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

第 26 章　二次曲線と極座標（２）

《学習項目》

・点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r^2=x^2+y^2$$

A問題

〜〜

A 26 - 1

次の極方程式の表す曲線を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1)　$r\sin\theta=-1$　　(2)　$r=-4\sin\theta$　　(3)　$r\sin\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)=2$

(4)　$r\cos^2\theta=\sin\theta$　　(5)　$r^2\cos2\theta=-1$　　(6)　$r^2(4-3\cos^2\theta)=4$

A 26 - 2

次の直交座標に関する方程式の表す曲線を，極方程式で表せ。

(1)　$x=5$　　(2)　$y=-\sqrt{3}\,x$　　(3)　$x+y-4=0$

(4)　$x^2+y^2=4x$　　(5)　$y^2=-4x$　　(6)　$x^2-y^2=9$

B問題

〜〜

B 26 - 1

次の極方程式はどのような曲線を表すか。直交座標の方程式に直して答えよ。

(1)　$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$　　(2)　$r=\dfrac{3}{1+2\cos\theta}$　　(3)　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

B 26 - 2

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の中心 O から垂直な 2 つの半直線を引き，楕円との交点を P，Q とすると，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ は一定であることを示せ。

B 26 - 3

放物線 $y^2=4x$ …… ①上に 4 点があり，y 座標の大きい順に A，B，C，D とする。AC と BD は ① の焦点 F で垂直に交わり，$\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする。

(1)　AF を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}+\dfrac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}}$ は一定であることを示せ。

B 26 - 4

次の曲線を，原点 O を中心として(　)内の角だけ回転して得られる曲線の方程式を求めよ。

(1)　$7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2=16$　$(-30°)$

(2)　$3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2-8x+8\sqrt{3}\,y=0$　$(60°)$

C問題

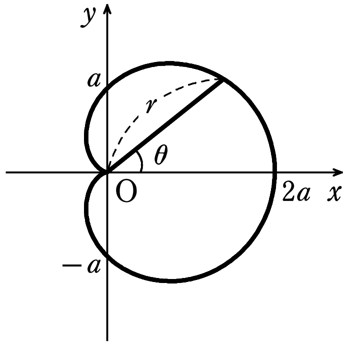
C 26 - 1

方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ で表される曲線を C とする。

(1)　$\sqrt{x}=t$ とおいて，C を媒介変数 t で表せ。

(2)　C は焦点 (2，2)，準線 $y=-x$ である放物線の一部であることを示せ。

C 26 - 2



$a>0$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える。
次の問いに答えよ。

(1)　極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

(2)　点 O と曲線 C_a 上の点 $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

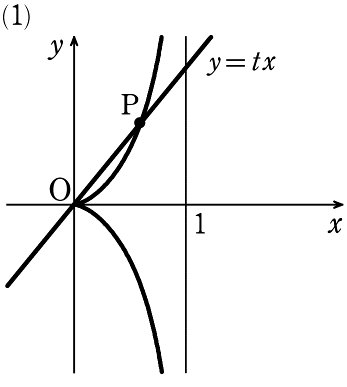
(3)　点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。

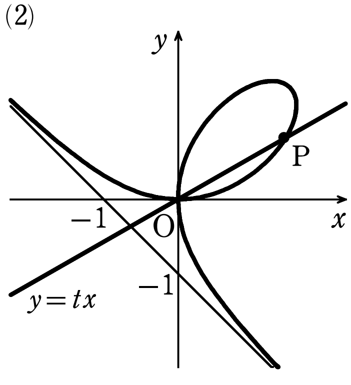
C 26 - 3

直線 $y=tx$ との共有点を考えて，次の方程式で表される曲線を，媒介変数 t で表せ。

(1)　$y^2-\dfrac{x^3}{1-x}=0$

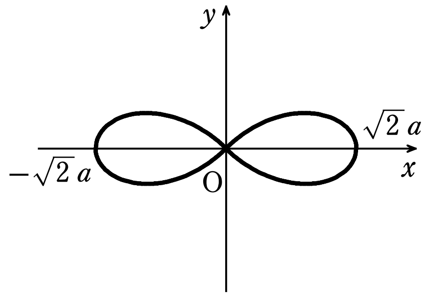
(2)　$x^3+y^3-3xy=0$





C 26 - 4

2 定点 A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$からの距離の積が a^2 である点 P の軌跡 C はレムニスケートとよばれ，その概形は図のようになる。



(1)　レムニスケート C の方程式は，次の式で与えられることを示せ。

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

(2)　レムニスケート C の極方程式を求めよ。

第 27 章　数学Ⅲの関数

《学習項目》

・有理関数（分数型関数），無理関数

・逆関数，合成関数

・グラフの平行移動と対称移動

・三角関数のグラフの周期

A問題

〜〜〜

A 27 - 1

次の関数の逆関数を求めよ。また，その値域を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x-1}{x-2}$　　　(2)　$y=\dfrac{x+3}{x+2}$

(3)　$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ $(x\geqq 0)$　　　(4)　$y=\dfrac{4x-1}{2x-1}$ $\left(\dfrac{1}{2}<x\leqq 2\right)$

A 27 - 2

関数 $y=f(x)=\sqrt{5x}$ がある。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と y 軸に関して対称な曲線を $y=g(x)$ とする。
この曲線 $y=g(x)$ を x 軸方向に 10 だけ平行移動した曲線を $y=h(x)$ とする。
$y=g(x)$ と $y=h(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ と関数 $y=h(x)$ のグラフをかき，その共有点の 座標を求めよ。

A 27 - 3

次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，$(g\circ f)(x)$ の定義域と値域を求めよ。

(1)　$f(x)=2x+3$ $(1\leqq x\leqq 3)$，$g(x)=x^2$ $(0\leqq x\leqq 10)$

(2)　$f(x)=\sqrt{x+4}$，$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

B問題

〜〜

B 27 - 1

関数 $y=3\cos(4\theta-3\pi)$ のグラフは，$y=\cos 4\theta$ のグラフを θ 軸方向に ${}^{ア}\boxed{}\,\pi$ だけ平行移動し，θ 軸をもとにして y 軸方向に ${}^{イ}\boxed{}$ 倍拡大したものである。また，この関数の周期は ${}^{ウ}\boxed{}\,\pi$ である。

B 27 - 2

座標平面において，$y=\log_2 x$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られるグラフの方程式は $y=\log_2\left({}^{ア}\boxed{}\,x\right)$ であり，このグラフと x 軸との交点の x 座標は ${}^{イ}\boxed{}$ である.

B 27 - 3

関数 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{-2x+5}{x-2}$ のグラフを，どのように平行移動したものか。

B 27 - 4

次の不等式を解け。

(1)　$\dfrac{2x^2-3x-2}{x-1}<0$

(2)　$\dfrac{4}{x+1}\leqq\dfrac{1}{x-1}$

B 27 - 5

(1)　$\sqrt{x^2-x} \leqq 3-x$　　　(2)　$\sqrt{13-x^2} > x+1$

B 27 - 6

関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+3}$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(1)=1$，$f^{-1}(4)=-1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

C問題

〜〜〜

C 27 - 1

関数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　不等式 $f^{-1}(x) \geqq f(x)$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

C 27 - 2

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -2x+1 & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$ のように定義された関数 $f(x)$ について

(1)　$y=(f \circ f)(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$(f \circ f)(a)=f(a)$ となる a を求めよ。

第 28 章　数学Ⅲの極限

《学習項目》

・$\dfrac{0}{0}$不定形　⇒　約分して代入，公式，微分の定義

・$\dfrac{\infty}{\infty}$不定形　⇒　次数の比較，指数の底の比較

・$\infty\times 0$　，$\infty-\infty$　　⇒　別の形に持ち込む

・$(1+0)^{\infty}$　⇒　e の定義に持ち込む

・無限級数＝第 n 部分和の極限　特に，無限等比級数なら公式利用

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

・数列の極限

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(ka_n+lb_n)=k\alpha+l\beta \qquad (k,\ l \text{ は定数})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0)$$

・はさみうちの原理

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき　　$a_n\leqq c_n\leqq b_n$ かつ $\alpha=\beta$　ならば$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

・無限等比数列$\{r^n\}$の極限

$r>1$　　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

$r=1$　　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$

$|r|<1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

$r\leqq -1$　のとき　振動 …… 極限はない

・無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$

$a\neq 0$ の場合　$|r|<1$ のとき収束し，和は $\dfrac{a}{1-r}$

$|r|\geqq 1$ のとき　発散

$a=0$ の場合　収束し，和は 0

（性質）①$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n=T$ のとき　$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n+lb_n)=kS+lT$　　$(k,\ l$ は定数$)$

・無限級数＝第n 部分和の極限

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

【注】逆の反例を挙げよ

・関数の極限

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき

$\lim_{x\to a}\{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$　(k, l は定数)

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき　$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$,　$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　($\beta \fallingdotseq 0$)・

関数の極限の公式①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1$$

・関数の極限の公式②　（微分法を学んだ後にやるのが正統）

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

・右側極限，左側極限

右側極限　$\lim_{x\to a+0} f(x)$

左側極限　$\lim_{x\to a-0} f(x)$

A問題

A 28 - 1

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$

A 28 - 2

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x}{-x^3+4x^2+2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x-2}{x^2-3x+2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5x+2}{x^2-x+1}$

A 28 - 3

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\boxed{}$

A 28 - 4

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2^n}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n+1}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+2^n}{7^n-2^n}$

A 28 - 5

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-2^n)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{n+1}-3^n)$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{2n}-3^{n+1})$

A 28 - 6

次の極限値を求めよ。

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$　　(6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$

A 28 - 7

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$　　(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$

A 28 - 8

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0}(1+3h)^{\frac{1}{h}}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$　　(3) $\lim_{x\to\infty}x\log\dfrac{x+2}{x}$

A 28 - 9

次の無限等比数列の極限を調べよ。

(1) $\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{9},\ -\dfrac{32}{27},\ \cdots\cdots$

(2) $3+\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-1,\ 5-3\sqrt{2},\ \cdots\cdots$

A 28 - 10

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{|x-1|}{x-1}$　　(2) $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{|x-1|}{x-1}$　　(3) $\lim_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x-3}$　　(4) $\lim_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x-3}$

B問題

〜〜

B 28 - 1

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-ax-b\right)=5$$

B 28 - 2

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$

B 28- 3

関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ について，$y=f(x)$ のグラフをかけ。また，$f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ。

B 28 - 4

r を正の定数とする。極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}$を求めよ。

B 28 - 5

無限等比級数 $(2+x)-\dfrac{(2+x)x}{2}+\dfrac{(2+x)x^2}{4}-\dfrac{(2+x)x^3}{8}+\cdots\cdots$ が，収束するような x の値の範囲を求めよ。

B 28 - 6

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$$

B 28 - 7

次の無限級数の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^{n-1}}\right)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n} - \frac{3}{4^{n-1}}\right)$

B 28 - 8

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\left(\frac{3}{2} - 5\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{5}{27}\right) + \cdots\cdots$

(2)　$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{16} + \cdots\cdots$

(3)　$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \cdots\cdots$

B 28 - 9

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{6} + \frac{7}{11} + \frac{11}{18} + \cdots\cdots$　　(2)　$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\cdots$

(3)　$\frac{1}{3} + \frac{1+2}{9} + \frac{1+2+4}{27} + \frac{1+2+4+8}{81} + \cdots\cdots$

C問題

C 28 - 1

次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan 2x}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sin \pi x}{x+1}$

C 28 - 2

極限値$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+[x]}{x+1}$を求めよ。ただし，[　]はガウス記号を表す。

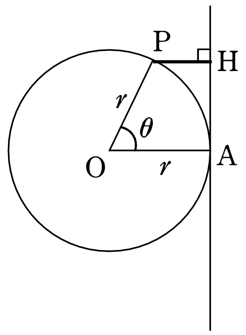
C 28 - 3

次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{2x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{3x}$

C 28 - 4

半径 r の円 O の周上に定点 A と動点 P がある。
右の図のように，A における接線に P から下ろした垂線を PH とし，$\angle\mathrm{POA}=\theta$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

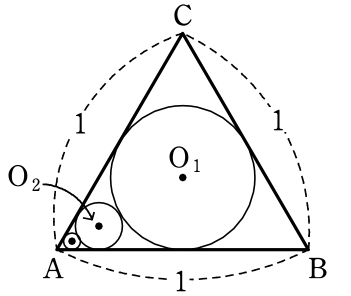


(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。AH，PH，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の長さを，θ を用いてそれぞれ表せ。ただし，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ は，弧 AP の長さを表す。

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to +0}\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to +0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}{}^2}{\mathrm{PH}}$ を求めよ。

C 28 - 5

1 辺が 1 の正三角形 ABC の内接円を O_1 とし，O_1 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_2，O_2 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_3 とし，以下同様にして，円 O_1，O_2，O_3，……，O_n，…… を作るとき，円の面積の総和を求めよ。ただし，円 O_n の半径を r_n とするとき，$r_n > r_{n+1}$ とする。



C 28 - 6

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2+ax+b}{x^{2n}+1}$$ が連続関数であるとき

(1)　定数 a，b の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

C 28 - 7

$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$|a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{2}{3}|a_n-3|$ を示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

C 28 - 8

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の事柄は正しいか。正しくないものはその反例をあげよ。ただし，α は定数とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ ならば　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=0$ ならば　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ならば　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$

第 29 章　数学Ⅲの微分

《学習項目》

・微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

・導関数　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\varDelta x\to 0}\dfrac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$

・導関数の性質　$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$　(k，l は定数)

・積の微分公式　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

・商の微分公式　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

・合成関数の微分公式　$f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$　または　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

・逆関数の微分公式　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

・パラメータ表示された関数の微分公式

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

・陰関数 $F(x,\ y)=0$ の導関数

両辺を x で微分して，$\dfrac{dy}{dx}$ を求める。$\dfrac{d}{dx}f(y)=\dfrac{d}{dy}f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$

・対数微分法

両辺の自然対数をとり，x で微分（陰関数微分）

・基本関数の微分公式

①　$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$　($x>0$，α ：実数)

②　$(a^x)'=a^x\log a$　　$(e^x)'=e^x$

③　$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$

④　$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

A問題

〜〜

A 29 - 1

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^{\frac{3}{5}}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$　　(3)　$y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

(4)　$y=x^2e^x$　　(5)　$y=e^x\cos x$

(6)　$y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$　　(7)　$y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

A 29 - 2

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\cos(2x-1)$　　(2)　$y=\tan 3x$　　(3)　$y=\sin x^2$

(4)　$y=\tan x^2$　　(5)　$y=\cos^3 x$

(6)　$y=e^{5x}$　　(7)　$y=e^{-2x^2}$　　(8)　$y=3^{4x}$

(9)　$y=\log|\tan x|$　　(10)　$y=(\log x)^3$

A 29 - 3

次の曲線上の点 A における接線および法線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x}{x+1}$，A (0，0)　　(2)　$y=\sqrt{x+3}$，A (1，2)

(3)　$y=\sqrt{4-x^2}$，A $(-\sqrt{3}，1)$　　(4)　$y=\cos x$，A $\left(\dfrac{\pi}{4}，\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(5)　$y=e^x$，A (0，1)　　(6)　$y=\log x$，A $(e，1)$

A 29 - 4

次の関数は $x=1$ で微分可能であることを証明せよ。

$x\leqq 1$ のとき　$f(x)=x^2$，　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=2x-1$

B問題

〜〜

B 29 - 1

$x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\ y=\dfrac{2t}{t^2+1}$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $x,\ y$ で表せ。

B 29 - 2

関数 $y=x^{\sqrt{x}}$ （ただし $x>0$）について，導関数 y' を求め，$y'=0$ となる x の値を求めよ。

B 29 - 3

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=10$，A (27，1)

(2)　$x^2+3xy-y^2=3$，A (1，2)

B 29 - 4

2 つの曲線 $y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

B 29 - 5

2 曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。また，その共有点における接線の方程式を求めよ。

B 29 - 6

平均値の定理を利用して，次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

B 29 - 7

$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-2 & (x\geqq 1) \\ x^3+(1-a)x^2 & (x<1) \end{cases}$ とする。$f(x)$ が $x=1$ で微分可能な関数となるように，実数 a，b の値を定めよ。

C問題

〜〜

C 29 - 1

次の関数を微分せよ。

$$y=\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

C 29 - 2

次の x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。ただし，y を用いて表してもよい。

(1)　$xy+y^3=x^2$　　　　(2)　$x=\sin(x+y)$

C 29 - 3

x の関数 y が，θ を媒介変数として，$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ と表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$，および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ の関数として表せ。

C 29 - 4

(1)　$y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y=f(x)$ とする。$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$y=\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y=g(x)$ とする。$g''(1)$ の値を求めよ。

C 29 - 5

$f(x)$ は $x>0$ で定義された関数で，$x=1$ で微分可能で $f'(1)=2$ かつ任意の $x>0$，$y>0$ に対して $f(xy)=f(x)+f(y)$ を満たすものとする。

⑴　$f(1)$ の値を求めよ。また，これを利用して，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を $f(x)$ で表せ。

⑵　$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ を $f(x)$ と $f(y)$ で表せ。

⑶　$f(1)$，$f'(1)$ の値に注意することにより，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を x で表せ。

⑷　$f(x)$ を求めよ。

C 29 - 6

次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ で連続であるが，微分可能でないことを示せ。

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0),\ f(0)=0$$

第 30 章　数学Ⅲのグラフ

《学習項目》

・基本関数のグラフ　　（n は自然数，$a>0$，$r>0$）

$y=x^n$，$y=e^x$，$y=\log x$，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$

$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{r^2-x^2}$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{1}{x^2}$，$y=\dfrac{1}{x^2+a^2}$，$y=\sqrt{x^2+a^2}$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\sqrt[3]{x^2}$

・平行移動・対称移動・拡大&縮小　　（$k\fallingdotseq 0$）

$y=f(x)$ のグラフをx 軸方向に$+a$，y軸方向に$+b$平行移動したグラフは，$y-b=f(x-a)$

$y=f(x)$ のグラフをx 軸に関して対称移動すると，$y=-f(x)$。またy 軸だと，$y=f(-x)$

$y=f(x)$ のグラフをx 軸を元にして k 倍拡大すると，$y=f\left(\dfrac{x}{k}\right)$。また$y$ 軸だと，$y=k\cdot f(x)$

・２乗のグラフ，逆数のグラフ

・和のグラフ

・積のグラフ

・合成関数のグラフ

・逆関数のグラフ　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは$y=x$ に関して線対称

（注）逆関数の存在条件は，定義域内で一対一対応であること。

A問題

〜〜

A 30 - 1

関数　$y=x+\sin 2x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$のグラフを描け。

B問題

〜〜〜

B 30 - 1

$y=(1-\cos x)\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$　のグラフを描け。また，最大値･最小値を求めよ。

B 30 - 2

関数$y=\dfrac{3x}{x^2+1}$のグラフをかけ。

B 30 - 3

曲線　$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$　の凹凸を調べ，変曲点の座標を求めよ。また，グラフをかけ。

B 30 - 4

関数　$y=(x-1)e^x$　のグラフの概形をかけ。

B 30 - 5

曲線 $y=x\log x$ の凹凸を調べ，変曲点があればその座標を求めよ。また，グラフをかけ。

B 30 - 6

関数$y=x+\sqrt{1-x^2}$のグラフをかけ。

B 30 - 7

関数$y=x\sqrt{1-x^2}$のグラフをかけ。

B 30 - 8

関数$y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$のグラフをかけ。

B 30 - 9

曲線が t を媒介変数として

$$x=1+t^2,\quad y=2+t-t^2$$

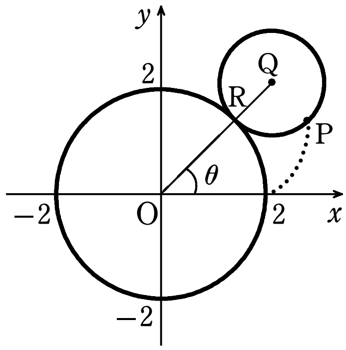
と表されているとき，この曲線の $y \geqq 0$ の部分を図示せよ。

C問題

〜〜

C 30 - 1

原点 O を中心とし，半径 2 の円を D_1 とする。
半径 1 の円 D_2 は最初に中心 Q が (3，0) にあり，円 D_1 に外接しながら滑ることなく反時計まわりに転がるものとする。点 P は円 D_2 の円周上に固定されていて，最初は (2，0) にある。
2 つの円の接点を R としたとき，線分 OR が x 軸となす角を θ とする。
点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。



C 30 - 2

座標平面上を運動する点 P の，時刻 t における座標が，$x=e^{-t}\sin t$，$y=e^{-t}\cos t$ で表されるとき，速度 $\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，O は原点 (0，0) とする。

第 31 章　数学Ⅲの微分の応用

《学習項目》

・関数の最大・最小　⇒　グラフの高さ比べ

・方程式の解　⇒　グラフの共有点の x 座標

・不等式（大小）　⇒　グラフの上下関係

A問題

〜〜

A 31 - 1

(1)　関数 $y=x^2+\log(25-x^2)$ の極値を求めよ。

(2)　関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の極値を求めよ。

A 31 - 2

$f(x)=\dfrac{(\log x)^2}{x}$ $(x>0)$ とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　定数 a に対して，方程式 $ax=(\log x)^2$ の解の個数を求めよ。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ であることを用いてよい。

A 31 - 3

すべての正の数 x に対して，不等式 $a\sqrt{x}>\log x$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

B問題

〜〜

B 31 - 1

a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。

B 31 - 2

$f(x)=\sqrt{x}-\log x$ とする。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$x>0$ のとき $f(x)>0$ であることを示せ。ただし，$2<e<3$ である。

(3)　(2) を利用して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を示せ。

B 31 - 3

a，b は定数で，$a>0$ とする。関数 $f(x)=\dfrac{x-b}{x^2+a}$ の最大値が $\dfrac{1}{6}$，最小値が $-\dfrac{1}{2}$ であるとき，a，b の値を求めよ。

B 31 - 4

a は定数とする。方程式 $x^3-3ax^2+4=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

B 31 - 5

a を正の定数とする。不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

C問題

〜〜〜

C 31 - 1

$x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ.

C 31 - 2

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1) の結果を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ を求めよ。

C 31 - 3

すべての $x\geqq 0$ について，$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ が成り立つことを示せ。

C 31 - 4

(1)　$x>0$ のとき，$\log x\leqq\dfrac{x}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$x>0$ のとき，$\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを証明せよ。

C 31 - 5

$x\geqq 1$ のとき，$x\log x\geqq(x-1)\log(x+1)$ を示せ。

C 31 - 6

(1)　n は自然数とする。不等式　$e^x>1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ $(x>0)$ を証明せよ。

(2)　n は自然数とする。$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ を証明せよ。

C 31 - 7

$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $b\log\dfrac{a}{b} \leqq a-b \leqq a\log\dfrac{a}{b}$ が成り立つことを証明せよ。

C 31 - 8

$a<b$ のとき，不等式 $e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$ を証明せよ。

C 31 - 9

正の実数 a，b，実数の定数 $p>1$ に対して，$(a+b)^p \leqq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ を証明せよ。

C 31 - 10

$0<a<b$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\log b-\log a}<\frac{a+b}{2}$$

第 32 章　数学Ⅲの積分計算

《学習項目》

・基本関数の積分公式

① $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$　（$\alpha\fallingdotseq-1$ のとき）

② $\displaystyle\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

③ $\displaystyle\int e^{x}dx=e^{x}+C$　　$\displaystyle\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\log a}+C$

④ $\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x+C$　　$\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C$

⑤ $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\tan x+C$　　（注）$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\frac{1}{\tan x}+C$

⑥ $\displaystyle\int \tan x\,dx=-\log|\cos x|+C$

⑦ $\displaystyle\int \log x\,dx=x\log x-x+C$　←部分積分から得られる。

・中身一次の積分

$\displaystyle\int f(x)dx=F(x)+C$ （C は積分定数），$a\fallingdotseq0$ のとき

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

・$\sin x$，$\cos x$ の偶数乗の積分 ⇒ 次数を下げる。

$\displaystyle\sin^{2}x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，　$\displaystyle\cos^{2}x=\frac{1+\cos 2x}{2}$，　$\displaystyle\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

・ラッキー積分　$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　　ただし　$u=g(x)$

特に，$\displaystyle\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$，　$\displaystyle\int\{f(x)\}^{n}dx=\frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1}+C$

・部分積分公式　$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

（定積分）$\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}f'(x)g(x)dx$

・置換積分公式　$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$　　ただし　$x=g(t)$

（定積分）$x=g(t)$ とおき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

・置換積分の例

① $\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分は　$x=a\sin\theta$ とおく。

② $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ の定積分は　$x=a\tan\theta$ とおく。

③ $\sin x$ の奇数乗は，$t=\cos x$ とおく，
$\cos x$ の奇数乗は，$t=\sin x$ とおく，

・偶関数・奇関数の定積分

$f(x)$ が偶関数のとき　$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数のとき　$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

・分数関数の積分

・(分子の次数)<(分母の次数) と変形

・ 部分分数に分解

・$\dfrac{f'}{f}$ を疑う

A問題

〜〜

A 32 - 1

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x+2)dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+5x+1}{x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{t^2-1}{\sqrt[3]{t}}dt$

A 32 - 2

次の定積分，不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x+3)^{10}dx$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x+3)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2x}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\,dx$

A 32 - 3

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$

(3) $\displaystyle\int \tan^2 2x\,dx$

A 32 - 4

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos 3x \sin 5x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 4x \, dx$

A 32 - 5

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+2)}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

A 32 - 6

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+1} dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

A 32 - 7

次の不定積分，定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^7 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} \, dx$

A 32 - 8

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int xe^{-3x}dx$　　(2) $\displaystyle\int x^4\log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \log(x-2)\,dx$

A 32 - 9

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$

A 32 - 10

$e^x=t$ と置換することで，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+6e^{-x}+5}dx$ を求めよ。

ただし，e は自然対数の底である。

A 32 - 11

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

A 32 - 12

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^3\frac{dx}{x^2+9}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$

A 32 - 13

次の不定積分を求めよ。

$\displaystyle\int\cos^5 x\,dx$

B問題

〜〜

B 32 - 1

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2+x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

B 32 - 2

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

B 32 - 3

$\dfrac{3x+2}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$ を満たす定数 a，b，c の値を求めよ。また，この結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$ を求めよ。

B 32 - 4

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2dx$

B 32 - 5

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

(2) $\displaystyle\int_3^4 x\log(x-2)dx$

B 32 - 6

次の定積分を求めよ。

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}}$$

B 32 - 7

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^x+3)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(\log x+1)^2}dx$

B 32 - 8

定積分$\displaystyle\int_1^3 \sqrt{4x-x^2}\,dx$を求めよ。

B 32 - 9

定積分$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$ を求めよ。

B 32 - 10

不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を求めよ。

B 32 - 11

m，n は自然数とする。定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$ を求めよ。

C問題

C 32 - 1

次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx$$

C 32 - 2

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e 5^{\log x} dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$

C 32 - 3

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-\cos 4x}\, dx$ を求めよ。

第 33 章　数学Ⅲの積分の応用（１）

《学習項目》

・軸との間の面積　　区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき　　$S=\int_a^b f(x)dx$

・2曲線間の面積　　区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき　　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

・回転体体積公式　　$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx$　　ただし $a<b$

・全体絶対値の定積分は，面積とみなす

・文字設定と面積
・回転軸をまたぐ部分の回転体
・円筒分割（バウムクーヘン分割）
・パップス ギュルダンの定理
・不等式で表された立体の体積
・斜回転体体積公式

A問題

〜〜

A 33 - 1

曲線 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形に関して，以下の問いに答えよ。

(1)　この図形の面積 S を求めよ。

(2)　この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

A 33 - 2

直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

A 33 - 3

曲線 $y=\log x$，原点を通るこの曲線の接線，および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

B問題

〜〜

B 33 - 1

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

B 33 - 2

曲線 $y=e^x$ と，原点からこの曲線に引いた接線および y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

B 33 - 3

2 つの曲線 $y=ax^2$，$y=\log x$ が接するものとする。

(1)　定数 a の値と接点の座標を求めよ。

(2)　2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

B 33 - 4

曲線 C：$y=xe^{-x}$ について

(1)　曲線 C の変曲点における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C，(1) で求めた接線，y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

B 33 - 5

$a>0$ とする。曲線 $y=\sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

B 33 - 6

次の定積分を計算せよ。ただし，nは自然数，a, bは実数の定数とする。

$$\int_0^{\pi} |a\sin nx + b\cos nx|\,dx$$

B 33 - 7

実数 t が $1 \leqq t \leqq e$ の範囲を動くとき，$S(t)=\int_0^1 |e^x - t| dx$ の最大値と最小値を求めよ。

B 33 - 8

曲線 $y=\log x$ と x 軸，直線 $x=e$ で囲まれた図形を F とする。F を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1，F を直線 $x=e$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の大小を比べよ。

B 33 - 9

曲線 C：$y=\log x$ に原点から接線 ℓ を引く。曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた図形を D とするとき，次の回転体の体積を求めよ。

(1)　D を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_x

(2)　D を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_y

B 33 - 10

曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=1$ および y 軸で囲まれた部分が，$y=1$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

B 33 - 11

曲線 $y^2-2y+x=0$ と y 軸で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

B 33 - 12

座標平面上の 2 点 P$(x,\ 0)$，Q$(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とし，この平面に垂直な正方形を作る。P が原点 O から A$(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正方形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

B 33 - 13

底面の半径が 10 の円筒状の容器に水が入っている。水がこぼれ始めるぎりぎりまで容器を傾けたところ，容器は鉛直方向に対し $60°$ 傾き，水面は底面の中心を通った。水の量 V を求めよ。

B 33 - 14

半径 r の半球形の容器に水が満たされている。この容器を静かに $30°$ だけ傾けると，どれだけの水が流れ出るかを求めよ。

C問題

〜〜

C 33 - 1

曲線 $5x^2+2xy+y^2=16$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

C 33 - 2

$F(a)=\int_1^e |\log x-a|dx$ とする。$F(1)$ の値を求めよ。また，$F(a)$ が最小値をとる a の値と最小値を求めよ。

C 33 - 3

次の曲線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(1)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ において，$y=\sin x$，$y=\cos x$

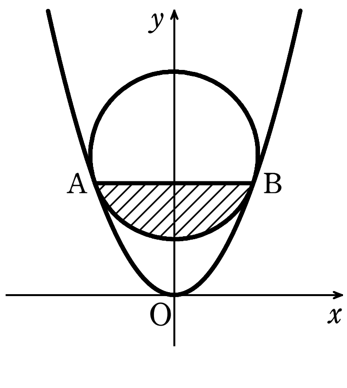
(2)※　$0\leqq x\leqq\pi$ において，$y=\sin\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$，$y=\cos 2x$

C 33 - 4

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，2 曲線 $y=\tan x$，$y=a\sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように，正の実数 a の値を定めよ。

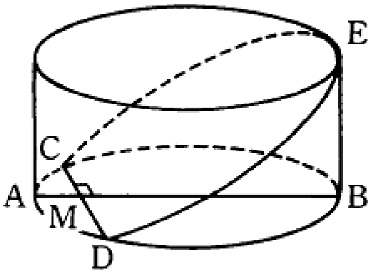
C 33 - 5

xy 平面上において，y 軸上に中心をもつ半径 r の円が，放物線 $y=x^2$ と図のように，点 A と点 B で接しているとする。線分 AB と円弧 AB とで囲まれた部分 (図の斜線部分) を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。ただし，$r>\dfrac{1}{2}$ とする。



C 33 - 6

右の図のように，底円の半径 1，高さ 1 の直円柱がある。底円の直径 AB 上に点 M を$\mathrm{AM}=\dfrac{1}{2}$となるように選び，底円の周上に2点 C，D を線分 CD が点 M を通り，かつ CD⊥AB となるように選ぶ。さらに，この直円柱上に点 E を，BE＝1 かつ BE⊥BA となるように選ぶ。3点 C，D，E を通る平面 α でこの直円柱を切るとき，平面 α の下側にある部分の体積を求めよ。



C 33 - 7

a，b を正の実数とする。空間内の 2 点 A$(0,\ a,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ を x 軸の周りに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1) x 座標の値が t であるような直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ。

(2) 図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

C 33 - 8

xyz 空間に 3 点 P$(1,\ 1,\ 0)$，Q$(-1,\ 1,\ 0)$，R$(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。

(1) t を $0 \leqq t < 2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と △PQR の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) △PQR を z 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

C 33 - 9

関数 $f(x)=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ について，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は，$V=2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} xf(x)\,dx$ で与えられることを示せ。また，この体積を求めよ。

C 33 - 10

放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この直線と放物線によって囲まれる部分を，直線 OA を軸として回転して得られる立体の体積を求めよ。

第 34 章　数学Ⅲの積分の応用（２）

《学習項目》

・積分方程式　　a, b が定数のとき

区間が定数のとき，　$k=\int_a^b f(t)dt$ とおき，積分実行（変数置き換え）

区間の上端が変数 x のとき，　$x=a$ 代入　＆　微分 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

・区分求積法

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

・曲線の長さ公式

（パラメータ型），（$y=f(x)$型）

A問題

～～～

A 34 - 1

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。(2) では，定数 a の値も求めよ。

(1)　$f(x)=3x+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$

(2)　$\int_a^x (x-t)f(t)\,dt=\log x-x+1$

A 34 - 2

次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$

A 34 - 3

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$x=\frac{2}{3}t^3$，$y=t^2$　$(0\leqq t\leqq 1)$

(2)　$x=3t^2$，$y=3t-t^3$　$(0\leqq t\leqq \sqrt{3})$

(3)　$x=e^{\theta}\cos\theta$，$y=e^{\theta}\sin\theta$　$(0\leqq \theta\leqq \pi)$

(4)　$x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$　$(0\leqq \theta\leqq 2\pi)$

A 34 - 4

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$　$(1\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$　$(-6\leqq x\leqq 6)$

(3)　$y=\sqrt{1-x^2}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

B問題

〜〜

B 34 - 1

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{(n+n)^3}\right\}$

B 34 - 2

O を中心とする半径 1 の円 C の内部に中心と異なる定点 A がある。半直線 OA と C との交点を P_0 とし，P_0 を起点として C の周を n 等分する点を反時計回りに順に P_0，P_1，P_2，……，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ とする。

A と P_k の距離を $\overline{\mathrm{AP}_k}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{AP}_k}^{\,2}$ を求めよ。

ただし，$\overline{\mathrm{OA}}=a$ とする。

B 34 - 3

関数 $f(x)$ は $f(x)=x+2\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(x-t)f(t)\,dt$ を満たすとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。

B 34 - 4

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(x-t)f(t)\,dt=\sin x-a$　　　(2) $\displaystyle\int_{a}^{x}(x-t)f(t)\,dt=e^x-1$

B 34 - 5

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2x} f(t)\,dt = xe^{-x} + a$

(2) $\displaystyle\int_a^{3x+2} f(t)\,dt = x^2 + 3x$

C問題

〜〜

C 34 - 1

関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ について，次の問いに答えよ。

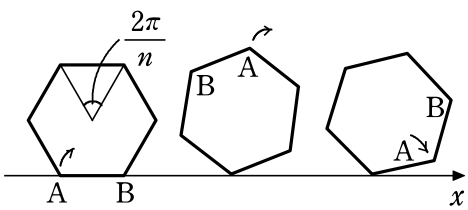
(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値を求めよ。

C 34 - 2

半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。1 つの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないように転がし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。
点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。



図は $n=6$ の場合

(1) $L(6)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ。

C 34 - 3

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ を求めよ。

第 35 章　数学Ⅲの積分の応用（３）

《学習項目》

・特殊な積分計算アラカルト

（例）双曲線にまつわる積分，対称性の利用，漸化式の利用（ウォリスの公式，Beta関数），
Fourier級数，Beta関数の拡張（面積公式の拡張）

B問題

〜〜

B 35 - 1

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos x$，$\sin x$，$\dfrac{dx}{dt}$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx$ を求めよ。

B 35 - 2

$\sqrt{x^2+A}+x=t$ (A は定数) のおき換えを利用して，次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int\sqrt{x^2+4}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

B 35 - 3

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ とおく。

(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくことにより，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ を示せ。

(2)　I の値を求めよ。

B 35 - 4

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx$ であることを示し，これを利用して，定積分

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}dx$ を求めよ。

B 35 - 5

定積分 $\displaystyle I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ について，次の問いに答えよ。

(1) I_1，I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を I_n で表せ。

(3) I_6 を求めよ。

B 35 - 6

$\displaystyle I_n=\int_{1}^{e} (\log x)^n dx$ (n は自然数) とする。$n \geqq 2$ のとき I_n を I_{n-1} を用いて表せ。更に，I_4 の値を求めよ。

B 35 - 7

n を 0 以上の整数とし，$\displaystyle I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく。すると，$I_2=$ ア $\boxed{}$ である。また，$I_{n+2}=$ イ $\boxed{}$ I_n だから，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx=$ ウ $\boxed{}$ となる。ただし，イ $\boxed{}$ は n を用いた式でうめよ。

B 35 - 8

m，n を正の整数とする。定積分 $\displaystyle I(m，n)=\int_{0}^{1} x^m(1-x)^n dx$ に関して

(1) $I(m，1)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$I(m，n)$ を $I(m+1，n-1)$ を用いて表せ。

(3) $I(m，n)$ を m と n を用いて表せ。

C問題

～～

C 35 - 1

(1)　$f(x)$ を連続関数とするとき，$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{\sin^2 x+8}dx$ の値を求めよ。

C 35 - 2

m，n，N は正の整数である。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$　を証明せよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin mx\,dx=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{m}$　を証明せよ。

(3)　区間 $0\leqq x\leqq\pi$ において，曲線 $y=|x-a_1\sin x-a_2\sin 2x-\cdots\cdots-a_N\sin Nx|$ と x 軸で囲まれた領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を最小にする係数 a_1，a_2，……，a_N を求めよ。

C 35 - 3

自然数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　定積分 I_1，I_2，I_3 を求めよ。

(2)　次の不等式を証明せよ。

$$I_n\geqq I_{n+1}$$

(3)　次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

(4)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

C 35 - 4

$I(m,\ n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$であることを用いて，

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m dx$を計算せよ。ただし，$n$，$m$ は自然数，α，β は実数とする。

第 36 章　有名曲線

《学習項目》

・有名曲線アラカルト

・サイクロイド，アステロイド，カージオイド，カテナリー，リサージュ曲線，エピサイクロイド，ハイポサイクロイド，減衰曲線，など

B問題

〜〜

B 36 - 1

曲線 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq \pi)$ と x 軸および直線 $x=\pi$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

B 36 - 2

次の曲線の長さを求めよ。(1) では $a>0$ とする。

(1)　$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$

(2)　$y=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　$(\sqrt{2}\leqq x\leqq 4)$

B 36 - 3

$a>0$ とする。 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(2)　曲線で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

B 36 - 4

曲線 $\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ で囲まれる図形で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

B 36 - 5

座標平面上を運動する点 P がある。点 P は点 (0，1) を出発して，曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x\geqq 0)$ 上を毎秒 1 の速さで動いている。点 P の t 秒後の座標を $(f(t),\ g(t))$ で表すとき，$f(t)$，$g(t)$ を求めよ。

B 36 - 6

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。媒介変数 t で表された曲線 $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$ を C とする。
曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転して得られる図形の体積を求めよ。

B 36 - 7

$a>0$ とする。長さ $2\pi a$ のひもの一方の端が半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 A $(a,\ 0)$ に固定してあり，その円に時計回りに巻きつけてある。このひもをピンと伸ばしながら円からはずしていくとき，ひもの他方の端 P が描く曲線の長さを求めよ。

B 36 - 8

円 C：$x^2+y^2=9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。

(1)　時刻 $t=0$ において点 (3，0) にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ とする。

(2)　(1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

B 36 - 9

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。半径 $\dfrac{1}{n}$ (n は自然数) の円 C_n が,C に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき，C_n 上の点 P の軌跡を考える。ただし，最初 P は点 A (1，0) に一致していたとする。

(1)　O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ。

(2)　P が初めて A に戻るまでの P の軌跡の長さ l_n を求めよ。

(3)　(2) で求めた l_n に対し，$\lim\limits_{n\to\infty} l_n$ を求めよ。

B 36 - 10

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ ($x\geqq 0$) と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k$ を求めよ。

C問題

~~~~~~

C 36 - 1

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$
~~~~~~

第 37 章　物理的問題

《学習項目》

・物理的問題　位置，速度，加速度，速さ，道のり，近似式

・時間で微分　⇒　単位時間当たりの変化率が出る
・近似式
　$|h|$ が十分小さいとき　　$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$
　$|x|$ が十分小さいとき　　$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

B問題

~~~~~~

B 37 - 1

　数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として $x=t^3-3t^2-9t+1$ で表される。次のものを求めよ。

(1)　$t=2$ における速度，加速度

(2)　運動の向きが変わる時刻

B 37 - 2

　上面の半径が 5 cm，深さが 15 cm の直円錐形の容器に水が満たしてある。この下端の口から毎秒 8 cm^3 の割合で水を排出するとき，水の深さが 10 cm になった瞬間における次の速さを求めよ。

(1)　水面の下降する速さ

(2)　水面の面積の減少する速さ

B 37 - 3

(1)　$|x|$ が十分小さいとき，$\sqrt{1-x}$ の 1 次の近似式を作れ。

(2)　(1) を用いて，$\sqrt{0.9998}$ の近似値を求めよ。
~~~~~~

B 37 - 4

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，次の式で表されるとき，点 P の速さと加速度の大きさを求めよ。

(1)　$x=10t$，$y=6t-3t^2$

(2)　$x=2t$，$y=3e^t$

(3)　$x=3t$，$y=\log t$

(4)　$x=\cos t+1$，$y=\sin t+2$

B 37 - 5

x 軸上を運動する点 P がある。P が原点 O を出発して t 秒後の速度 v は，$v=\sin t+\sin 2t$ と表されるものとする。

(1)　出発してから t 秒後の P の位置の x 座標を求めよ。

(2)　出発してから 1 秒間に動く道のり s を求めよ。

B 37 - 6

曲線 $y=x^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口があり，時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。
時刻 t において，容器に残っている水の深さが h のときの水の体積を V とする。
このとき，V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ である。

(1)　水の深さ h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

第 38 章 不等式

《学習項目》

・積分と不等式

・有名な級数（メルカトル級数，ライプニッツ級数）

・積分シュワルツの不等式

・ヤングの不等式

B問題

〜〜

B 38 - 1

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，不等式 $1+x \leqq \dfrac{1}{1-x} \leqq 1+2x$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分を利用して，$\dfrac{5}{8} < \log 2 < \dfrac{3}{4}$ であることを示せ。

B 38 - 2

$0<x<1$ のとき，不等式　$1<1+x^3<1+x^2$　が成り立つことを利用して，

不等式　$\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$　を証明せよ。

B 38 - 3

$a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，$\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ とする。

$|a_n - \alpha| \leqq \displaystyle\int_0^1 x^n dx$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

B 38 - 4

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。n を正の整数とし

$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

B 38 - 5

$n \geqq 1$ とする。次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1} < \log(n+1) < 1+\frac{1}{2}\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

B 38 - 6

$S=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}$ とするとき，$n<S<n+1$ を満たす自然数は

$n=\boxed{}$ である。

C問題

〜〜

C 38 - 1

(1)　$f(x)$，$g(x)$ はともに区間 $a \leqq x \leqq b$ $(a<b)$ で定義された連続な関数とする。このとき，t を任意の実数として $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+tg(x)\}^2 dx$ を考えることにより，次の不等式が成立することを示せ。

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \quad \cdots\cdots〔\mathrm{A}〕$$

また，等号はいかなるときに成立するかを述べよ。

(2)　$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された連続関数で

$$\left\{\int_0^\pi (\sin x+\cos x)f(x)\,dx\right\}^2=\pi\int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx,\ \text{および}\ f(0)=1$$

を満たしている。このとき，$f(x)$ を求めよ。

C 38 - 2

関数 $f(x)=e^x-1$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，任意の実数 a に対して

$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b g(x)\,dx \geqq ab$ が成り立つことを証明せよ。ただし，$b>-1$ とする。