すうがく♪ちゃちゃちゃ！

③数学IIIC 篇【問題】

第１章　複素数平面

《学習項目》

・複素数の定義，加減乗除
・複素数の絶対値，共役複素数
・絶対値，共役複素数の性質

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha||\beta|,\quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\quad \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta},\quad \overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta},\quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

（注）$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ は一般には成り立たない。

・複素数とベクトルの関係　（座標⇔位置ベクトルの成分⇔複素数），（内分・外分・中点・重心）
・極形式
・複素数と積，商，ｎ乗
・ド・モアブルの定理
・複素数平面における円

・共役解の定理
・「複素単項式型ｎ次方程式」
・複素数平面における，回転＆拡大・縮小

A 問題

③**A-1-1**

(1)　次の複素数の絶対値をそれぞれ求めよ．

$4-2i$,　　$\sqrt{3}+i$,　　$3i$.

(2)　$|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{5}$，$\alpha\overline{\beta}=2+i$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．

(i)　$\overline{\alpha}\beta$.　　(ii)　$|\alpha+\beta|$.　　(iii)　$\left|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right|$.

③**A-1-2**

複素数平面上に 3 点 A$(1+3i)$，B(3)，C$(5+6i)$ がある．

次の点を表す複素数をそれぞれ求めよ．

(1)　線分 AB の中点M.

(2)　線分 AC を 2：1 に内分する点 P，2：1 に外分する点 Q.

(3)　三角形 ABC の重心 G.

③**A-1-3**

次の複素数の絶対値，偏角を求めて，極形式で表せ．ただし，偏角は，0° 以上 360° 未満で考えるものとする．

(1)　$1+i$.　　(2)　$1-\sqrt{3}i$.　　(3)　$-2+2\sqrt{3}i$.　　(4)　$-2i$.

③**A-1-4**

$\alpha=1+i$, $\beta=-1+\sqrt{3}i$ とする．次の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角は，0° 以上 360° 未満で表せ．

(1)　$\alpha\beta$.　　(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$.　　(3)　αi.　　(4)　$\dfrac{1}{\alpha}$.

③**A-1-5**

次の複素数の値を極形式で表せ．ただし，偏角は 0° 以上 360° 未満とする．

(1) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{10}$.　　(2) $\{2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\}^8$.

(3) $\dfrac{1}{(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^6}$.

③**A-1-6**

次の方程式をみたす z が複素数平面上にえがく図形をそれぞれ図示せよ．

(1) $z=2+t(1-i)$.　　(2) $|z-4|=|z-2i|$.

③**A-1-7**

次の方程式をみたす z が複素数平面上にえがく図形を，それぞれ図示せよ．

(1) $|z-2|=1$.　　(2) $|z+2+i|=\sqrt{5}$.

(3) $|z|^2-2z-2\overline{z}=0$.

③**A-1-8**

(1) 点 $\mathrm{A}(4+i)$ について，次の点を表す複素数をそれぞれ求めよ．

(i) $-2-3i$ だけ平行移動した点 B.

(ii) 実軸に関して対称移動した点 C.

(iii) 原点に関して対称移動した点 D.

(2) 点 z に対して，点 w が，$w=-(\overline{z}+4)$ で表される．

(i) 点 w は点 z をどのように移動した点か．

(ii) $z=-2+3i$ のとき，w を求めよ．

③$\boxed{\textbf{A-1-9}}$

複素数平面上で，点 A$(3+i)$ を次のように移動した点の複素数を求めよ．

(1) 原点中心に 2 倍拡大した点 B.

(2) 原点中心に 30° 回転した点 C.

(3) 原点中心に $\sqrt{2}$ 倍して，135° 回転した点 D.

B 問題

③**B-1-1**

(1)　$|\alpha|=|\alpha-4i|=2|\alpha-3|$ をみたす複素数 α を求めよ．

(2)　複素数 α，β が $|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{6}$，$|\alpha+\beta|=3$ をみたすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ．

③**B-1-2**

2 次方程式 $x^2-6x+a=0$ の 2 解を α，β とする．複素数平面上において，3 点 O，A(α)，B(β) が正三角形の 3 頂点となるとき，実数 a の値および正三角形の 1 辺の長さを求めよ．

③**B-1-3**

(1)　$|\alpha|=1$ のとき，$\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$ が実数であることを示せ．

(2)　$\dfrac{z-i}{z+i}$ が実数となるような複素数 z の条件を求めよ．

③**B-1-4**

複素数平面上に，O(0)，A$(3+i)$，B$(-1+4i)$ がある．

(1)　四角形 OABC が平行四辺形のとき，C を表す複素数 z を求めよ．

(2)　C$(p+qi)$ とする．3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，実数 p，q のみたす条件を求めよ．

③**B-1-5**

(1)　$\dfrac{(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)(\cos 55^\circ+i\sin 55^\circ)}{\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ}$ の値を求めよ．

(2)　(i)　$(\sqrt{3}+i)(1+i)$ の偏角を求めよ．

(ii)　$\cos 75^\circ$，$\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

③**B-1-6**

(1)　$(1+i)^{11}$ の値を $a+bi$ の形で表せ.

(2)　$(1+i)^n$ が実数となる自然数 n の条件を求めよ.

③**B-1-7**

$z^4=-8+8\sqrt{3}i$ をみたす複素数 z を極形式で表し，複素数平面上に図示せよ.

③**B-1-8**

次の方程式で表される図形を複素数平面上で図示せよ.

(1)　$|z|=|\overline{z}+2i|$.

(2)　$2|z|=|z-3+3i|$.

③**B-1-9**

複素数平面上に，3 点 O(0)，A$(3+i)$，B(z) がある．三角形 OAB が次の条件をみたすとき，z の値をそれぞれ求めよ.

(1)　正三角形.

(2)　AB：BO：OA＝$1:2:\sqrt{3}$.

③**B-1-10**

0 でない複素数 α，β が $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ をみたしている.

(1)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ.

(2)　3 点 O(0)，A(α)，B(β) を 3 頂点とする三角形 OAB の形状を求めよ.

C 問題

③**C-1-1**

複素数平面上の点 z に対して，点 w を $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ で定める．点 z が次の条件をみたして動くとき，点 w のえがく図形をそれぞれ求めよ．

(1)　z が実数全体を動く．

(2)　$|z|=1$. ただし，$z\neq i$.

③**C-1-2**

複素数平面上で，点 z は，$|z|=1$ をみたして動く．また，点 w を $w=(1+i)(z+2)$ で定める．ただし，$0^\circ\leqq\arg w<360^\circ$ とする．

(1)　点 w は，どのような図形をえがくか．

(2)　$|w|$, $\arg w$ の取り得る値の範囲を求めよ．

③**C-1-3**

方程式 $z^5=1$ の解 z について，

(1)　z を極形式で表せ。

(2)　$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ を用いて $z+\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

(3)　$\cos\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

③$\boxed{\text{C-1-4}}$

複素数平面上に異なる 3 点 z，z^2，z^3 がある。

(1)　z，z^2，z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2)　z，z^2，z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。
また，z，z^2，z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

③$\boxed{\text{C-1-5}}$

複素数平面上において，次の各々はどのような図形を表すかを答えよ。

(1)　複素数 z が $|z|=1$ および $z\neq 1$ を満たすとき，$w=\dfrac{z}{1-z}$ が表す点の全体。

(2)　複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，$w=\dfrac{z}{1-\sqrt{3}\,z}$ が表す点の全体。

(3)　複素数 z が $|z|=1$ および $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，$w=\dfrac{z}{1-\sqrt{3}\,z}$ が表す点の全体。

③$\boxed{\text{C-1-6}}$

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z\,(z\neq 0)$ を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。

第２章　二次曲線

《学習項目》

・放物線の公式、楕円の公式、双曲線の公式
・二次曲線の接線公式

・楕円のパラメータ表示
・楕円・円変換

A 問題

③**A-2-1**

放物線 $y^2=-12x$ の焦点の座標と準線の方程式を求め，その概形をかけ。

③**A-2-2**

次の楕円の焦点の座標および長軸，短軸の長さを求め，その概形をかけ。

(1)* $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$　　(2) $4x^2+9y^2=36$　　(3)* $9x^2+4y^2=1$

③**A-2-3**

次の双曲線の焦点の座標および漸近線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1)* $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2)* $9x^2-4y^2=-36$　　(3) $16x^2-9y^2=1$

③**A-2-4**

次の２次曲線の接線の方程式を求めよ。

(1)* 放物線 $y^2=4x$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線
(2) 楕円 $4x^2+y^2=5$ 上の点 $(-1,\ 1)$ における接線

B 問題

③**B-2-1**

次の２次曲線の接線の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y^2=2x$ の接線で，点 $(4,\ 3)$ を通るもの

(4)* 楕円 $9x^2+4y^2=36$ の接線で，傾き２であるもの

③**B-2-2**

次の方程式で表される放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

(1)* $(y-1)^2=8(x+2)$　　(2)　$(x+2)^2=-4(y-2)$

(3)　$y^2+y-x=0$　　(4)* $x^2-2x-2y+5=0$

(5)　$y^2+6y+13-4x=0$

③**B-2-3**

次の楕円の焦点の座標および長軸，短軸の長さを求め，その概形をかけ。

(1)　$4(x-1)^2+y^2=4$　　(2)* $3x^2+4y^2-12x=0$

③**B-2-4**

次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1)* $4x^2-(y+1)^2=-4$　　(2)　$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$

③**B-2-5**

(1)* 直線 $x=-1$ に接し，円 $(x-2)^2+y^2=1$ に外接する円 C の中心 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡の方程式を求めよ。

③**B-2-6**

(1) 焦点の座標が $F(7,\ 2)$, $F'(-1,\ 2)$ で，長軸の長さが 10 である楕円の方程式を求めよ。

(2)* 2 つの定点 $F(1,\ 3)$, $F'(1,\ 1)$ がある。$PF+PF'=4$ である点 P の軌跡の方程式を求めよ。

③**B-2-7**

次の双曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点の座標が $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$ で，点 $(3,\ -2)$ を通る双曲線

(2)* 焦点の座標が $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ で，漸近線が $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ である双曲線

(3) 2 直線 $y=2x$, $y=-2x$ を漸近線にもち，点 $(5,\ 8)$ を通る双曲線

③**B-2-8**

直線 $2x+y=3$ が双曲線 $x^2-y^2=1$ によって切り取られる線分の長さを求めよ。

③**B-2-9**

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が 2 つの共有点 P, Q をもつとき，

(1) k のとる値の範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の中点 R の描く図形の方程式を求めよ。

③$\boxed{\text{B-2-10}}$

(1)* 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点Pから直線 $x-2\sqrt{3}y+8=0$ に下ろした垂線の長さの最大値と最小値を求めよ。また，それぞれの場合に，点Pの座標を求めよ。

(2)* 点 $(x,\ y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上を動くとき，$2x^2+xy$ の最小値を求めよ。

③$\boxed{\text{B-2-11}}$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ の接線が x 軸と y 軸とにはさまれてできる線分の長さの最小値を求めよ。

③$\boxed{\text{B-2-12}}$

(1) x，y が $x^2+2y^2=1$ を満たすとき，$y-|x|$ の最大値と最小値を求めよ。

C 問題

③**C-2-1**

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点P$(a,\ b)$から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた２つの接線の接点をQ，Rとし，接線PQ，PRの傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点Pは $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点Pの全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，G を図示せよ。

③**C-2-2**

楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の外部の点P$(x_1,\ y_1)$から，この楕円に２本の接線を引くと，接線は直交するという。点Pはどんな図形上を動くか。

③**C-2-3**

直線 $y=2x+k$ が曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ $(x>0)$ と異なる２点A，A′で交わるとき，k の値の範囲を求めよ。また，線分AA′の中点P$(x,\ y)$の軌跡の方程式を求めよ。

③C-2-4

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ のどんな接線をとっても，接線と2つの漸近線とで囲まれる三角形の面積は一定であることを示せ。

③C-2-5

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から定点 $\mathrm{F}(a,\ b)$ までの距離 PF と，点 P から直線 $x=c$ に下ろした垂線の長さ PH の比を $e=\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \fallingdotseq c$ とする。

(1)　$e=1$ のとき，点 P の軌跡を表す方程式を求め，その概形をえがけ。

(2)　$e=\dfrac{1}{2}$ のとき，点 P の軌跡が楕円になることを示し，その楕円の長軸と短軸の長さの比を求めよ。

(3)　$e=2$ のとき，点 P の軌跡が双曲線になることを示し，その頂点の座標および漸近線の傾きを求めよ。

③C-2-6

双曲線 $x^2-y^2=a^2$ $(a>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ における法線 m が，双曲線 $y^2-x^2=b^2$ $(b>0)$ に点 Q で接するとする。

(1)　s^2，t^2 を a，b で表せ。

(2)　$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ を a，b で表せ。また，$\angle\mathrm{POQ}$ を求めよ。ただし O は xy 平面の原点とする。

第３章　極座標

《学習項目》

・放物線の公式、楕円の公式、双曲線の公式
・二次曲線の接線公式
・楕円のパラメータ表示
・楕円・円変換

A 問題

③**A-3-1**

次の図形の極方程式を求めよ。

(1)　極Ｏを通り，始線OXとなす角が$\dfrac{\pi}{6}$の直線

(2)　極Ｏを中心とする半径２の円

(3)*　極座標が$\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$である点Ａを通り，OAに垂直な直線

③**A-3-2**

次の直交座標に関する方程式を極方程式で表せ。

(1)*　$\sqrt{3}x+y=4$　　(2)　$x+y=2$　　(3)　$y^2=4(y-1)$

(4)*　$x^2-y^2=4$　　(5)*　$x^2+y^2-4x=0$　　(6)　$x^2+y^2+2x-2y=0$

③**A-3-3**

次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1)　$r=4$　　(2)　$a=r\sin\theta$　　(3)*　$r=a\sin\theta$

(4)*　$r\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$　　(5)*　$r=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$　　(6)*　$r=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

B 問題

③**B-3-1**

次の曲線上を，２点 P，Q が ∠POQ が直角であるように動くとき，

$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ は一定であることを証明せよ。

(1)* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$a>0$，$b>0$）　　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$b>a>0$）

③**B-3-2**

(1) 放物線 $y^2=4px$ （$p>0$）について，焦点 F を極，x 軸の正の部分を始線とする極方程式を求めよ。

(2) 放物線の焦点 F を通る直線が放物線と交わる点を P，Q とすれば，

$\dfrac{1}{\mathrm{FP}}+\dfrac{1}{\mathrm{FQ}}$ は一定であることを証明せよ。

C 問題

③**C-3-1**

xy 座標において，双曲線 $C：x^2-y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における C の接線に対して，原点Oから下ろした垂線の足を点Qとする。

(1) 点Qの x，y 座標を a，b を用いて表せ。

(2) 原点Oを極，半直線 Ox を始線とする極座標において，双曲線 C の極方程式を求めよ。

(3) 点Pが双曲線 C 上を動くとき，点Qが描く軌跡の極方程式を求めよ。

③**C-3-2**

次の問いに答えよ。

(1) 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，その概形を図示せよ。

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$$

(2) 原点をOとする。(1)の曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から直線 $x=a$ に下ろした垂線を PH とし，$k=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ とおく。点Pが(1)の曲線上を動くとき，k が一定となる a の値を求めよ。また，そのときの k の値を求めよ。

③**C-3-3**

xy 平面上において，焦点が原点O，準線の方程式が $x=-2$ であるような放物線 C がある。C の頂点をPとし，原点を通る直線 l が C と相異なる２点Q，Rで交わるように動くとき，線分 QR の長さを u，三角形 PQR の面積を S とすると，$S=\sqrt{u}$ であることを証明せよ。

〜〜〜**MEMO**〜〜〜

第４章　数学Ⅲの関数

《学習項目》

・有理関数（分数型関数），無理関数
・逆関数，合成関数
・グラフの平行移動と対称移動
・三角関数のグラフの周期

A 問題

③**4-A-1**

$y=x-[x]$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ のグラフをかけ。

③**4-A-2**

次の問いに答えよ。

(1) 分数関数 $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ のグラフと直線 $y=x-1$ との共有点の座標を求めよ。

(2) グラフを利用して，不等式 $\dfrac{-x+3}{x-1}\leqq x-1$ を解け。

③**4-A-3**

グラフを利用して，不等式 $\sqrt{x+2}>x$ を解け。

③**4-A-4**

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ の逆関数を求めよ。また，$g(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ が $g(f(x))=\dfrac{x}{x-1}$ を満たすとき，a，b の値を求めよ。

B 問題

③**4-B-1**

曲線 $y=\sqrt{2x-1}$ と直線 $y=x+k$ とのグラフの共有点の個数は，実数 k の値によってどのように変わるか。

③**4-B-2**

x，y が $xy=3x+2y-5$ $(0\leqq x<2,\ y\geqq 0)$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

③**4-B-3**

方程式 $\sqrt{x-2}=a(x-1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この方程式が異なる２つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　異なる２つの実数解の差が $3\sqrt{5}$ であるとき，a の値を求めよ。

③**4-B-4**

a，b，c を定数とするとき，x の１次関数 $f(x)=ax+b$ と $g(x)=x+c$ の合成関数 $f(g(x))$ が $f(g(x))=2x-3$ となり，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が $f^{-1}(3)=-2$ を満たすとき，a，b，c の値を求めよ。

③**4-B-5**

(1)　関数 $f(x)=ax^2+1$ $(a>0,\ x\geqq 0)$ の逆関数 $g(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ のグラフが接するときの a の値と，接点の座標を求めよ。

③**4-B-6**

定義域を $x \leqq 0$ としたときの，関数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ の逆関数を $y=g(x)$ とするとき，関数 $y=g(x)$ のグラフと直線 $y=x-k$ が，異なる２つの共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

③**4-B-7**

(1)　$\sqrt{13-x^2}>x+1$　　　　(2)　$\sqrt{x^2-x} \leqq 3-x$

③**4-B-8**

関数 $y=4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\pi\right)$ のグラフは，$y=\cos\frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $^{ア}\boxed{}\,\pi$ だけ平行移動し，θ 軸をもとにして y 軸方向に $^{イ}\boxed{}$ 倍に拡大したものである。

また，この関数の周期は $^{ウ}\boxed{}\,\pi$ である。

③**4-B-9**

xy 平面において，関数 $y=5\times3^x$ のグラフは，関数 $y=3^x$ のグラフを，x 軸の正の方向に $\boxed{}$ だけ平行移動したものである.

C 問題

③**4-C-1**

関数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　不等式 $f^{-1}(x) \geqq f(x)$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

③**4-C-1**

座標平面上で双曲線 $y=\dfrac{8(x-1)}{x-2}$ と直線 $y=mx$ （$m \neq 0$）の２つの交点をP，Qとする。次の問いに答えよ。

(1)　線分PQの長さを m を用いて表せ。

(2)　線分PQの長さの最小値を求めよ。

③**4-C-2**

実数 a は $0<a \leqq 2$ の範囲を動くものとする。このとき $y=\sqrt{x}$ と $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

③**4-C-3**

(1)　関数 $y=\dfrac{|x|-1}{|x-1|}$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $\dfrac{|x|-1}{|x-1|}=mx$ が解をもたないような m の値の範囲を求めよ。

③**4-C-4**

－－　$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -2x+1 & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$ のように定義された関数 $f(x)$ について

(1)　$y=(f\circ f)(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$(f\circ f)(a)=f(a)$ となる a を求めよ。

〜〜〜MEMO〜〜〜

第５章　数学Ⅲの極限

《学習項目》

・$\dfrac{0}{0}$不定形　⇒　約分して代入，公式，微分の定義

・$\dfrac{\infty}{\infty}$不定形　⇒　次数の比較，指数の底の比較　（無限大のオーダー）

・$\infty-\infty$, $\infty\times 0$ 不定形　⇒　別の形に持ち込む

・$(1+0)^{\infty}$不定形　⇒　eの定義に持ち込む

・無限級数＝第 n 部分和の極限　特に，無限等比級数なら公式利用

A 問題

③**5-A-1**

次の極限を調べよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$

③**5-A-2**

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べ，極限値があればそれを求めよ。

(1)* $\dfrac{3n^2-n}{2n^2+3}$　　(2) 3^n-2^n　　(3)* $3^n+(-4)^n$

(4) $\dfrac{5n+3}{n^2-2n}$　　(5) $\dfrac{(2n-3)(n+2)}{(2n+1)(3n-2)}$　　(6)* $\dfrac{4n}{\sqrt{9n^2-3}}$

(7)* $\dfrac{2^n}{3^n-2}$　　(8)* $2^{3n}-3^{2n}$　　(9) $\dfrac{2^{2n+3}}{4^n+(-3)^n}$

③**5-A-3**

次の極限を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

(3)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2-5n})$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n-1}-\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}}$

③**5-A-4**

次の極限を求めよ。

(5)* $\lim_{n\to\infty}\{4^n-(-3)^n\}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n-2^n}$

(7) $\lim_{n\to-\infty}\dfrac{6n+5}{\sqrt{4n^2+3}}$

(8) $\lim_{n\to-\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-3^n\right\}$

(9)* $\lim_{n\to-\infty}\dfrac{4^n-3^n}{3^n+2^n}$

③**5-A-5**

次の極限を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}$

(2) $\lim_{x\to+0}3^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}$

(4)* $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(5) $\lim_{n\to-\infty}0.5^n$

(6) $\lim_{x\to-0}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

(7)* $\lim_{x\to2-0}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

(8) $\lim_{x\to1-0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

(9) $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

③**5-A-6**

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos x}$

③**5-A-7**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

(3)* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$

(4)* $\lim_{h\to0}\dfrac{e^{2h}-1}{h}$

(5) $\lim_{x\to0}\dfrac{\log(1-2x)}{x}$

③**5-A-8**

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{7^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos\frac{n}{2}\pi$

③**5-A-9**

次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}-\cdots\cdots$

(2) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\cdots\cdots$

(3)* $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{4}{9}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}+\cdots\cdots$

B 問題

③**5-B-1**

次の極限を調べよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}$　(2)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}$　(5)* $\displaystyle\lim_{x\to3+0}\frac{|x-3|}{x^2-9}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to3-0}\frac{|x-3|}{x^2-9}$

③**5-B-2**

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+4}-x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1})$

③**5-B-3**

a，b を定数とする。$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+4x+7}+ax+b)$ が極限値をもつとき，a，b の値を求め，その極限値を求めよ。

③**5-B-4**

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos 3x-\cos x}$

(7)* $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$　(8) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\tan\theta$

(9)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x-1}$　(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan(\sin \pi x)}{x}$

③**5-B-5**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{n^2+n}]-\sqrt{n}}{n}$ を求めよ。($[n]$は，n を超えない最大の整数を表す。)

③**5-B-6**

$a>0$，$b>0$ とする。$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ を求めよ。

③**5-B-7**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}$　(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin x}-1}{x^2}$　(3)* $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

(4)* $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-e^{x-1}}{x-1}$　(5)* $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\log(1+x)}$　(6) $\lim_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$

$(a>0,\ a\neq1)$

③**5-B-8**

次の無限級数が収束するための a の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

(1) $a(3a-2)+a(3a-2)^3+a(3a-2)^5+\cdots\cdots$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n$

C 問題

③**5-C-1**

関数 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$ が $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$，$\lim_{x\to 2}f(x)=0$ を満たすとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

③**5-C-2**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2}\,x\right)$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)x^2$

③**5-C-3**

関数 $f(x)$ は，$(x^2+x-2)f(x)=ax^3+bx^2+c+d\sin(x^2-1)$ を満たす。

(1) $\lim_{x\to\infty}f(x)=3$ であるとき，a，b を求めよ。

(2) $\lim_{x\to\infty}f(x)=3$，$\lim_{x\to 1}f(x)=8$ であるとき，c，d を求めよ。

③**5-C-4**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$　　(2)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x+\sin x}$

(3) $\lim_{x\to -0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$　　(4) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$

③**5-C-5**

$x>0$ のとき $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つ。これを用いて，次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$

③**5-C-6**

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$

(2)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{2n}$

(3)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3x-1)\sin\{\log(x-2)-\log x\}$

〜〜〜MEMO〜〜〜

第６章　数学Ⅲの極限の応用★

《学習項目》

・極限と数列の融合（計算問題として）

A 問題　★　数列の復習としても使える

③**6-A-1**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots\cdots+2n}$

(2)* $S_n=2+4+6+\cdots\cdots+2n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot1}{n^2(n-1)}$

(4)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(2n)^2}$

③**6-A-2**

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos k\pi$

③**6-A-3**

$0.\dot{1}\dot{2}\times0.\dot{1}3\dot{2}$ の計算の結果を循環小数で表せ。

B 問題

③**6-B-1**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2(k+2)^2}$

(3)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)$　　(4)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{2k}{3}\pi$

③**6-B-2**

数列 $\{a_n\}$ は，すべての自然数 n に対して，

$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots\cdots+2^{n-1}a_n=8-5n$ を満たすとする。

(1)　a_1 および a_n $(n\geqq2)$ を求めよ。

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

(3)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n}{2}\pi$ の和を求めよ。

③**6-B-3**

△ABC において，AB$=4$，AC$=3$，BC$=5$ であって，円 O_1 は３辺に接する円，円 O_2 は AB，BC に接し，かつ円 O_1 に外接する円で，以下同様に円 O_3，円 O_4，……，円 O_n を作るとき，次の各問いに答えよ。

(1)　円 O_1 の面積を求めよ。　　(2)　円 O_2 の面積を求めよ。

(3)　$n\to\infty$ のとき，円 O_1，O_2，……，O_n の面積の総和を求めよ。

③**6-B-4**

$n\geqq1$ のとき，n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$，n が偶数のとき $a_{n+1}=a_n$，$a_1=3$ で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

③**6-B-5**

$0<a<b$ である定数 a, b がある。$x_n=\left(\dfrac{a^n}{b}+\dfrac{b^n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき

(1) $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ を証明せよ。　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

③**6-B-6**

２つの放物線 $y=x^2$, $y=(x-n)^2+n^2$ と y 軸で囲まれた部分（境界線を含む）にあって，x 座標，y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

③**6-B-7**

関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を考える。

(1) $0<a_n<2$, $a_n<a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) $2-a_{n+1}<\dfrac{1}{2}(2-a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

C 問題

③**6-C-1**

数列 $\{a_n\}$ について，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$，$S_0=0$ とおく。

$a_n=S_{n-1}+n\cdot 2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n を n の式で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k}$ を求めよ。

③**6-C-2**

数列 $\{a_n\}$ は条件 $a_1=\dfrac{2}{3}$，$\displaystyle\int_0^{n+1}\{(a_{n+1}-a_n)x+a_{n+1}\}dx=-\frac{a_n}{2}$

$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n を用いて表し，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

③**6-C-3**

$a_1=2,\ n\geqq 1$ のとき，$a_{2n}=\sqrt{a_{2n-1}},\ a_{2n+1}=\dfrac{3}{2}a_{2n}-\dfrac{1}{2}$ を満たす数列 $\{a_n\}$

を考える。

(1) $a_n>1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) $a_{2n+1}-1<\dfrac{3}{4}(a_{2n-1}-1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

③**6-C-4**

p，q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする。自然数 n に対し，有理数 a_n，b_n を $(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$ によって定める。

(1) $(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$ を示せ。　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$ を示せ。

③**6-C-5**

第１象限に，次の条件(A)，(B)，(C)を満たす円の列 C_1，C_2，…がある。

(A) 各 C_n は円 $C：x^2+(y-1)^2=1$ に外接し，x 軸に接している。

(B) 各 n について C_{n+1} は C_n に外接し，C_n の中心の x 座標は単調減少している。

(C) C_1 の中心の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である。

円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の漸化式を求め，a_n，b_n を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_na_{n+1}}$ を求めよ。

～～～MEMO～～～

補章　数学Ⅲの極限の応用（２）★

《学習項目》

・極限の応用の中で，単なる数列の応用というわけでもないものが中心。雑多。

B 問題

③**6-B-8**

次の関数のグラフをかけ。ただし，n は整数とする。

(1)* $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{n+1}}{1+x^n}$　　(2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n-1}{|x|^n+1}+x$

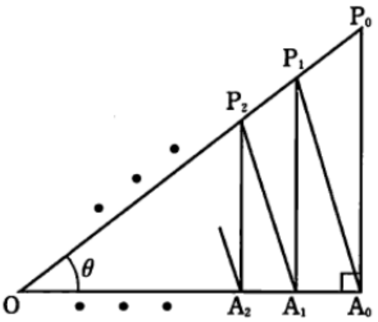
③**6-B-9**

n を 3 以上の自然数とする。周の長さが 2π である正 n 角形の面積を S_n とする。

(1) S_n を n を用いて表せ。　　(2) $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

③**6-B-10**

直角三角形 A_0P_0O の斜辺 OP_0 上に点の列 P_1，P_2，……，P_n，……を，辺 OA_0 上に点の列 A_1，A_2，……，A_n，……を，それぞれ次のように定める。まず，$OP_1=OA_0$ とする。次に点 P_1 から OA_0 に下ろした垂線の足を A_1 とする。次に $OP_2=OA_1$ とし，点 P_2 から OA_0 に下ろした垂線の足を A_2 とする。以下，この操作を繰り返す。



$\angle P_0OA_0=\theta$，$OA_0=a$ とし，$\triangle A_{n-1}P_{n-1}P_n$ の面積を S_n とする。
$S(\theta)=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) S_1 を a と θ で表せ。　　(2) $S(\theta)$ を a と θ で表せ。

(3) $\lim_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。

C 問題

③**6-C-6**

次の関数が x のすべての値に対して連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。また，そのときの，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\quad(n\text{ は正の整数})$$

③**6-C-7**

次の関数のグラフをかけ。

(1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\tan^{2n+1}x-\tan^n x+1}{\tan^{2n+2}x+\tan^{2n}x+1}\quad\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1+\sin\pi x)^n+x-1}{(1+\sin\pi x)^n+1}\quad(0\leqq x\leqq 2)$

③**6-C-8**

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2}x+\cos(a+bx)}{x^{2n}+1}$ が x の連続関数となるように a，b の値を定めよ。ただし，$0\leqq a<2\pi$ とする。

③**6-C-9**

数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ が条件：$2{a_n}^2=a_{n-1}+1$, $a_n>0$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たす。ただし，$0<a_0<1$ である。

(1) $0<a_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) $a_n=\cos\theta_n$ $\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。θ_n と θ_{n-1} の関係式を導き，θ_n を θ_0 で表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$ を求めよ。

第７章　数学Ⅲの微分

《学習項目》

・微分の定義

・微分公式　　基本関数の微分公式（7種），積の微分公式，商の微分公式，合成関数の微分公式，逆関数微分公式，パラメータ関数の微分公式，対数微分法

・$\dfrac{dy}{dx}$ は，1回微分までなら分数扱いできる。 2回微分では分数扱いできない。

A 問題

③**7-A-1**

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$　(2) $y=x^3\cos x$　(3) $x^2\log x$

(4) $y=(x-2)e^x$　(5) $y=2^x\sin x$　(6) $y=\dfrac{e^x}{x}$

(7) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　(8) $y=\sin(3x+2)$　(9) $y=\cos^3 x$

③**7-A-2**

(1) 曲線 $y=\log x$ 上の点 $\left(e^2,\,2\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\,1\right)$ における接線および法線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x+3}$ 上の点 $\left(1,\,2\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

(4) 曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式を求めよ。

③**7-A-3**

x の関数 y が，θ を媒介変数として，次のように与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表せ。

(3)* $\begin{cases} x=2(\theta-\sin\theta) \\ y=2(1-\cos\theta) \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$

③**7-A-4**

次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^3-3xy+y^3=1$　　(2) $x=y\sqrt{1+y}$ $(y>0)$

③**7-A-5**

対数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)* $y=x^{\log x}$ $(x>0)$　　(2) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$

③**7-A-6**

次の関数は，$x=1$ で連続であるか。また，$x=1$ で微分可能であるか。

(1) $f(x)=2x|x-1|+3$　　(2) $f(x)=|x-1|^3$

B 問題

③**7-B-1**

原点から曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。

③**7-B-2**

(1)* 曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の点Ｐにおける接線の傾きが１になるとき，Ｐの y 座標を求めよ。

(2) 曲線 $y=\log x+a$ （a は定数）に原点から接線を引いたとき，接点Ｔの座標を求めよ。

③**7-B-3**

媒介変数 t で表された曲線 $x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$ について，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

③**7-B-4**

次の曲線上の点 Ａ における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=10$，Ａ(27，1)　　(2)　$x^2+3xy-y^2=3$，Ａ(1，2)

③**7-B-5**

曲線 $y=e^{-x^2}$ に x 軸上の点 $(a,\ 0)$ から接線を引く。

(1) 異なる２本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

(2) ただ１本の接線が引けるときの a の値，および接点の座標を求めよ。

③**7-B-6**

(1) $y=\log x$ と $y=ax^2$ （$a\neq 0$）のグラフが共有点をもち，この点で共通の接線をもつとき，a の値とその共通接線の方程式を求めよ。

(2)* ２曲線 $y=2\sin x$，$y=a-\cos 2x$ が接するように，定数 a の値を定めよ。ただし，$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。

③**7-B-7**

２つの曲線 $y=e^x$，$y=\log x+2$ に共通な接線の方程式を求めよ。

③**7-B-8**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

③**7-B-9**

(1)* $x=\sin y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(2) $x=\tan y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の関数として表せ。

③**7-B-10**

次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=e^{3x}$　　(2)* $y=xe^x$　　(3) $y=\dfrac{1}{x}$

③**7-B-11**

a を実数とし，区間 $(-1,\infty)$ において関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & (-1<x\leqq 0\ \text{のとき})\\ ax & (0<x\ \text{のとき})\end{cases}$$

ただし，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるものとする。

(1) a を求めよ。

(2) 導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ。

C 問題

③**7-C-1**

次の，微分法の基本公式を証明せよ。

(1) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ **（積の微分法）**

(2) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ **（商の微分法）**

(3) $(x^n)'=nx^{n-1}$ **（n は整数）（x^n の導関数）**

(4) n 整数のとき，$\left[\left\{f(x)\right\}\right]'=n\left\{f(x)\right\}^{n-1}\cdot f'(x)$

③**7-C-2**

関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)$ に対して $g(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$ とし，$g(x)$ の逆関数を $h(x)$ とする。

(1) $g(x)$ を求めよ。

(2) $h(x)$ を求めよ。

(3) $\dfrac{d}{dx}h(x)$ を求めよ。

(4) $(x^2+1)\dfrac{d^3}{dx^3}h(x)+3x\dfrac{d^2}{dx^2}h(x)$ を求めよ。

③**7-C-3**

関数 $f(\theta)=a\cos^3\theta+b\cos^2\theta-12\cos\theta+5\ (0<\theta<\pi)$ が

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{3}$ を満たすとき，a と b の値を求めよ。

③**7-C-4**

関数 $f(x)$ はすべての実数 s，t に対して

$$f(s+t)=f(s)e^t+f(t)e^s$$

を満たし，さらに $x=0$ では微分可能で $f'(0)=1$ とする。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを，微分の定義に従って示せ。さらに $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

③**7-C-5**

x の関数 y が，θ を媒介変数として，$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ と表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$，および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ の関数として表せ。

③**7-C-6**

次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ で連続であるが，微分可能でないことを示せ。

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\quad(x\fallingdotseq 0),\ f(0)=0$$

微分計算

③**7-K-1**

次の関数を微分せよ。

(1)* $y=\sqrt{(3x^2-2)^3}$　(2) $y=(x+1)\sqrt{x^2+1}$　(3)* $y=x^2\sqrt{2-x}$

(4)* $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$　(5)* $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$　(6) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$

(7) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x}}$　(8) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{(x-1)^2}$　(9) $y=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

③**7-K-2**

次の関数を微分せよ。

(1)* $y=\sin^5 4x$　(2)* $y=\tan^2 x^2$　(3) $y=\sin^2(1+x^2)$

(4)* $y=\cos^4 x^3$　(5) $y=x^2\tan^3 x$　(6)* $y=x^2\cos^3 2x$

(7)* $y=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$　(8)* $y=\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$　(9) $y=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

③**7-K-3**

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|\sin x|$　(2) $y=e^{\sin(x+1)}$　(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(4) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$　(5) $y=\log\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$　(6) $y=\{\log(\sqrt{x}+1)\}^2$

(7) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

③**7-K-4**

対数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)* $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(x>0)$　(2) $y=(\log x)^{\tan x}$ $(x>1)$

③**7-K-5**

関数 $f(x)=xe^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(n)}(a_n)=0$ を満たす a_n を求めよ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{n}$ の和を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ の和を求めよ。

補充問題

③**7-K-6**

x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ から，関数 $y=f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}}$ のグラフに異なる２本の接線が引けるとき，定数 a の範囲を求めよ。

③**7-K-7**

k を正の定数とする。２つの曲線 C_1：$y=\log x$，C_2：$y=e^{kx}$ に対して，原点Ｏから曲線 C_1 に引いた接線が，C_2 にも接するような k の値を求めよ。

第８章　数学Ⅲのグラフ

《学習項目》

・基本的な関数のグラフ
・増減，極値
・凹凸・変曲点
・グラフの対称性（偶関数・奇関数）
・関数の周期性
・漸近線　（タテ・ヨコ・ナナメ）
・パラメータ関数のグラフ
・グラフ予想図
　　二乗⇒負でも正になる。交点が接点になる。
　　和のグラフ⇒一方に他方を乗せる・ケズる。
　　積のグラフ⇒ゼロ点，軸との上下，端点に着目

A 問題

③**8-A-1**

次の関数のグラフをかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

$$y = x + 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

③**8-A-2**

次の関数のグラフをかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

B 問題

③8-B-1

次の関数のグラフをかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

$$y=\frac{x}{x^2-x+1}$$

③8-B-2

次の関数の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y=e^{-x^2}$

③8-B-3

次の関数の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y=xe^{-x}$　（必要ならば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を用いてよい。）

③8-B-4

次の関数の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y=x\log x$　（必要ならば，$\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてよい。）

③8-B-5

関数 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

③**8-B-6**

次の関数の増減麻，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$$y^2=x^2(x+3)$$

Hint　$y=\pm x\sqrt{x+3}$ と変形

③**8-B-7**

次の関数の最大値最小値を求めよ。

$$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$$

③**8-B-8**

関数 $y=\dfrac{x(x-6)}{x-8}$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

③**8-B-9**

xy 平面上に $x=2\cos 2\theta$ ，$y=2\cos 3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ と媒介変数表示された曲線Cの概形をかけ。

C 問題

③**8-C-1**

$f(x)=e^x\sin(\sqrt{3}x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f'(0)$，$f''(0)$ を求めよ。

(2) 区間 $0\leqq x\leqq\pi$ において，$y=f(x)$ の極値と変曲点を与える x の値を求めよ。

③**8-C-2**

次の曲線の概形を図示せよ。

$$y^2=x^2(1-x^2)$$

③**8-C-3**

関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x-2\sin 2x+\sin x$ の区間 $[0,\ \pi]$ における最大値，最小値を求めよ。

③**8-C-4**

$f(x)=e^{3x}-6e^{2x}+11e^x-6$ とするとき，

関数 $F(x)=|f(x)|+\dfrac{1}{3}|f'(x)-2e^x|$ の $0\leqq x\leqq\log 3$ における最大値，最小値を求めよ。

③**8-C-5**

関数 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

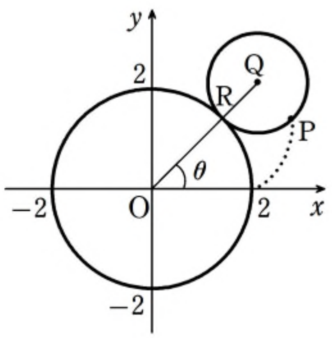
③**8-C-6**

次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{x(1-x)}}$　　(2)　$y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

③**8-C-7**

原点 O を中心とし，半径 2 の円を D_1 とする。
半径 1 の円 D_2 は最初に中心 Q が $(3,\ 0)$ にあり，円 D_1 に外接しながら滑ることなく反時計まわりに転がるものとする。点 P は円 D_2 の円周上に固定されていて，最初は $(2,\ 0)$ にある。
2 つの円の接点を R としたとき，線分OR が x 軸となす角を θ とする。
点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。



～～～MEMO～～～

第９章　数学Ⅲの微分の応用

《学習項目》

・極値から係数決定，極値をもつかどうかの判定
・共通接線（2 種），接線本数

グラフの応用
・関数の最大・最小 ⇒ グラフの y 座標を比べる
・方程式の解　⇒　グラフの共有点の x 座標に対応させる
・不等式（大小関係）　⇒　グラフの上下関係に対応させる

A 問題

③**9-A-1**

関数 $f(x)=a\sin 2x+b\cos x$ は，$x=\frac{7}{6}\pi$ のとき極大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ をもつ。係数 a，b の値を求めよ。

③**9-A-2**

方程式 $\log x-ax=0$ が 2 個の実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。
必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

③**9-A-3**

すべての正の数 x に対して，不等式 $x-\log ax\geqq 0$ が成り立つような実数 a の中で最大のものを求めよ。

B 問題

③**9-B-1**

a を正の定数とするとき，x の関数 $f(x)=\dfrac{-ax+a^2+1}{x^2-4}$ の極小値とそのときの x の値を求めよ。

③**9-B-2**

x の関数 $f(x)=x^3+2ax+\dfrac{b}{x}$ が，$x>0$ で極大値と極小値をそれぞれ１つずつもつための a，b の条件を求めよ。

③**9-B-3**

方程式 $2x+\cos x=2$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に，ただ１つの実数解をもつことを証明せよ。ただし，用いた定理の名称と，その定理が使えるための条件を明示すること。

③**9-B-4**

(1)　$x>0$ のとき，関数 $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2}{x+1}$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　点 $(1,\ 1)$ から曲線 $y=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ へ接線は何本引けるか。

③**9-B-5**

(1)* 関数 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-x$ の増減，極値，凹凸などを調べ，そのグラフをかけ。

(2) (1)のグラフを利用して，3 次方程式 $x^3+kx^2-x-1=0$（k は実数）の異なる実数解の個数を調べよ。

③**9-B-6**

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ。また，3^{π} と π^3 の大小関係を調べよ。

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ。また，$3^{\pi}>\pi^3$ を証明せよ。

③**9-B-7**

$x>0$ のとき，$2\sqrt{x}>\log x$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。

③**9-B-8**

不等式 $\cos 2x+cx^2\geqq 1$ がすべての実数 x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。

C 問題

③**9-C-1**

$a>0$，b を定数とする。実数 t に関する方程式

$$(a-t+1)e^{t}+(a-t-1)e^{-t}=b$$

の解の個数を調べよ。ただし，$\lim_{t\to\infty} te^{-t}=\lim_{t\to-\infty} te^{t}=0$ は既知としてよい。

③**9-C-2**

方程式 $2\log(x-a)-\dfrac{a}{x}=0$ が相異なる 2 つの実数解をもつような実数 a の範囲を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

③**9-C-3**

x の方程式 $a\log(x+a)+\dfrac{a}{2}x^2-x=0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ。ただし，a は正の実数とし，対数は自然対数とする。

③**9-C-4**

$x>0$ のとき，任意の自然数 n に対して不等式

$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

③$\boxed{\textbf{9-C-5}}$

$0<a<b$ のとき，不等式 $\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<\dfrac{a+b}{2}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

③$\boxed{\textbf{9-C-6}}$

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を証明せよ。

(2) k を定数とする。(1)を利用して，x が正の値をとりながら 0 に近づくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+kx^2}\right)$ を求めよ。

③$\boxed{\textbf{9-C-7}}$

すべての正の数 x，y に対して，不等式 $x(\log x-\log y) \geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ。

③$\boxed{\textbf{9-C-8}}$

不等式 $e^x>px+q$ が，すべての実数 x に対して成り立つような点 $(p,\ q)$ の存在する領域を pq 平面に図示せよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x=0$ である。

補充問題（ただの練習用）

③**9-C-9**

次の方程式の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

(1)* $\log x = ex - a$　　(2)* $2\sin x = x + a$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

(3) $e^x = ax$ （必要ならば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。）

(4) $x^2e^x - a = 0$ （必要ならば，$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$ を用いてよい。）

③**9-C-10**

次の不等式を証明せよ。

(1)* $x > 0$ のとき，$2x - x^2 < \log(1+x)^2 < 2x$

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x > \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

(3)* $x > 0$ のとき，$\dfrac{x-1}{x} \leqq \log x \leqq x - 1$

第 10 章　数学Ⅲの積分計算

《学習項目》

・積分　：　微分の逆演算

・積分の性質（得意なことと不得意なこと）

和・差・実数倍はバラせる。$\int\{kf(x)+lg(x)\}dx=k\int f(x)\,dx+l\int g(x)\,dx$

積・商・合成関数（とくに●乗）の積分公式は存在しない

・合成関数でも中身が一次式なら積分できる

・できるだけ和に直す，できるだけ次数下げ

・$\int\frac{f'}{f}$，$\int f^n\cdot f'$ 型（合成関数の微分後の形）

・部分積分 $\int f'g=fg-\int fg'$

①$●\times x$　②$●\times\log x$　③$e^{▲}\times\sin■$，$e^{▲}\times\cos■$

・置換積分

①$\sin^{奇}x$　⇒　$t=\cos x$　　$\cos^{奇}x$　⇒　$t=\sin x$

②$\sqrt{r^2-x^2}$　⇒　$x=r\sin\theta$，$\frac{1}{x^2+a^2}$　⇒　$x=a\tan\theta$

A 問題

③**10-A-1**

次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int(3e^x-2^x)\,dx$　(2)　$\int\left(7^x+x^7-\frac{1}{x}\right)dx$　(3)　$\int\frac{\sqrt[4]{x^3}-x^2}{\sqrt{x}}dx$

(4)　$\int(2\sin x-3\cos x)\,dx$　(5)　$\int(\tan x-2)\cos x\,dx$

③**10-A-2**

次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int(3x-4)^5\,dx$　(2)　$\int(1-2x)^3\,dx$

(3)　$\int\frac{dx}{3x-2}$　(4)　$\int e^{-2x+3}dx$

(5)　$\int 3\cos 3x\,dx$　(6)　$\int\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

③**10-A-3**

次の不定積分，定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin x \cos x \cos 2x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\,d\theta$

③**10-A-4**

次の定積分の値を求めよ。

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{4x^2-1}$　　(6)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+4}{t^2-t-2}\,dt$

③**10-A-5**

次の不定積分を求めよ。

(2) $\displaystyle\int \cos x \sin 2x\,dx$　　(4)* $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$

③**10-A-6**

次の不定積分を求めよ。

(2) $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx$　　(4)* $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx$

(4)* $\displaystyle\int \tan x\,dx$

③**10-A-7**

次の不定積分を求めよ。

(1)* $\displaystyle\int 3x^2(x^3-3)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$　　(4)* $\displaystyle\int xe^{x^2+1}\,dx$

③**10-A-8**

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$　　(4)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

③**10-A-9**

次の定積分の値を求めよ。

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx$　　(6)* $\displaystyle\int_0^1 x\log(x+1)dx$

③**10-A-10**

次の不定積分を求めよ。

(3)* $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

③**10-A-11**

次の定積分の値を求めよ。

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta$

③**10-A-12**

次の定積分の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(1)* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

③**10-A-13**

(4)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$　　(5) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$

B 問題

③**10-B-1**

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 (e^x+1)^2 dx - \int_0^1 (e^x-1)^2 dx$　　(2)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$

③**10-B-2**

次の定積分の値を求めよ。

(2)* $\int_2^3 x(x-2)^3 dx$　　(2) $\int_a^b (x-a)(x-b)^2 dx$　（a，b は定数）

③**10-B-3**

次の定積分の値を求めよ。

(4) $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^4 x\, dx$

③**10-B-4**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$　　(2) $\int \dfrac{3x+2}{x(x+1)^2} dx$

③**10-B-5**

m，n は自然数とする。定積分 $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$ を求めよ。

③**10-B-6**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x+1}dx$

(3)* $\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$

③**10-B-7**

次の不定積分を求めよ。

(1)* $\displaystyle\int\sin^3 x\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{1-\sin x}dx$

(3) $\displaystyle\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx$

(4)* $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$

③**10-B-8**

次の定積分の値を求めよ。

(2)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$

(3)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

(4)* $\displaystyle\int_1^e(\log x)^2dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

③**10-B-9**

定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}e^{-3x}\sin 4x\,dx$ を求めよ。

③**10-B-10**

次の定積分の値を求めよ。

(7) $\displaystyle\int_0^1(2+x)\sqrt{1-x^2}dx$

(5)* $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x^2-2x+2}$

③**10-B-11**

次の定積分の値を求めよ。

(1)* $\int_{-1}^{1} x\sqrt{3-x^2}\,dx$　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 2x\, dx$

③**10-B-12**

次の不定積分を求めよ。

(4)* $\int \frac{dx}{\sin x}$

③**10-B-13**

次の不定積分を求めよ。

(3) $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$

(5) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

(6)* $\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

③**10-B-14**

次の定積分の値を求めよ。

$\int_0^{\pi} |\sin x - \sqrt{3}\cos x|\,dx$

C 問題

③**10-C-1**

$I_n=\int(\log x)^n dx$ とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$I_n=x(\log x)^n-nI_{n-1}$（n は整数，$n\geqq1$）

③**10-C-2**

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$（$n=0$，1，2，…）について，次の問いに答えよ。

(1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$（$n=2$，3，…）に部分積分法を用いて，

$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$（$n=2$，3，…）が成り立つことを示せ。

(2)　(1)の結果を用いて，I_5 および I_6 の値を求めよ。

③**10-C-3**

負でない整数 n に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおくとき，

I_1，I_2，I_3 の値を求めよ。

③**10-C-4**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ の値を求めよ。

③**10-C-5**

n を自然数とするとき，次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x|\sin x|dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x|\sin nx|dx$

(3)* $\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx$

③**10-C-6**

$n=0$，1，2，……に対して，$I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x}dx$ とする。このとき，

(1) $I_0=\displaystyle\int_0^1 e^{2x}dx$ の値を求めよ。

(2) $n\geqq 1$ のとき，I_n を n と I_{n-1} を用いて表せ。

(3) $I_4=\displaystyle\int_0^1 x^4 e^{2x}dx$ の値を求めよ。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x\cos x)e^{2\sin x}dx$ の値を求めよ。

第 11 章　数学Ⅲの積分の応用（１）

《学習項目》

・面積
・回転体体積公式
・絶対値関数の積分
・非回転体体積公式
・文字設定と面積
・回転軸をまたぐ部分の回転体
・円筒分割（バウムクーヘン分割）
・パップス・ギュルダンの定理
・不等式で表された立体の体積
・斜回転体体積公式

A 問題

③**11-A-1**

次の曲線または直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$　　(2)　$y=\sin x+1$，$y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$

(3)　$y=3^x$，$y=2x+1$　　(4)*　$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，$y=1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(5)*　$y=\sqrt{4-x^2}$，$y=\sqrt{3}x$，y 軸

③**11-A-2**

次の曲線や直線によって囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1)　$y=x^3-x$，x 軸　　(2)　$y=4-x^2$，$y=2-x$

③**11-A-3**

次の曲線や直線によって囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1)　$y=\log x$，x 軸，$x=e$　　　(2)　$y=2x^2$，$y=x^2+1$

③**11-A-4**

点 P は曲線 $y=\sin x$ 上を動くものとする。点 P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x+1$ との交点を Q とする。線分 PQ を含み座標平面に垂直な平面上に点 R をとり，正三角形 PQR を作る。点 P が原点から点 $(\pi,\ 0)$ まで動くとき，△PQR が通過してできる立体の体積を求めよ。ただし，点 R は座標平面に関して常に同じ側にとることにする。

B 問題

③**11-B-1**

曲線$y=x^2-2x$と直線$y=x$によって囲まれた部分を，x軸の周りに一回転させてできる立体の体積を求めよ。

③**11-B-2**

xy平面の第1象限内で，y軸と円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ とが囲む部分をy軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

③**11-B-3**

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，2曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ およびy軸で囲まれる部分をy軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。●宮崎大●

③**11-B-4**

底面の半径がaの直円柱がある。底面の直径を通り，底面と角αをなす平面でこの直円柱を側面を通るように切ったとき，この平面と直円柱の底面および側面で囲まれた立体の体積Vを求めよ。ただし，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ とする。

③**11-B-5**

曲線$x=\sin t,\ y=t\cos t\quad\left(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$と$x$軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

③**11-B-6**

半径 rの半球形の容器に水が満たされている。この容器を静かに 30°だけ傾けると，どれだけの水が「残る」かを求めよ。

③$\boxed{\text{11-B-7}}$

(1)　媒介変数 t を用いて表された曲線 $x=a(t-\sin t)$. $y=a(1-\cos t)$ の $0 \leq t \leq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(2)　**$a>0$ とする。$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，サイクロイド**

$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$

を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

③$\boxed{\text{11-B-8}}$（練習用）

曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x-2$ および y 軸によって囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

C 問題

③**11-C-1**

次の曲線または直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{\log x}{x^2}$，$y=\dfrac{1}{4}\log x$　　　(2)*　$y=\log x+(\log x)^2$，x 軸

③**11-C-2**

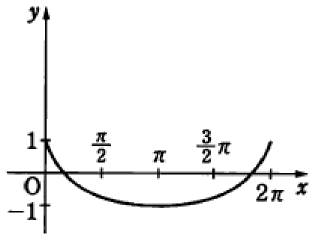
xy 平面上に，$C:\begin{cases} x=3\cos 2t \\ y=2\sin 3t \end{cases}$　$\left(0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　と表される曲線 C がある。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

③**11-C-3**

媒介変数 t を用いて $x=t-\sin t$，$y=\cos t$（$0\leqq t\leqq 2\pi$）と表される曲線を C とする。

(1)　C と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2)　C と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2\pi$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和を求めよ。



③**11-C-4**

半径がともに a の 2 つの円柱の軸が直交して，互いにつきぬけているとき，これらの円柱の共通部分の体積を求めよ。

③**11-C-5**

高さが 1 で，底面が xy 平面上にのっている立体があり，平面 $z=t$（$0\leqq t\leqq 1$）とこの立体との交わりは

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ (x+t+1)(y+t+1)\leqq 4\}$$

である。この立体の体積 V を求めよ。

③**11-C-6**

直線 l は 2 曲線 $C_1：y=e^x$，$C_2：y=e^{2x}$ の両方に接するとする。このとき，l と C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

③**11-C-7**

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で，2 曲線 $y=\tan x$，$y=a\sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように，正の定数 a の値を求めよ。

③**11-C-8**

xyz 空間の 2 点 $(0,\ -1,\ 2)$，$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 4\right)$ を通る直線を l とし，xy 平面内で，$y=e^{-x}$ のグラフ，x 軸および 2 直線 $x=0$, $x=2$ によって囲まれた平面図形を D とする。

(1) 平面 $x=u$ $(0 \leqq u \leqq 2)$ と直線 l の交点を P とし，図形 D との共通部分である線分を QR とする。このとき △PQR の面積を求めよ。

(2) u が $0 \leqq u \leqq 2$ の範囲を動くとき，(2)の △PQR が動いてできる立体の体積を求めよ。

③**11-C-9**

(1)* 2 つの放物線 $y=4-x^2$ と $y=ax^2$ $(a>0)$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

③**11-C-10**

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ の交点のうち原点 O 以外の点を A とする。放物線の O と A を両端とする部分を曲線 C とする。線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ 上の点を P とし，$\overline{\mathrm{OP}}$ の長さを s とする。P を通り $\overline{\mathrm{OA}}$ に垂直な直線と C との交点を $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ とする。

(1) s と t の関係式を求めよ。

(2) $\overline{\mathrm{PQ}}$ を $y=x$ の周りに 1 回転させた円の面積を t で表せ。

(3) $\overline{\mathrm{OA}}$ と C で囲まれた図形を直線 $y=x$ の周りに 1 回転させたときの回転体の体積を求めよ。

練習用問題

③**11-C-11**

(1)* $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 $y=\sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$，$y=\cos 2x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

③**11-C-12**

* 曲線 $|y|+|\log x|=1$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

③**11-C-13**

2 曲線 $y=x^2$ ……①，$y=\log(x-p)+q$ ……② は点 $(1,\ 1)$ において共通の接線をもつ。このとき p，q の値を求め，さらに，曲線①，②および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

③**11-C-14**

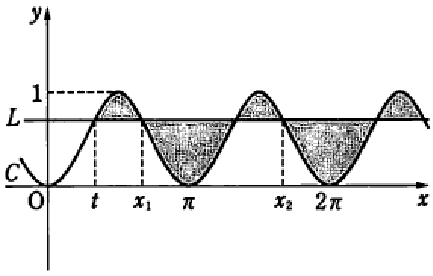
媒介変数 t により $x=e^t-e^{-t}$，$y=e^{3t}+e^{-3t}$ で表される曲線 C，x 軸，2 直線 $x=\pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

③**11-C-15**

放物線 $y=x^2$ の上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ $(t \neq s)$ における法線の交点を R とする。s を限りなく t に近づけるときの R の極限を X とする。t を動かすときの X の軌跡と $y=x^2$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。

③**11-C-16**

曲線 $C: y=\sin^2 x$ と x 軸に平行な直線 $L: y=\sin^2 t \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ がある。$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi<x<n\pi$ ($n=1, 2, \cdots$) における C と L との交点の x 座標を x_n とする。$t \leqq x \leqq x_n$ なる範囲において，C と L により囲まれた $2n-1$ 個の部分の面積の総和を求めよ。



③**11-C-17**

次の定積分を計算せよ。ただし，n は自然数，a, b は実数の定数とする。

$$\int_0^{\pi} |a\sin nx + b\cos nx|\,dx$$

第 12 章　数学Ⅲの積分の応用（２）

《学習項目》

・積分方程式（2種）
・区分求積法
・弧長

A 問題

③**12-A-1**

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$　　(2) $xf(x)-x=\int_1^x f(t)dt\ (x>0)$

③**12-A-2**

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めよ。

③**12-A-3**

次の曲線の長さ L を求めよ。ただし，(3)では，$a>0$ とする。

(1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}\ (0\leqq t\leqq 2)$　　(2)* $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=e^t+e^{-t} \end{cases}\ (0\leqq t\leqq 1)$

(3)* $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}\ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$　　(4) $\begin{cases} x=3\cos t+\cos 3t \\ y=3\sin t-\sin 3t \end{cases}\ \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

(5) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}\ (0\leq\theta\leq 2\pi)$　ただし a は正の定数とする。

③**12-A-4**

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1) $y=\sqrt{9-x^2}\ \left(0\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$　　(2)* $y=\log(1-x^2)\ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$

(3) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\log x\ (1\leqq x\leqq 2)$　　(4)* $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}\ (1\leqq x\leqq 2)$

(5) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\ (-a\leq x\leq a)$　ただし a は正の定数とする。

B 問題

③**12-B-1**

次の 2 つの式を同時に満たす連続関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2+\int_0^1 tg(t)\,dt,\quad g(x)=e^{-x}+x\int_0^1 f(t)\,dt$$

③**12-B-2**

すべての実数 x に対して，次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(t+x)\,dt+1$$

③**12-B-3**

連続関数 $f(x)$ が，$f(x)=x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$ を満たすとき，

(1) $f''(x)=x$ を示せ。　　(2) $f(x)$ を求めよ。

③**12-B-4**

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{2}{n+4}+\cdots\cdots+\frac{2}{n+2n}\right)$

(2)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right\}$

③**12-B-5**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log(n+k)-\log n}{n+k}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left[\frac{1}{n}\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]$

③**12-B-6**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}\left[\log\{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}}-\log n\right]$

③**12-B-7**

次の極限値を求めよ。$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}\right)$

③**12-B-8**

a を正の定数とする。サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ 上に点 P をとったとき，点 P における接線の傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であったとする。原点を O とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 接点 P の座標を求めよ。

(2) サイクロイド上の弧 OP の長さを求めよ。

C 問題

③**12-C-1**

等式 $f(x)=(x^2+1)e^{-x}+\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

③**12-C-2**

任意の実数 x に対して，次の等式が成り立つような連続関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

$$e^x(x^2+ax)=\int_0^x tf(t)dt+\int_x^1 xf(t)dt$$

③**12-C-3**

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

③**12-C-4**

定積分を用いて次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$　$(a>0)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}$　([　]はガウス記号)

補充問題

③**12-C-5**

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)* $f(x)=2\sin x+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(2t-x)\,dt$

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=x-\sin x\cos x+\frac{x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$

③**12-C-6**

(1)* $x>0$ に対し，$\displaystyle\int_a^{\log x} f(t)\,dt=\frac{1}{4}x^2(2\log x-1)$ を満たす関数 $f(t)$ と定数 $(a>0)$ を求めよ。

(2) $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin(x-t)\,dt$，$g(x)=x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

③**12-C-7**

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)* $\displaystyle\int_1^x u(\log u)^2\,du=\frac{x^2}{2}(\log x)^2+f(x)$　$(x\geqq 1)$

(2) $(x+1)\{f(x)-\log(x+1)+1\}=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$　$(x>-1)$

(3) $f(0)=\log 2$，$xf(x)-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=x+\log(\sqrt{x^2+1}-x)$

③**12-C-8**

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{(1+\cos t)^2}{x}\,dt$　　　(2)* $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dx$

(3) $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$，$h_n(x)=n\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}} g(t)\,dt$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n{}'(x)$

～～～MEMO～～～

第 13 章　物理問題

《学習項目》

・位置，速度，加速度，速さ
・時刻 t で微分
・近似計算

A 問題

③**13-A-1**

　　原点を出発して x 軸上を運動する点Ｐの t 秒後（$t \geqq 0$）の座標 x が，$x=3t^2-t^3$ で表されるとき，３秒後の速度，加速度を求めよ。また，運動の向きを変える時刻を求めよ。

③**13-A-2**

　　座標平面上の動点Ｐの，時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，次の式で与えられているとき，(　)内の時刻 t における速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{\alpha}$ を求めよ。また，そのときのＰの速さ $|\vec{v}|$ と加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を求めよ。

(1)　$\begin{cases} x=t+2 \\ y=t-3t^2 \end{cases}$ $(t=2)$　　　(2)*　$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sqrt{3}\sin 2t \end{cases}$ $\left(t=\dfrac{\pi}{6}\right)$

③**13-A-3**

　　$|x|$ が十分小さいとき，次の関数の１次近似式を作れ。

(1)*　$\sin x$　　　(2)　$\log(1+x)$　　　(3)*　e^x

③**13-A-4**

$(1+x)^p$ の 1 次近似式を用いて，次の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

(1) $\dfrac{1}{0.999}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{4.08}}$

③**13-A-5**

x 軸上を運動している点 P の時刻 t における位置 x は，

$x=\dfrac{1}{3}t^3-5t^2+16t$ で表される。

(1) この点 P が向きを変える時刻 t を求めよ。

(2) $t=2$ から $t=9$ までの間で速さ $|v|$ の最大値を求めよ。

(3) $t=2$ から $t=9$ までに点 P が動いた道のり L を求めよ。

B 問題

③**13-B-1**

深さが 20 cm，上面の半径が 10 cm の直円錐の容器がある。これに毎分 15 cm^3 の割合で水を入れるとき，水の深さが 8 cm のときの水面の上昇速度を求めよ。ただし，直円錐とは頂点から底面に下ろした垂線が底面の中心を通るような円錐をいう。

③**13-B-2**

球形のしゃぼん玉の半径が毎秒 1 cm の割合で増加している。半径が 6 cm になった瞬間の体積の変化する割合を求めよ。

③**13-B-3**

直径が 8 cm で，深さが 10 cm の直円錐形の容器が，軸を鉛直に頂点を下に向けて置かれている。これに毎秒 3 cm^3 の割合で水を注ぎ入れる。水面の高さが 5 cm に達したとき，

(1)　水面の上昇する速さを求めよ。

(2)　水面の面積の広がる速さを求めよ。

③**13-B-4**

x 軸上の動点 P の，原点を出発してから t 秒後における速度 v が，$v=\sin t+\sin 2t$ で与えられているとき，

(1)　出発してから t 秒後における P の座標を求めよ。

(2)　出発してから π 秒間に P が動く道のりを求めよ。

C 問題

③**13-C-1**

$|x|$ が十分小さいとき，次の関数の 2 次近似式を作れ。

(1) $\cos x$　　(2) $\sqrt{1-x+x^2}$

③**13-C-2**

表面積が $4\pi\ \mathrm{cm}^2$/秒の一定の割合で増加している球がある。半径が 10 cm になった瞬間において，以下のものを求めよ。

(1) 半径の増加する速度　　(2) 体積の増加する速度

③**13-C-3**

水面から 15 m の高さの岩壁から，綱で船を引き寄せる。毎秒 2 m の速さで綱をたぐるとき，綱の長さが 25 m になった瞬間の船の速さを求めよ。

第 14 章　積分と不等式

《学習項目》

・積分の不等式への応用

A 問題

③**14-A-1**

定積分を用いて，次の不等式を証明せよ。ただし n は 2 以上の自然数とする。

$$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$$

B 問題

③**14-B-1**

(1)* $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{1+x} \leqq 1-\dfrac{1}{2}x$ が成り立つことを示し，それを用いて，不等式 $\dfrac{1}{2} < \log 2 < \dfrac{3}{4}$ を証明せよ。

(2) $x \geqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2-x+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示し，それを用いて，不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-x+1} < \log 2$ を証明せよ。

③**14-B-2**

不等式 $\dfrac{1}{2a+3} < \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{dx}{2x+1} < \frac{1}{2a+1}$ $(a \geqq 0)$ を証明せよ。

③**14-B-3**

次の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の値を求めよ。

(2)　不等式 $\frac{\pi}{4}<\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx<1$ が成り立つことを示せ。

③**14-B-4**

$a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$\alpha=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$　とする。

$|a_n-\alpha| \leqq \int_0^1 x^n dx$ であることを示し，$\lim_{n\to\infty} a_n$　を求めよ。

③**14-B-5**

$S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$　とするとき，$n<S<n+1$　を満たす自然数は

$n=\boxed{\quad}$ である。

C 問題

③**14-C-1**

(1) 関数 $f(x)=\sqrt{x}-\log x$ はすべての正数 x に対して，常に正の値をとることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を示せ。

(3) $\displaystyle\int_1^n \log x\,dx<\sum_{k=1}^{n}\log k<\int_1^{n+1}\log x\,dx$ （n は 2 以上の整数）を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n!}{n\log n}$ を求めよ。

③**14-C-2**

次の不等式を証明せよ。

(1) $\displaystyle\log k<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$ （k は自然数）

(2) $\displaystyle\int_1^n \log x\,dx<\log n!<\int_1^n \log x\,dx+\log n$ （n は 2 以上の自然数）

③**14-C-3**

(1) $f(x)$，$g(x)$ はともに区間 $a\leqq x\leqq b\ (a<b)$ で定義された連続な関数とする。このとき，t を任意の実数として $\displaystyle\int_a^b\{f(x)+tg(x)\}^2dx$ を考えることにより，次の不等式が成立することを示せ。

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leqq\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)\quad\cdots\cdots[\mathrm{A}]$$

また，等号はいかなるときに成立するかを述べよ。

(2) $f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq\pi$ で定義された連続関数で

$$\left\{\int_0^\pi(\sin x+\cos x)f(x)dx\right\}^2=\pi\int_0^\pi\{f(x)\}^2dx,\ \text{および}\ f(0)=1$$

を満たしている。このとき，$f(x)$ を求めよ。

練習用問題

③**14-C-4**

定積分を用いて，次の不等式を証明せよ。

(1)* $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ （n は 2 以上の自然数）

(2)* $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots\cdots+\sqrt{n}>\dfrac{2}{3}n\sqrt{n}$ （n は自然数）

③**14-C-5**

次の不等式を証明せよ。

(1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$1\leqq\dfrac{1}{(1-\sin x)^2}\leqq\dfrac{1}{(1-x)^2}$

(2) $\dfrac{\pi}{4}<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{(1-\sin x)^2}\,dx<\dfrac{\pi}{4-\pi}$

③**14-C-6**

(1)* 不等式 $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

（n は 2 以上の自然数）を証明せよ。

(2) 不等式 $\dfrac{1}{(m+1)^2}+\dfrac{1}{(m+2)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(m+k)^2}<\dfrac{1}{m}$ （m は自然数）を

証明せよ。

第 15 章　微分方程式

《学習項目》

・微分方程式
（変数分離型，同次型など）

A 問題

③**15-A-1**

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y}{x(1+x)}$ を解け。

解 答　$\boldsymbol{y=\dfrac{Cx}{1+x}-1}$ **（C は任意定数）**

$y\neq-1$ のとき，与式を変形して，$\dfrac{dy}{1+y}=\dfrac{dx}{x(1+x)}$

$$\int\frac{dy}{1+y}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\log|1+y|=\log|x|-\log|1+x|+C_1=\log\left(e^{C_1}\left|\frac{x}{1+x}\right|\right)$$

$$|1+y|=e^{C_1}\left|\frac{x}{1+x}\right| \qquad 1+y=C\cdot\frac{x}{1+x}\ (C\neq0)$$

$C=0$ とすると，$y=-1$ となり，与えられた方程式を満たす。

ゆえに，$\boldsymbol{y=\dfrac{Cx}{1+x}-1}$ **（C は任意定数）**

③**15-A-2**

微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx}=(x+2)y$ の解のうち，$x=1$ のとき $y=e$ となるものを求めよ。

解 答　$\boldsymbol{y=x^2e^x}$

解き方　$xy=0$ は題意を満たさないから，
$xy\neq0$

両辺を xy で割って，$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2}{x}$

この両辺を x で積分すると，

$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$ より

$\log|y|=x+2\log|x|+C_1=\log(e^xx^2e^{C_1})$ から

$y=Cx^2e^x$　$(C=\pm e^{C_1})$

ここで，$x=1$ のとき $y=e$ より $C=1$

よって，$y=x^2e^x$

B 問題

③**15-B-1**

次の微分方程式を解け。

(1) $2x^2y\dfrac{dy}{dx}=x^2+1$　　(2)* $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{dy}{dx}+1$

(3)* $x\dfrac{dy}{dx}+1=y$　　(4) $\dfrac{dy}{dx}=2xy^2$

③**15-B-2**

次の微分方程式を(　)内の与えられた条件(初期条件)のもとで解け。

(1) $y'=-2xy$　($x=0$ のとき $y=1$)

(2)* $y'+y\tan x=0$　($x=0$ のとき $y=2$)

(3)* $(1-x)y'+xy=2x$　($x=0$ のとき $y=3$)

(4) $y'+y^2=y$　($x=0$ のとき $y=2$)

③**15-B-3**

(　)内の置換を用いて，次の微分方程式を解け。

(1)* $x\dfrac{dy}{dx}=x+y$　$\left(\dfrac{y}{x}=z\right)$　　(2) $y^2+(x^2-xy)\dfrac{dy}{dx}=0$　$\left(\dfrac{y}{x}=z\right)$

(3)* $\dfrac{dy}{dx}=2x-y-1$　$(2x-y-1=z)$　　(4) $\dfrac{dy}{dx}=e^x\sin x+y$　$(e^{-x}y=z)$

C 問題

③**15-C-1**

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=x+\int_0^x f(t)dt$　　　(2)*　$f(x)=\int_0^x tf(t)dt+x^2+1$

(3)　$\int_1^x (4t+5)f(t)dt=3(x+2)\int_1^x f(t)dt$，$f(0)=1$

③**15-C-2**

曲線 $y=f(x)$ の上の任意の点 $(x,\ y)$（ただし $x\neq 0$）における接線が x 軸と点 $\left(x+\dfrac{1}{x},\ 0\right)$ で交わるとき

(1)　関数 $y=f(x)$ が満たす微分方程式を作れ。

(2)　この曲線が $(1,\ 1)$ を通るとき，その方程式を求めよ。

第 16 章　有名曲線

《学習項目》有名曲線を通した微分積分総合演習

B 問題

③**16-B-1**

曲線 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸および直線 $x=\pi$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

③**16-B-2**

次の曲線の長さを求めよ。(1) では $a>0$ とする。

(1)　$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(2)　$y=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(\sqrt{2} \leqq x \leqq 4)$

③**16-B-3**

$a>0$ とする。 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ。

（１）曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。

（２）曲線で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

③**16-B-4**

曲線 $\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ で囲まれる図形で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

③**16-B-5**

座標平面上を運動する点 P がある。点 P は点 $(0\ ,\ 1)$ を出発して，曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x\geqq 0)$ 上を毎秒 1 の速さで動いている。点 P の t 秒後の座標を $(f(t),\ g(t))$ で表すとき，$f(t)$，$g(t)$ を求めよ。

③**16-B-6**

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。媒介変数 t で表された曲線 $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$ を C とする。
曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転して得られる図形の体積を求めよ。

③**16-B-7**

$a>0$ とする。長さ $2\pi a$ のひもの一方の端が半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 A$(a,\ 0)$ に固定してあり，その円に時計回りに巻きつけてある。このひもをピンと伸ばしながら円からはずしていくとき，ひもの他方の端 P が描く曲線の長さを求めよ。

③**16-B-8**

円 $C: x^2+y^2=9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。
(1)　時刻 $t=0$ において点 $(3\ ,\ 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ とする。
(2)　(1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

③**16-B-9**

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。半径 $\dfrac{1}{n}$ (n は自然数) の円 C_n が ,C に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき，C_n 上の点 P の軌跡を考える。ただし，最初 P は点 A (1 ， 0) に一致していたとする。

(1) O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ。

(2) P が初めて A に戻るまでの P の軌跡の長さ l_n を求めよ。

(3) (2) で求めた l_n に対し，$\lim\limits_{n\to\infty} l_n$ を求めよ。

③**16-B-10**

曲線 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k$ を求めよ。

C 問題

③**16-C-1**

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

入れ忘れ問題

③**16-C-2**

関数 $f(x)=\int_{x}^{2x+1}\frac{1}{t^2+1}dt$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　$f'(x)=0$ となる x を求めよ。

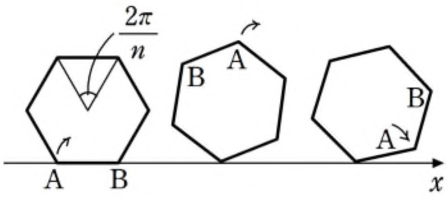
(3)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

③**16-C-3**

半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。 1 つの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないように転がし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。
点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

(1)　$L(6)$ を求めよ。

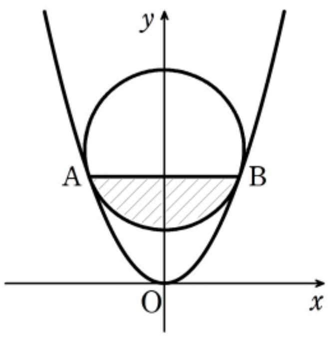
(2)　$\lim_{n\to\infty}L(n)$ を求めよ。



図は $n=6$ の場合

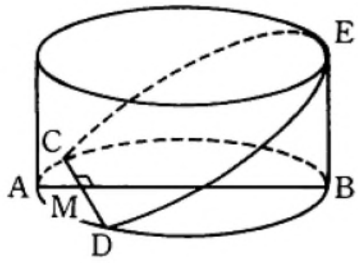
③**16-C-4**

xy 平面上において，y 軸上に中心をもつ半径 r の円が，放物線 $y=x^2$ と図のように，点 A と点 B で接しているとする。線分 AB と円弧 AB とで囲まれた部分 (図の斜線部分) を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。ただし，$r>\frac{1}{2}$ とする。



③**16-C-5**

右の図のように，底円の半径 1，高さ 1 の直円柱がある。底円の直径 AB 上に点 M を $AM=\frac{1}{2}$ となるように選び，底円の周上に 2 点 C， D を線分 CD が点 M を通り，かつ CD ⊥ AB となるように選ぶ。さらに，この直円柱上に点 E を， BE ＝ 1 かつ BE ⊥ BA となるように選ぶ。 3 点 C， D， E を通る平面 α でこの直円柱を切るとき，平面 α の下側にある部分の体積を求めよ。



③**16-C-6**

a，b を正の実数とする。空間内の 2 点 A$(0,\ a,\ 0)$， B$(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ を x 軸の周りに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1)　x 座標の値が t であるような直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ。

(2)　図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

③**16-C-7**

xyz 空間に 3 点 P$(1,\ 1,\ 0)$，Q$(-1,\ 1,\ 0)$，R$(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。

(1)　t を $0 \leqq t < 2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と △PQR の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2)　△PQR を z 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。