

第 1 章 数と式

《学習項目》

・展開・因数分解公式

・絶対値

$$(1) a \geq 0 \text{ のとき } |a| = a, \quad a < 0 \text{ のとき } |a| = -a$$

$$(2) |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$$

$$(3) |x| > k \Leftrightarrow x > k \text{ または } x < -k \quad (\text{ただし } k > 0)$$

$$(4) |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{等号成立は } a, b \text{ のいずれかが } 0, \text{ または同符号のとき。}$$

$$(5) |ab| = |a||b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

・平方根・二重根号

・数の分類

・等式の変形

(1) 両辺に同じ項をたしざん、ひきざんしても同値

(2) 両辺にゼロでない同じ項をかけざんしても同値

両辺にゼロをかけても成り立つが、同値性は崩れる

(3) 両辺をゼロでない同じ式でわりざんしても同値

(注) ゼロとなる式ではわりざんできない!

(4) 両辺ゼロ以上なら両辺 2 乗しても同値

(注) 両辺の符号が異なる可能性があるときは、両辺 2 乗できない!

$$(5) \sqrt{a^2} = |a|$$

・解の公式、判別式

・解と係数の関係

・対称式

・二次方程式・二次不等式とグラフの関係

・絶対値とグラフ

・分母の有理化

・二重根号

・等式の証明

・整式

・恒等式

・除法の原理 (剰余の定理・因数定理)

・★有理数解の候補

- ・連立方程式の解法（代入法・加減法）
 - ・高次方程式（因数分解・置き換え）
 - ・整式において、解と因数の対応関係
 - ・3次方程式の解と係数の関係
 - ・3文字の対称式
 - ・★複2次方程式
 - ・★相反方程式
 - ・共通解
 - ・1の虚数3乗根
 - ・相加平均・相乗平均の関係の不等式
-
- ・不等式の証明などは「集合論理」で扱います

A 問題

A 1 - 1

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 9x - (y+1)(y-8)$ (2) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 3$
 (3) $6x^2 - 17xy + 5y^2 - 2x + 18y - 8$

A 1 - 2

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^4 - 3x^2 - 54$ (2) $x^4 - 1$
 (3) $(x^2 - 3x)^2 - 14(x^2 - 3x) + 40$ (4) $(x-1)x(x+1)(x+2) - 15$

A 1 - 3

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $|3x - 2| = 1$ (2) $|2x + 5| < 3$ (3) $|3 - 4x| \geq 5$

A 1 - 4

$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ ($\neq 0$) のとき， $\frac{x^2 + 2y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$ の値を求めよ。

A 1 - 5

$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ ， $y = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

- (1) $x + y$, xy (2) $x^2 + y^2$ (3) $x^4 y^3 + x^3 y^4$ (4) $x^3 + y^3$

A 1 - 6

2 次方程式 $2x^2 - 3x + 8 = 0$ の 2 つの解を α ， β とするとき，次の式の値を求めよ。

- (1) $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2$ (2) $\alpha^2 + \beta^2$
 (3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ (4) $\alpha^3 + \beta^3$

A 1 - 7

次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}$

(3) $\sqrt{9+\sqrt{80}}$

A 1 - 8

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a , b , c の値を定めよ。

(1) $x^3+1=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(2) $\frac{1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$

A 1 - 9

次の等式を満たす実数 x , y の値を求めよ。

(1) $(3+2i)x+(1-i)y=7+3i$

(2) $(3+2i)(2x-yi)=4+7i$

A 1 - 10

次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

(1)
$$\begin{cases} a+b+c=-3 \\ 9a+3b+c=1 \\ 16a+4b+c=6 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x+y-3z=10 \\ 4x-y+z=-14 \\ 5x-3y-7z=2 \end{cases}$$

B問題

B 1 - 1

次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

(2) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

(3) $(x-1)x(x+1) = 4 \cdot 5 \cdot 6$

(4) $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 6 = 0$

B 1 - 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$

(2) $(b+c)a^2 + (c+a)b^2 + (a+b)c^2 + 2abc$

B 1 - 3

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

(2) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

B 1 - 4

次の不等式を解け。

(1) $|2x-3| \leq |3x+2|$

(2) $|x-1| + 2|x-3| \leq 11$

B 1 - 5

次の式を簡単にせよ。

(4) $\sqrt{9-\sqrt{72}}$

(5) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$

(6) $\sqrt{9-\sqrt{77}}$

B 1 - 6

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$, $x^6 + \frac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

B 1 - 7

2 次方程式 $x^2 + 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α , β とするとき、次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

- (1) $\alpha - 1$, $\beta - 1$ (2) α^2 , β^2 (3) $\frac{\beta^2}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{\beta}$

B 1 - 8

$x^2 - 3x + 7 = 0$ の 2 つの解 α , β に対して、 $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^4 + \beta^4$ の値を求めよ。また、 $(\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7)$ の値を求めよ。

B 1 - 9

$xyz = 5$ のとき、 $\frac{5x}{xy+x+5} + \frac{5y}{yz+y+1} + \frac{25z}{xz+5z+5}$ の値を求めよ。

B 1 - 10

$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ とする。

- (1) $x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ の値を求めよ。
 (2) $x^4 - 2x^3 - 2x - 1$ の値を求めよ。

B 1 - 11

3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$ の 3 つの解を α , β , γ とするとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
 (2) $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)$
 (3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
 (4) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

B 1 - 12

- (1) x の方程式 $x^2 - (k-3)x + 5k = 0$, $x^2 + (k-2)x - 5k = 0$ が共通解をもつように定数 k の値を定め、その共通解を求めよ。
- (2) 2つの2次方程式 $x^2 - 3x + k - 1 = 0$, $x^2 + (k-2)x - 2 = 0$ が、共通な実数解をただ1つもつとき、定数 k の値とその共通解を求めよ。

B 1 - 13

整式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると -3 余り、 $x+1$ で割ると 9 余る。 $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

B 1 - 14

a, b は実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ が $2+i$ を解にもつとき、定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

B 1 - 15

方程式 $x^3 = 1$ の虚数解の1つを ω とする。次の式の値を求めよ。

- (1) $\omega^6 + \omega^3 + 1$ (2) $\omega^8 + \omega^4 + 1$ (3) $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}$

B 1 - 16

次の最小値を求めよ。

- (1) $x > 0$ のとき $x + \frac{3}{x}$ の最小値 (2) $x > 2$ のとき $x + \frac{4}{x-2}$ の最小値

C問題

C 1 - 1

方程式 $4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0$ を解け。

C 1 - 2

方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ を解け

C 1 - 3

不等式

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0 & \dots\dots ① \\ x^2 + (a-3)x - 2a + 2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

がある。ただし、 a は実数とする。

①、②を同時にみたす整数 x がただ1つであるような a の値の範囲を求めよ。

C 1 - 4

a は実数とする。3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + a = 0$ が 2 重解をもつとき、定数 a の値を求めよ。

C 1 - 5

(1) x^{20} を $x^2 - 1$ で割った余りを求めよ。

(2) 整式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ると $2x+3$ 余り、 $(x-1)^2$ で割ると $3x-2$ 余る。このとき、 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割った余りを求めよ。

C 1 - 6

x の整式 $f(x)$ は、 x^2+1 で割ると $3x+2$ 余り、 x^2+x+1 で割ると $2x+3$ 余るという。このとき、 $f(x)$ を $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

第 2 章 集合論理・不等式

《学習項目》

・ やっていいこと

- (1) $a < b \iff a + x < b + x, a - x < b - x$ (同じ数をたしても, 同じ数をひいてもよい).
- (2) $a < b, x > 0 \Rightarrow ax < bx, \frac{a}{x} < \frac{b}{x}$ (正の数をかけても, 正の数で割ってもよい).
- (3) $a < b, x < 0 \Rightarrow ax > bx, \frac{a}{x} > \frac{b}{x}$ (負の数をかけたり, 負の数で割ったりすると不等号の向きが逆転する).
- (4) $a < b, x < y \Rightarrow a + x < b + y$ (同じ向きの不等式の両辺を加えてよい).
- (5) $0 < a < b, 0 < x < y \Rightarrow ax < by$ (正ならば同じ向きの不等式の両辺をかけてよい).
- (6) n は自然数. $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$ (共に正ならば両辺を n 乗してよい).

・ やってはいけないこと

以下の計算は一般には成り立たない.

- (1) 辺々減じる. $a < b, x < y$ のとき $a - x < b - y$.
 <反例> $1 < 2, 3 < 5$ だが $1 - 3 < 2 - 5$ は誤り.
- (2) 両辺 2 乗. $a < b$ のとき $a^2 < b^2$.
 <反例> $-3 < 2$ だが $(-3)^2 < 2^2$ は誤り.
- (3) 辺々をかける. $a < b, x < y$ のとき $ax < by$.
 <反例> $1 < 2, -3 < -2$ だが $1 \times (-3) < 2 \times (-2)$ は誤り.
- (4) 約する. $ax < ay$ のとき $x < y$.
 <反例> $(-2) \times 2 < (-2) \times 1$ だが $2 < 1$ は誤り.

・ 不等式の証明

$$(1) A \geq B \iff A - B \geq 0$$

実数² ≥ 0 を持ちることが多い。

$$(2) A \geq 0, B \geq 0 \text{ のとき, } A \geq B \iff A^2 - B^2 \geq 0$$

・相加相乗 すべての文字は正とする。

(2文字) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

(3文字) $a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc}$

(4文字) $a + b + c + d \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}$

等号成立はすべての文字の値が等しいとき。

・コーシー・シュワルツの不等式

(2次元) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ 等号成立は $a:b = x:y$ のとき

(3次元) $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ 等号成立は $a:b:c = x:y:z$ のとき

・三角不等式

$|x + y| \leq |x| + |y|$ 等号成立は x, y が同符号, または 0 を含むとき。

A 問題

A 2 - 1

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ を全体集合とする。

$$\overline{A \cap B} = \{2, 4, 7\}, \quad A \cap B = \{6, 8\}, \quad A \cap \overline{B} = \{5\}$$

であるとき、 $\overline{A \cap B}$, A , B を求めよ。

A 2 - 2

x は実数, n は整数とする。次の命題の逆をいえ。また、与えられた命題と、その逆の真偽をそれぞれ調べよ。

(1) $x = 1 \implies x^2 = 1$

(2) $x \geq 0 \implies x^2 > 0$

(3) $x^2 + 2x \neq 3 \implies x \neq 1$

(4) n が 5 の倍数 $\implies n$ は 10 の倍数

A 2 - 3

x, y は実数とする。次の に「必要」、「十分」、「必要十分」のうち、最も適切なものを入れよ。

(1) $x = 6$ は $x^2 = 36$ であるための 条件である。

(2) $2x + 5 = 3$ は $x = -1$ であるための 条件である。

(3) $x^2 > 4$ は $x > 2$ であるための 条件である。

A 2 - 4

x, y は実数, n は自然数とする。次の命題の対偶をいえ。また、与えられた命題の真偽を、対偶の真偽を調べて答えよ。

(1) $x^2 + y^2 \neq 0 \implies x \neq 0$ または $y \neq 0$

(2) $x + y < 0 \implies x < 0$ かつ $y < 0$

(3) n は 15 の倍数でない $\implies n$ は 5 の倍数でない

A 2 - 5

$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

B問題**B 2 - 1**

次の問いに答えよ。

(1) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ となることを証明せよ。

(2) $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ のとき, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ となることを証明せよ。

第 3 章 2 次関数

《学習項目》

- ・ 2 次関数のグラフ（直線との位置関係など）
- ・ 2 次関数の最大最小（変域なし）⇒軸
- ・ 2 次関数の最大最小（変域あり）⇒軸・両端
- ・ 2 次の絶対不等式
- ・ 2 次方程式の解の配置問題⇒軸・端点・判別式
- ・ 逆手法の基礎

- ・ 定数変数
- ・ 場合分け
- ・ 関数と、方程式・不等式の対応

A 問題

A 3 - 1

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$(1) y = x^2 - 4x + 5 \quad (1 \leq x \leq 3)$$

$$(2) y = -x^2 - x + 2 \quad (-2 < x < 0)$$

A 3 - 2

解の公式を利用して，次の 2 次方程式を解け。

$$(1) 2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(2) 9x(2x + 1) = 2$$

$$(3) 2\sqrt{6}x^2 + 12x + 3\sqrt{6} = 0$$

$$(4) (x + 2)^2 + 4(x + 2) - 1 = 0$$

A 3 - 3

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2 > 2x + 8$

(2) $2x^2 - 3x \leq 9$

(3) $x(x-4) \leq 2(x^2-3)$

(4) $(2x+1)^2 + 24 > (x+5)^2$

A 3 - 4

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2 + 14x + 49 < 0$

(2) $x^2 + 16x + 64 \geq 0$

(3) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

A 3 - 5

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を求めよ。

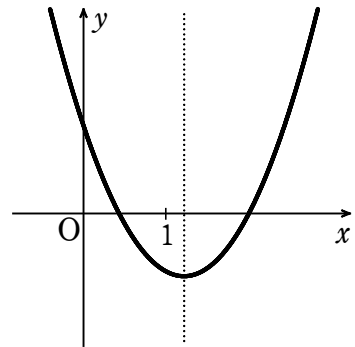
(1) a

(2) b

(3) c

(4) $b^2 - 4ac$

(5) $a + b + c$

**A 3 - 6**

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 2 点 $(0, 4)$, $(2, 4)$ を通り、頂点が直線 $y=1$ 上にある。

(2) 放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で、点 $(2, 3)$ を通り、頂点が直線 $y=x+1$ 上にある。

B 問題

B 3 - 1

x の 2 次関数 $y = -2x^2 + 4ax + a$ の最大値を M とする。

- (1) M を a の式で表せ。
- (2) M の値を最小にする a の値と、 M の最小値を求めよ。

B 3 - 2

x, y が互いに関係なく変化するとき、 $P = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x + 2y + 6$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

B 3 - 3

関数 $f(x) = x^2 - 2ax$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a)$ 、最小値を $m(a)$ とする。

- (1) $y = M(a)$ のグラフをかけ。
- (2) $y = m(a)$ のグラフをかけ。

B 3 - 4

$x \geq 0, y \geq 0, 3x + y = 12$ のとき、 xy の最大値と最小値を求めよ。

B 3 - 5

x を変数とする 4 次関数 $y = (x^2 - 4x + 3)(-x^2 + 4x + 2) - 2x^2 + 8x - 1$ の最大値は となる。

B 3 - 6

2 次不等式 $x^2 - 2mx + m + 6 > 0$ の解がすべての実数であるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

B 3 - 7

x についての不等式 $3kx^2 + 4kx - k + 8 > 0$ …… ① について

- (1) すべての実数 x に対して、常に ① が成り立つ整数 k の値を求めよ。
- (2) すべての整数 x に対して、常に ① が成り立つ実数 k の値の範囲を求めよ。

B 3 - 8

不等式 $|x^2 - 6x - 7| > 2x + 2$ を解け。

B 3 - 9

2 次方程式 $2kx^2 - (k+2)x - 5 = 0$ の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり、他の解が 2 と 3 の間にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。

B 3 - 10

未知数 x に関する 2 次方程式 $x^2 - 2ax + 1 - a^2 = 0$ が $0 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき、定数 a の満たす条件を求めよ。

C問題

C 3 - 1

関数 $y = x^2 + 4x + 1$ ($a \leq x \leq a + 2$) の最大値を $M(a)$, 最小値を $m(a)$ とする。
 $b = M(a)$, $b = m(a)$ のグラフをかけ。

C 3 - 2

2 次方程式 $mx^2 - x - 2 = 0$ の 2 つの実数解が, それぞれ以下のようになるための m の条件を求めよ。ただし, 2 つの解には重解も含める。

- (1) 2 つの解がともに -1 より大きい。
- (2) 1 つの解は 1 より大きく, 他の解は 1 より小さい。
- (3) 2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい。

C 3 - 3

a と x を実数とする。 x についての不等式 $x^2 - (a^2 + a - 2)x + a^3 - 2a < 0$ を解け。

C 3 - 4

$4 \leq x \leq 6$ の範囲において, 常に 2 次不等式 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

C 3 - 5

2 つの 2 次関数 $f(x) = x^2 + 2ax + 25$, $g(x) = -x^2 + 4ax - 25$ がある。

- (1) どんな x の値に対しても $f(x) > g(x)$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) どんな x_1, x_2 の値に対しても $f(x_1) > g(x_2)$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

C 3 - 6

$f(x)$ は $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x+3}$ で定義される関数とする。

- (1) 方程式 $f(x) = a$ が実数の解をもつような a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値を求めよ。

C 3 - 7

$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ のとき, $(x+y-1)^2 + (x-y+1)^2$ の最小値は \square ^ア, 最大値は

\square ^イ である。

第 4 章 三角比

《学習項目》

- ・ 三角比の定義
- ・ 鋭角⇒鈍角（三角形⇒円）
- ・ 相互関係

- ・ 正弦定理
- ・ 余弦定理
- ・ 三角形の面積公式
- ・ 三角形の内接円半径公式

- ・ 中線定理
- ・ 内角の二等分線の性質

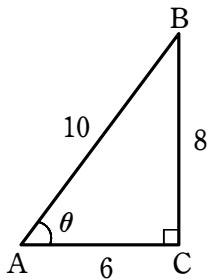
- ・ 鋭角鈍角の判定
- ・ 三角形の成立条件
- ・ 三角形の形状決定問題

A問題

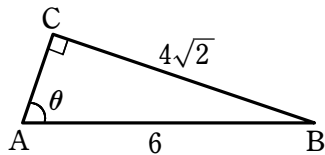
A 4 - 1

下の図において、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

(1)



(2)



A 4 - 2

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $2\sin \theta - \sqrt{3} = 0$ (2) $\sqrt{2} \cos \theta = 1$ (3) $\tan \theta + 1 = 0$

A 4 - 3

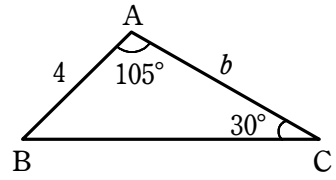
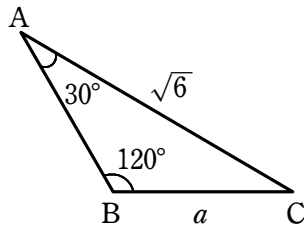
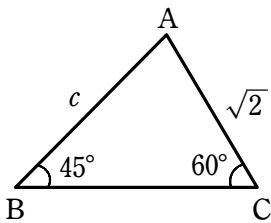
$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち、1つが次の値をとるとき、各場合について他の2つの値を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{3}{4}$ (2) $\tan \theta = -3$

A 4 - 4

下の図において、次のものを求めよ。

(1) c (2) a (3) b

**A 4 - 5**

$a=7$, $b=5$, $c=3$ の $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

(1) $\sin A$ (2) 面積 S (3) 内接円の半径 r

B 4 - 7

次の等式が成り立つ $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

- (1) $a \sin A + b \sin B = c \sin C$ (2) $\sin C = 2 \sin A \cos B$

B 4 - 8

円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB=2$ 、 $BC=2$ 、 $CD=3$ 、 $DA=4$ とする。
次の値を求めよ。

- (1) AC の長さ (2) 四角形 $ABCD$ の面積
(3) 2つの対角線 AC と BD の交点を E とすると $BE : ED$ の比

C問題

C 4 - 1

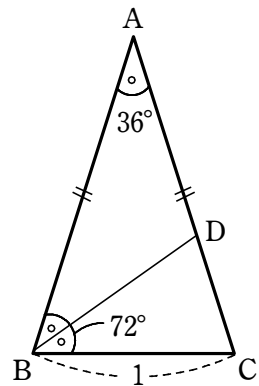
3 辺の長さが $2x+1$, x^2-1 , x^2+x+1 である三角形について

- (1) $2x+1$, x^2-1 , x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるための x の条件を求めよ。
- (2) 最大辺に対する角の大きさを求めよ。

C 4 - 2

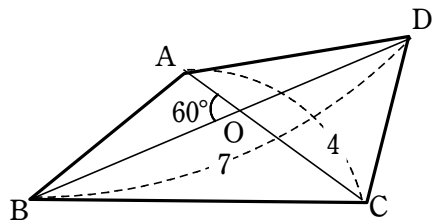
右の図の $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) 辺 AB の長さ
- (2) $\sin 18^\circ$ の値
- (3) $\cos 36^\circ$ の値



C 4 - 3

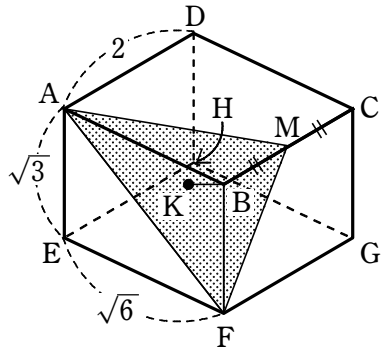
四角形 $ABCD$ の 2 つの対角線 AC , BD の交点を O とする。 $AC=4$, $BD=7$, $\angle AOB=60^\circ$ であるとき、四角形 $ABCD$ の面積 S を求めよ。



C 4 - 4

右の図のような $AE = \sqrt{3}$, $AD = 2$, $EF = \sqrt{6}$ である直方体 $ABCD - EFGH$ において、辺 BC の中点を M とする。

- (1) 四面体 $MABF$ の体積 V を求めよ。
- (2) $\cos \angle AFM$ の値を求めよ。
- (3) $\triangle AFM$ の面積 S を求めよ。
- (4) 点 B から $\triangle AFM$ に下ろした垂線 BK の長さを求めよ。



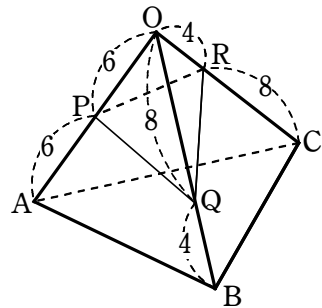
C 4 - 5

底面の半径が 4, 高さが $2\sqrt{5}$ の直円錐がある。この直円錐の頂点を O , 底面の直径の両端を A, B とし、線分 OB の中点を P とするとき、側面上で A から P に至る最短距離を求めよ。

C 4 - 6

1 辺の長さが 12 の正四面体 $OABC$ がある。辺 OA , OB , OC 上に、それぞれ点 P , Q , R を $OP = 6$, $OQ = 8$, $OR = 4$ となるようにとる。

- (1) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。
- (2) 四面体 $OPQR$ に内接する球の半径を求めよ。



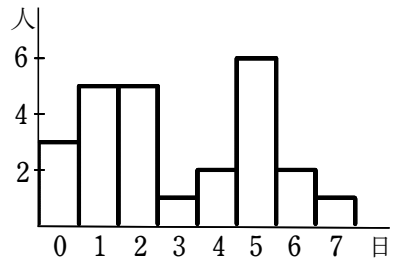
第 5 章 データの分析

《学習項目》

- ・ 代表値（平均値, 最頻値, 中央値, 四分位数）, 範囲
- ・ ヒストグラム, 度数分布表（階級値）, 箱ひげ図
- ・ 分散, 標準偏差, 共分散, 相関係数, 散布図

A問題

右のヒストグラムは、ある高校の生徒 25 人について、この 1 週間における路線バスの利用日数を調査した結果である。



- (1) 利用日数の最頻値，中央値を求めよ。
- (2) 利用日数の平均値を求めよ。

右の表は、ある都市の 1 日の最低気温を 30 日間測定した結果の度数分布表である。

階級(°C)	度数
6 以上 8 未満	7
8 ~ 10	9
10 ~ 12	7
12 ~ 14	6
14 ~ 16	1
計	30

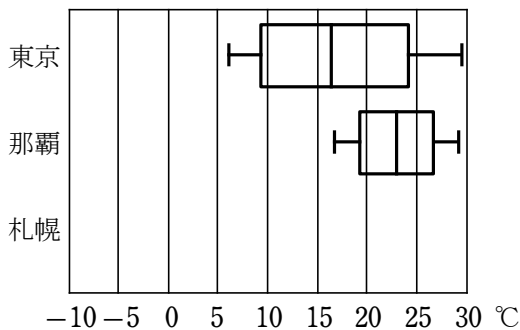
- (1) データの最頻値を求めよ。
- (2) この表から階級値を用いて、データの平均値を求めよ。
- (3) 階級値を用いなくて平均値を求めると、データの平均値はどのような値の範囲に入るか。

A 5 - 3

次のデータは、2010 年度の札幌における月ごとの平均気温を、気温の低い順に並べたものである。(単位は °C)

-3.2 -2.0 -0.1 0.6 5.5 5.9 12.2 12.2 19.2 20.0 22.1 24.8

このデータの箱ひげ図を、下の東京と那覇の箱ひげ図と並べてかき、3 つの都市のデータの分布を比較せよ。



A 5 - 4

次の変数 x , y のデータは、ある飲料メーカーが新商品として売り出す予定の 2 つの飲料 X, Y について、それぞれ 8 人のモニターに 15 点満点でおいしさを採点してもらった結果である(単位は点)。

x	10	12	7	6	13	10	7	15
y	3	10	11	2	8	15	9	6

- (1) x , y のデータについて、平均値、分散、標準偏差をそれぞれ求めよ。
- (2) x , y のデータについて、標準偏差によってデータの平均値からの散らばりの度合いを比較せよ。

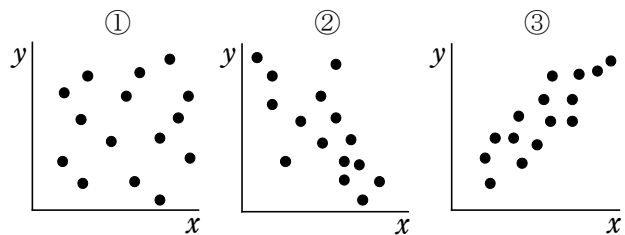
A 5 - 5

右の ①, ②, ③ は、ある 2 つの変数 x と y のデータについての散布図である。

データ ①, ②, ③ の x と y の相関係数は、0.87, 0.04, -0.71 の

いずれかである。

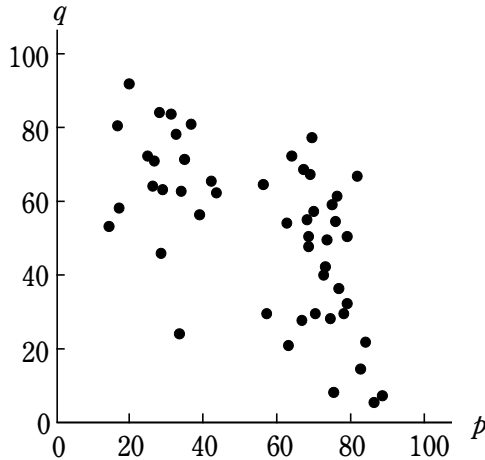
データ ①, ②, ③ の相関係数をそれぞれ答えよ。



B問題

B 5 - 1

変量 p と変量 q を観測した資料に対して、相関図 (散布図) を作ったところ、次のようになった。ただし、相関図 (散布図) 中の点は、度数 1 を表す。



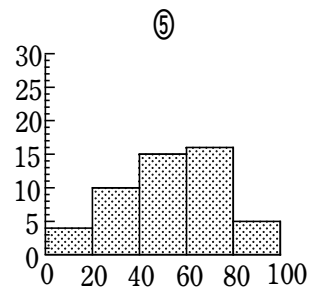
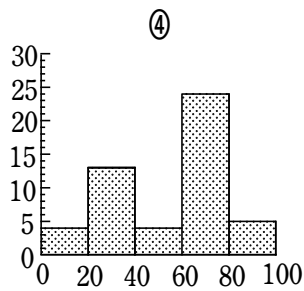
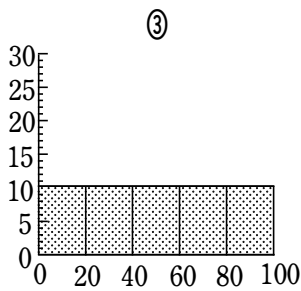
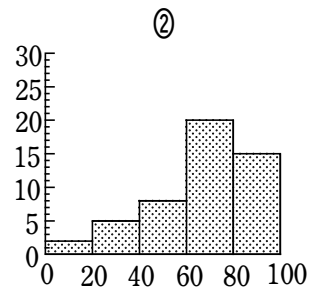
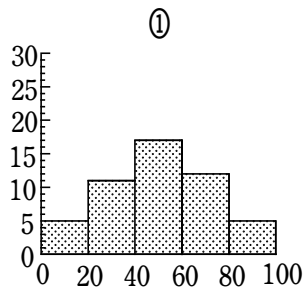
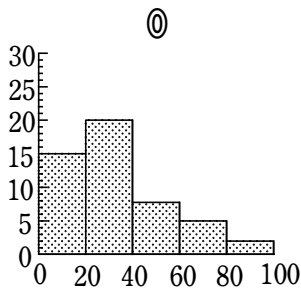
(1) 二つの変量 p と q の相関係数に最も近い値は r である。 r に当てはまるものを、次の ㉠～㉦ のうちから一つ選べ。

- ㉠ -1.5 ㉡ -0.9 ㉢ -0.6 ㉣ 0.0
 ㉤ 0.6 ㉥ 0.9 ㉦ 1.5

(2) 同じ資料に対して度数をまとめた相関表を作ったところ、次のようになった。例えば相関表中の **7** の **7** という数字は、変量 p の値が 60 以上 80 未満で変量 q の値が 20 以上 40 未満の度数が 7 であることを表している。

100	2	3	0	0	0	
80	0	7	3	5	1	
60	2	2	0	11	0	
40	0	1	1	7	1	
20	0	0	0	1	3	
0						
	0	20	40	60	80	100
	p					

このとき、変量 p のヒストグラムは イ であり、変量 q のヒストグラムは ウ である。 イ , ウ に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つずつ選べ。



B 5 - 2

A 組 4 人の選手と B 組 3 人の選手の 100 m 走のタイムを測定した。A 組 4 人の選手のタイムは、それぞれ 12.5, 12.0, 14.0, 13.5 (単位は秒) であった。また、B 組 3 人の選手のタイムの平均値はちょうど 14.0 秒、分散はちょうど 1.50 であった。

以下、計算結果の小数表示では、指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合は、指定された桁まで ① にマークすること。

(1) A 組と B 組を合わせた 7 人の選手のタイムを変量 x とする。変量 y を $y = x - 14.0$

としたとき、変量 y の平均値は $\overset{\text{アイ}}{\square}.\overset{\text{ウエ}}{\square}$ 秒であり、もとの変量 x の平均

値は $\overset{\text{オカ}}{\square}.\overset{\text{キク}}{\square}$ 秒である。また、変量 y の分散は $\overset{\text{ケ}}{\square}.\overset{\text{コサ}}{\square}$ であり、

もとの変量 x の分散は $\overset{\text{シ}}{\square}.\overset{\text{スセ}}{\square}$ である。

(2) B 組 3 人の選手の中の 1 人の選手のタイムは、ちょうど 14.0 秒であることがわかったとする。このとき、他の 2 人の選手のタイムは、速く走った方から順に、

$\overset{\text{ソタ}}{\square}.\overset{\text{チ}}{\square}$ 秒と $\overset{\text{ツテ}}{\square}.\overset{\text{ト}}{\square}$ 秒である。

さらに、B 組 3 人の選手の体重が、速く走った選手から順に、57.0, 54.0, 60.0 (単位は kg) であるとき、選手の体重と 100 m 走のタイムの相関係数は $\overset{\text{ナ}}{\square}.\overset{\text{ニヌ}}{\square}$ となる。

C 問題

なし

第6章 場合の数の基礎

《学習項目》

・ 数え上げ

A問題

A 6 - 1

200 から 300 までの整数のうち、3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数の個数を求めよ。

A 6 - 2

7 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 から、異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作るとき、次のような数は何個できるか。

- (1) 3 桁の整数
- (2) 偶数

A 6 - 3

A, B, C, D, E, F の 6 文字を全部使ってできる文字列を、アルファベット順の辞書式に並べる。

- (1) CDABEF は何番目にあるか。
- (2) 339 番目の文字列は何か。

B問題

B 6 - 1

ある大学の入学者のうち、他の a 大学, b 大学, c 大学を受験した者の集合を、それぞれ A , B , C で表すと、次の通りであった。

$$n(A) = 65, \quad n(B) = 40, \quad n(A \cap B) = 14, \quad n(A \cap C) = 11,$$

$$n(A \cup C) = 78, \quad n(B \cup C) = 55, \quad n(A \cup B \cup C) = 99$$

- (1) c 大学を受験した者は何人か。
- (2) a 大学, b 大学, c 大学のすべてを受験した者は何人か。
- (3) a 大学, b 大学, c 大学のどれか 1 大学のみ受験した者は何人か。

B 6 - 2

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作る。

- (1) 全部で ア 個の 3 桁の整数ができる。
- (2) 偶数は イ 個で、奇数は ウ 個である。
- (3) 9 の倍数は エ 個で、4 の倍数は オ 個である。

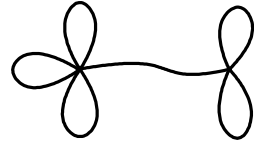
C問題

C 6 - 1

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 150$ の末尾に続く 0 の個数を求めよ。

C 6 - 2

右の図において、これを一筆書きする仕方の総数を求めよ。



C 6 - 3

50 人のクラスで、兄弟のいる人は 33 人、姉妹のいる人は 27 人であった。このとき、ひとりっ子は ア 人以下で、兄弟、姉妹ともにいる人は イ 人以上いる。また、兄弟だけいる人は少なくとも ウ 人、多くて エ 人までであり、姉妹だけいる人は多くても オ 人までである。

C 6 - 4

500 以下の自然数を全体集合とし、 A を 8 の倍数の集合、 B を 12 の倍数の集合、 C を 15 の倍数の集合とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

- (1) 8 または 15 の倍数の集合 (2) 8 でも 15 でも割り切れない数の集合
 (3) 8 または 12 または 15 の倍数の集合 (4) $(A \cup C) \cap B$

C 6 - 5

1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 の 7 個の数字がある。この中の異なる 2 個を並べてできる 2 桁の整数は全部で ア 個あり、その総和は イ である。

C 6 - 6

5個の数字0, 1, 2, 3, 4を使ってできる3桁の整数のうち, 次のような整数は何個あるか。ただし, 同じ数字は2度以上使わないとする。

- (1) 偶数
- (2) 3の倍数

C 6 - 7

次の場合, 硬貨の一部または全部を使って, 支払うことができる金額は何通りあるか。

- (1) 10円硬貨4枚, 50円硬貨1枚, 100円硬貨3枚
- (2) 10円硬貨2枚, 50円硬貨3枚, 100円硬貨3枚
- (3) 10円硬貨7枚, 50円硬貨1枚, 100円硬貨3枚

第 7 章 場合の数

《学習項目》

- ・ その道具
 - ① 並べる道具 $n!$
 - ② 選ぶ道具 ${}_n C_k$
- ・ 道具の運用
- ・ 流れ作業はかけざん
- ・ 場合分けはたしざん
- ・ 場合分けがメンドウなとき, (\sim でないとき) を考えて全体からひきざん
- ・ 区別のできない同じものを数えるときは, その個数の階乗でわりざん。
 - ※ 場合わけでは, モレ ダブりが発生しないように注意することが大切。

運用の例 \sim 公式化しているもの

- ・ 円順列 \Rightarrow 固定がポイント
- ・ ネックレス順列 \Rightarrow 円順列 $\div 2$
- ・ 重複順列 \Rightarrow 流れ作業=かけざん がわかっていれば公式不要
- ・ 重複組み合わせ
- ・ 異なる種類のものから, 重複を許して 個選ぶ選び方は, 通り
- ・ 組分け問題
- ・ 順番キーフ問題
- ・ 最短経路問題

A問題

A 7 - 1

- (1) 4種類の記号○, △, □, ×から重複を許して合計5個を取って1列に並べるとき、並べ方は何通りあるか。
- (2) 4人が1回じゃんけんをするとき、手の出し方は全部で何通りあるか。

A 7 - 2

次の並べ方は何通りあるか。

- (1) a 4個, b 3個, c 2個の9文字を1列に並べる。
- (2) FUKUOKAの7文字を1列に並べる。

A 7 - 3

6つの文字 a, b, c, d, e, f を横1列に並べるとき, a, b, c の3つが隣り合う並べ方は何通りあるか. また, a, b が隣り合わない並べ方は何通りあるか.

A 7 - 4

- (1) 7人が円卓に着席する方法は何通りあるか。
- (2) 異なる6個の玉を用いて作る首飾りは何通りできるか。

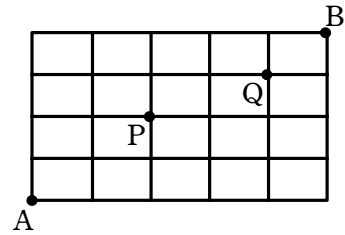
A 7 - 5

男子10人, 女子5人の中から選ぶとき, 次の選び方は何通りあるか。

- (1) 男子4人, 女子3人を選ぶ。
- (2) 特定の2人を含むように7人選ぶ。
- (3) 3人を選ぶのに, 女子から少なくとも1人を選ぶ。

A 7 - 6

右の図のように、道路が碁盤の目のようになった街がある。次の場合に、地点 A から地点 B まで最短距離で行く道順は何通りあるか。



- (1) 全部の道順
- (2) 地点 P を通る
- (3) 地点 P と地点 Q を通る
- (4) 地点 P も地点 Q も通らない

A 7 - 7

10 個のりんごを、A, B, C の 3 人に分ける方法は $\overset{\text{ア}}{\square}$ 通りある。ただし、1 個も配分のない人があってもよいものとする。また、1 人に 1 個は配分するものとするとき $\overset{\text{イ}}{\square}$ 通りである。

B問題

B 7 - 1

J, A, P, A, N, E, S, E の 8 個の文字全部を使ってできる順列について、次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) 異なる並べ方
- (2) J は P より左側にあり、かつ P は N より左側にあるような並べ方

B 7 - 2

男子 3 人女子 5 人が 1 列に並ぶとき、男子 3 人が隣り合う並び方は \square 通り、どの男子も隣り合わない並び方は \square 通りある。

B 7 - 3

G, O, U, K, A, K, U の 7 文字を 1 列に並べるとき、同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

B 7 - 4

両親と子供 4 人の計 6 人が円形のテーブルに着席するとき

- (1) 両親が隣り合って着席する方法は何通りあるか。
- (2) 両親が向かい合って着席する方法は何通りあるか。
- (3) 両親の間に子供 1 人が着席する方法は何通りあるか。

B 7 - 5

ガラスでできた玉で、赤色のものが 6 個、青色のものが 2 個、透明なものが 1 個ある。玉には、中心を通過して穴が開いているとする。

- (1) これらを 1 列に並べる方法は何通りあるか。
- (2) これらを丸く円形に並べる方法は何通りあるか。
- (3) これらの玉に糸を通して首輪を作る方法は何通りあるか。

B 7 - 6

立方体を塗り分けることを考える。辺を共有する面には別の色を塗るものとし、回転して重なるものは同じ塗り方とする。次の塗り分け方は何通りあるか。

- (1) 6 種の色をすべて用いる
- (2) 5 種の色をすべて用いる
- (3) 4 種の色をすべて用いる

B 7 - 7

正七角形 ABCDEFG の 3 つの頂点を結んで三角形を作る。

- (1) できる三角形の総数を求めよ。
- (2) 正七角形と 1 辺だけを共有するものは何個できるか。
- (3) 正七角形と辺を共有しないものは何個できるか。

B 7 - 8

15 冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか。

- (1) 6 冊, 5 冊, 4 冊の 3 組に分ける。
- (2) 5 冊ずつ 3 人の子供に分ける。
- (3) 5 冊ずつ 3 組に分ける。
- (4) 7 冊, 4 冊, 4 冊の 3 組に分ける。

B 7 - 9

- (1) 整数 y_1, \dots, y_5 に対して,
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7 \\ y_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, 5) \end{cases}$$

となる組 (y_1, \dots, y_5) の総数を求めよ。

- (2) 整数 x_1, \dots, x_4 に対して,
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14 \\ x_k \geq 2 \quad (k = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

となる組 (x_1, \dots, x_4) の総数を求めよ。

B 7 - 10

1 から 10 までの自然数の各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードがある。これらを A, B, C の 3 つの箱に分けて入れる。

- (1) 空の箱があってもよいものとする、分け方は何通りあるか。
- (2) どれか 1 つの箱だけが空になる分け方は何通りあるか。
- (3) 空の箱があってはならないとする、分け方は何通りあるか。

B 7 - 11

1 そうあたり 4 人まで乗れるボート 2 そうに 6 人が分乗するとき、次のような場合の乗り方は何通りあるか。

- (1) 人もボートも区別しない場合
- (2) 人は区別しないが、ボートは区別する場合
- (3) 人もボートも区別する場合
- (4) 人は区別するが、ボートは区別しない場合

C問題

C 7 - 1

YOKOHAMA の 8 文字を横 1 列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。

- (1) 作られる全部の順列
- (2) Y, K, H, M がこの順に並ぶ順列
- (3) AA と OO という並びをともに含む順列
- (4) AO という並びまたは OA という並びの少なくとも一方を含む順列

C 7 - 2

- (1) 8 人を 3 つの部屋 A, B, C に入れる方法は何通りあるか。ただし、空き部屋ができてよいものとする。
- (2) 8 人を 3 つのグループ A, B, C に分ける方法は何通りあるか。
- (3) 8 人を 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか。

C 7 - 3

円に内接する n 角形 T について、 T の対角線の本数は $\boxed{\quad}$ 本である。この対角線から 2 本の対角線を選ぶとき、 T の頂点以外の点で交わるような選び方は全部で $\boxed{\quad}$ 通りある。ただし、 $n \geq 5$ とする。

C 7 - 4

1 個のさいころを 3 回投げて出る目の数を順に a, b, c とする。次の場合は何通りあるか。

- (1) $a < b < c$
- (2) $a \leq b \leq c$

C 7 - 5

$x + y + z = 9$ を満たす負でない整数の組 (x, y, z) は全部で何組あるか。
 また、 $xyz = 100$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) は全部で何組あるか。

C 7 - 6

- (1) $x + y + z = 15$ の正の整数解は何通りあるか。
- (2) (1) のうちで $x = y$ となる解は何通りあるか。
- (3) (1) のうちで $x > y$ となる解は何通りあるか。

C 7 - 7

白球 5 個、赤球 3 個、黒球 2 個がある。次のような方法は何通りあるか。

- (1) 10 個の球を 6 人に分ける方法 (1 個ももらわない人があってもよい)
- (2) 10 個の球を 2 組に分ける方法

C 7 - 8

10 段の階段を登るとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての階段を 1 段上がり (途中の階段をジャンプしないで 1 段ずつ登ること) で登るとき、登り方は何通りあるか。
- (2) 1 回だけ 2 段上がり (1 段をジャンプする登り方) を行い、残りの階段を 1 段上がりするときの登り方は何通りあるか。
- (3) 少なくとも 1 回は 2 段上りをするとき、登り方は何通りあるか。
- (4) 最大 3 段上がり (2 段をジャンプする登り方) まで許すとき、可能な登り方の総数は何通りあるか。

C 7 - 9

1 から n までの番号を 1 列に並べたとき、左から k 番目の番号が k でないような並べ方の総数を $f(n)$ で表す。

- (1) $f(3)$, $f(4)$ を求めよ。
- (2) $f(5)$ を求めよ。

第 8 章 二項定理

《学習項目》

A 問題

A 8 - 1

- (1) ${}_n C_r + {}_n C_{r+1} = {}_{n+1} C_{r+1}$ を証明せよ。
 (2) $k \cdot {}_n C_k = n \cdot {}_{n-1} C_{k-1}$ を証明せよ。

A 8 - 2

次の式の展開式における, [] 内に指定した項の係数を求めよ。

- (1) $\left(x^3 + \frac{2}{x}\right)^7$ [x^5]
 (2) $\left(2x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

A 8 - 3

$(x - y + 3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

- (1) ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_r + \cdots + {}_n C_n$
 (2) ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^r {}_n C_r + \cdots + (-1)^n {}_n C_n$

B問題

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

$$(1) {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2r} + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$$

$$(2) {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2r-1} + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}$$

B 8 - 2

${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n$ を計算せよ。

B 8 - 3

次の式を計算せよ。 $\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{k+1}$

C問題

C 8 - 1

二項定理を用いて、次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

$$(1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

$$(2) (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad (x > 0)$$

第 9 章 確率

《学習項目》

- ・ 確率の定義 $\text{確率} = \frac{\text{条件をみたす場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$
- ・ 確率では、区別のないものも「区別して」数えなければならない。
- ・ 確率では、全体の場合の数と、条件を満たす場合の数の数え方を統一しなければならない。
- ・ 確率の問題は、できるだけ場合の数で解く方がよい。
- ・ 確率では、起こりうるすべての事象を把握しなければならない。
- ・ 復元抽出（さいころ型）、非復元抽出（くじひき型）の区別に注意
- ・ 「途中で終了」する問題も、最後までやり遂げる（オープン参加問題）

特殊な確率の求め方のチェックシート

- ・ 反復試行の確率（ n 回中 k 回）
- ・ じゃんけん
- ・ くりぬき確率（最大値の確率）
- ・ トーナメント

A問題

A 9 - 1

- (1) 1個のさいころを投げるとき、3の倍数の目が出る確率を求めよ。
- (2) 赤玉5個、白玉4個、青玉3個が入っている袋から玉を1個取り出すとき、赤玉が出る確率を求めよ。

A 9 - 2

赤玉5個、白玉4個、青玉3個が入った袋から、玉を3個同時に取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) すべて赤玉が出る確率
- (2) 赤玉1個と白玉2個が出る確率
- (3) どの色の玉も出る確率

A 9 - 3

1個のさいころを6回投げるとき、3の倍数の目がちょうど2回出る確率を求めよ。

A 9 - 4

3個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 出る目の最大値が4以下である確率
- (2) 出る目の最大値が4である確率

A 9 - 5

5人がじゃんけんを1回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1人だけが勝つ確率
- (2) 2人が勝つ確率
- (3) あいこになる確率

A 9 - 6 (旧)

1 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚ある。この中から 7 枚のカードを取り出して得られる 7 つの整数のうち最大のを X とする。

- (1) X が 8 である確率 $P(X=8)$ を求めよ。
- (2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

B問題**B 9 - 1**

4つのさいころを同時に振るとき、次の確率を求めよ。

- (1) 4つとも同じ目が出る確率
- (2) 3つのさいころに同じ目が出て、他の1つにはその目と異なる目が出る確率
- (3) 2つの異なる目がそれぞれ2つずつ出る確率
- (4) 2つのさいころに同じ目が出て、他の2つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率
- (5) 連続した4つの自然数の目が出る確率

B 9 - 2

2つの箱 A, B には、玉が2個ずつ入っている。「A, B の両方から同時に玉を1個ずつ取り出し、A から取り出した玉を B へ、B から取り出した玉を A へ入れる」という操作を1回の試行とする。最初に、箱 A には白玉が2個、箱 B には赤玉が2個入っていたとして、4回の試行の後、初めて A の箱に赤玉が2個入った状態になる確率を求めよ。

B 9 - 3

A, B, C の3人でじゃんけんをする。一度じゃんけんでは負けたものは、以後のじゃんけんから抜ける。残りが1人になるまでじゃんけんを繰り返す。最後に残ったものを勝者とする。ただし、あいこの場合も1回のじゃんけんを行ったと数える。

- (1) 1回目のじゃんけんでは勝者が決まる確率を求めよ。
- (2) 2回目のじゃんけんでは勝者が決まる確率を求めよ。

B 9 - 4

A, B, C, Dの4チームが次の方式で試合を行って優勝チームを決める。まず抽選によって2チームずつ2組に分かれて試合をし、その勝者同士で試合をし、勝ったほうを優勝チームとする。なお、どの試合にも引き分けはなく、実力が同じチームが試合をしたときに一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であり、強いチームが弱いチームと試合をしたときに強いチームが勝つ確率は $\frac{4}{5}$ であるとする。AとB, CとDはそれぞれ実力が同じであるが、A, BはC, Dより強いとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) AとBが試合をする確率を求めよ。
- (2) Aが優勝する確率を求めよ。

B 9 - 5

数直線上の点 P は、原点を出発点として、1回さいころを投げるごとに、5以上の目が出ると正の向きに2進み、他の目が出ると負の向きに1進む。さいころを6回投げるとき、Pが座標6の点にくる確率を求めよ。

B 9 - 6

さいころを100回振るとき、1の目がちょうど k 回出る確率を P_k とする。

- (1) P_k を k の式で表せ。ただし、 $0 \leq k \leq 100$ とし、累乗や組み合わせの記号を用いてもよいものとする。
- (2) P_k が最大となる k の値を求めよ。

C問題

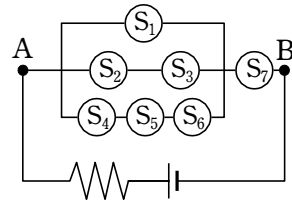
C 9 - 1

1 個のバクテリアが 10 分後に 2 個, 1 個, 0 個になる確率が, それぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ であるとする。

- (1) 20 分後に 2 個になっている確率を求めよ。
- (2) 30 分後に 6 個になっている確率を求めよ。

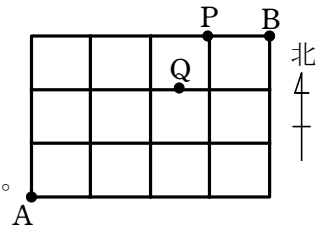
C 9 - 2

図に示す電気回路がある。S₁ ~ S₇ はスイッチであり, これらのスイッチは他のスイッチの影響を受けず, すべて ON, OFF の確率が $\frac{1}{2}$ であるものとする。このとき, A から B へ電流が流れる確率を求めよ。



C 9 - 3

右の図のように, 東西に 4 本, 南北に 5 本の道路がある。地点 A から出発した人が最短の道順を通って地点 B へ向かう。このとき, 途中で地点 P を通る確率を求めよ。各交差点で, 東に行くか, 北に行くかは等確率とし, 一方しか行けないときは確率 1 でその方向に行くものとする。



C 9 - 4

さいころを繰り返し n 回振って, 出た目の数を掛け合わせた積を X とする。すなわち, k 回目に出た目の数を Y_k とすると, $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ である。

- (1) X が 3 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- (3) X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

C 9 - 5

3枚の硬貨を同時に投げて、表が出たものを取り去り、次に、残っている硬貨があればそれらを同時に投げて、裏が出たものを取り去る。この手続きを繰り返す。ただし、硬貨が残っていても5回目を投げて終わりとする。

- (1) 5回目を投げることはない確率を求めよ。
- (2) 4回目を投げてちょうど全部の硬貨がなくなる確率を求めよ。
- (3) 4回目を投げて1枚の硬貨が残っている確率を求めよ。

C 9 - 6

あるパーティーに、A, B, C, Dの4人が1個ずつプレゼントを持って集まった。これらのプレゼントを一度集めてから無作為に分配することにする。

- (1) AまたはBが自分のプレゼントを受け取る確率を求めよ。
- (2) 自分が持ってきたプレゼントを受け取る人数が k 人である確率を $P(k)$ とする。
 $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ をそれぞれ求めよ。

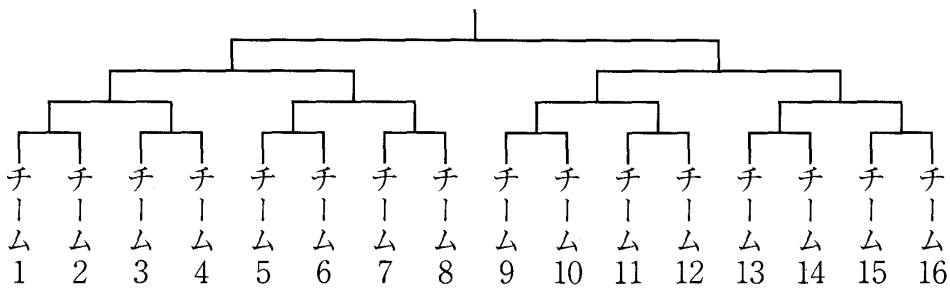
C 9 - 7

n を 2 以上の自然数とする。 n 個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも1個は1の目が出る確率
- (2) 出る目の最小値が2である確率
- (3) 出る目の最小値が2かつ最大値が5である確率

C 6 - 8

16チームが次の図のようなトーナメントで優勝を争うことになりました。16チームの中の1つであるチームAは他のどのチームに対しても確率 $\frac{2}{3}$ で勝つものとし、チームA以外のチーム同士はすべて互角とします。ただし、互角とは互いの勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であることを意味しています。なお、トーナメントの組合せは無作為のくじ引きで決まるものとします。



- 問1 チームAが優勝する確率を求めなさい。
 問2 チームA以外のあるチームBが優勝する確率を求めなさい。

B問題**B 10 - 1**

ある工場では、同じ製品をいくつかの機械で製造している。不良品が現れる確率は機械 A の場合は 4 % であるが、それ以外の機械では 7 % に上がる。また、機械 A で製品全体の 60 % を作る。製品の中から 1 個を取り出したとき

- (1) それが不良品である確率を求めよ。
- (2) 不良品であったとき、それが機械 A の製品である確率を求めよ。

B 10 - 2

4 回に 1 回の割合で帽子を忘れるくせのある K 君が、正月に A, B, C 3 軒を順に年始回りをして家に帰ったところ、帽子を忘れてきたことに気がついた。2 番目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。

B 10 - 3

1 つの袋の中に、A は赤玉 3 個と白玉 4 個、B は赤玉 5 個と白玉 2 個、C は赤玉 4 個と白玉 3 個を入れる。よくかき混ぜてから 1 個を取り出し、取り出した玉が赤玉であるとき、この赤玉が A が入れたものである確率を求めよ。

B 10 - 4

数直線上を動く点 P が原点の位置にある。1 枚の硬貨を投げて、表が出たら P を正の向きに 2 だけ進め、裏が出たら P を負の向きに 1 だけ進める。硬貨を 6 回投げたときの P の最後の座標を X とする。X の期待値を求めよ。

第 11 章 整数問題

《学習項目》

- ・ 整数の整除（あまりのあるわりざん）
- ・ 約数倍数
- ・ 素数と素因数分解
- ・ 公約数と公倍数，最大公約数と最小公倍数

正の整数 a, b の最大公約数を G ，最小公倍数を L とすると，

$$a = a_1 G, b = b_1 G, L = a_1 b_1 G$$

と表せる。このことより，

$$ab = GL$$

- ・ 互いに素
- ・ 整数の「余りによる類別」

・ 整数問題

- (1) 整数 \times 整数 = 整数
- (2) 一文字整理
- (3) 余りで類別
- (4) 範囲を絞る込む

・ 合同式

$a \equiv c \pmod{m}$, $b \equiv d \pmod{m}$ のとき

$$a + b \equiv c + d \pmod{m}$$

$$a - b \equiv c - d \pmod{m}$$

$a \equiv c \pmod{m}$, $b \equiv d \pmod{m}$ のとき

$$ab \equiv cd \pmod{m} \quad a^k \equiv c^k \pmod{m}$$

A 問題

A 11 - 1

次の数の正の約数の和を求めよ。

- (1) 3^7 (2) $3^4 \cdot 7^3$ (3) 864

A 11 - 2

次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

- (1) $2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (2) 18, 252 (3) 30, 126, 140

B問題

B 11 - 1

等式 $x + 5y + 2z = 15$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

B 11 - 2

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $11x + 23y = 2$

(2) $56x - 73y = 5$

B 11 - 3

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$xy - 2x + 3y - 1 = 0$$

B 11 - 4

方程式 $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ の整数解をすべて求めよ。

B 11 - 5

x, y がともに整数のとき、次の方程式を満たす (x, y) を求めよ。

$$x^2 + xy + 6x + 7y - 6 = 0$$

B 11 - 6

n は自然数とする。 $n^2 - 14n + 45$ が素数となるような n をすべて求めよ。

B 11 - 7

次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (x \leq y \leq z)$$

B 11 - 14

正の整数を 5 進法で表すと数 $abc_{(5)}$ となり, 3 倍して 9 進法に直すと数 $cba_{(9)}$ となる。
この整数を 10 進法で表せ。

C問題

C 11 - 1

- (1) 連続した 4 つの自然数の積は、24 の倍数であることを証明せよ。
 (2) n が整数のとき、 $n^9 - n^3 + 3n^2 + 9n + 6$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

C 11 - 2

次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{3} \quad (2 \leq x \leq y \leq z)$$

C 11 - 3

$xyz = x + y + z$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

C 11 - 4

p, q を互いに素な自然数とする。

- (1) すべての整数 x に対して、 p 個の整数 $x - q, x - 2q, \dots, x - pq$ を p で割った余りはすべて異なることを証明せよ。
 (2) $x > pq$ を満たすすべての整数 x は、ある自然数 a, b を用いて $x = ap + bq$ と表されることを証明せよ。

第 12 章 平面図形

《学習項目》

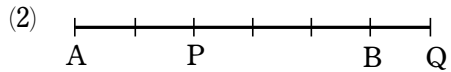
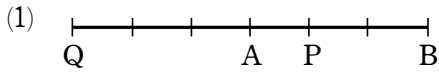
- ・ 三角形の成立条件 (再)
- ・ 角の二等分線の性質
- ・ 三角形の重心・外心・内心・垂心
- ・ 正三角形の性質
 - ① 重心=外心=内心=垂心
 - ② 重心・外心・内心・垂心のいずれか 2 つが一致すれば正三角形
- ・ メネラウスの定理, 拡張メネラウスの定理
- ・ チェバの定理, 拡張チェバの定理
- ・ 円と接線
- ・ 2 円の共通接線 (共通内接線, 共通外接線)
- ・ 2 つの円の位置関係
- ・ 円周角の定理, その逆
- ・ 円に内接する四角形の性質, その逆
- ・ 接弦定理, その逆
- ・ 方べきの定理, その逆
- ・ 方べきの定理の証明

- ・ 補助線の引き方

A問題

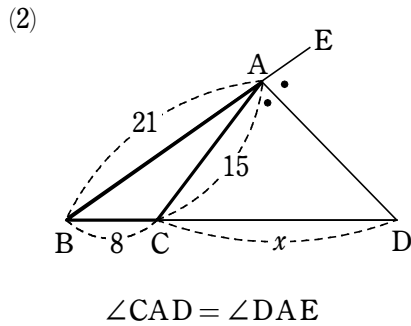
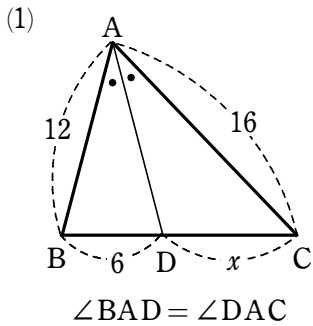
A 12 - 1

図の点 P, Q は, 線分 AB をどのように内分または外分するか。



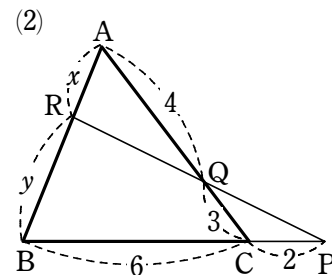
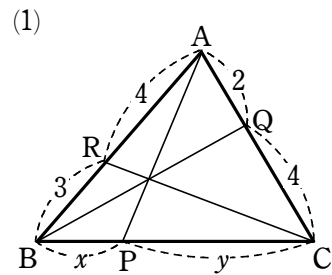
A 12 - 2

次の図において, x の値を求めよ。



A 12 - 3

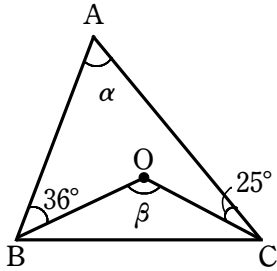
下の図において, $x : y$ を求めよ。



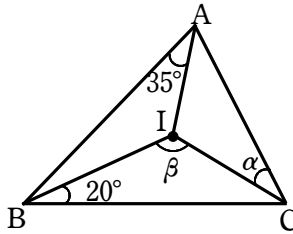
A 12 - 4

$\triangle ABC$ の外心を O ，内心を I とする。次の図の α ， β の大きさを求めよ。

(1)

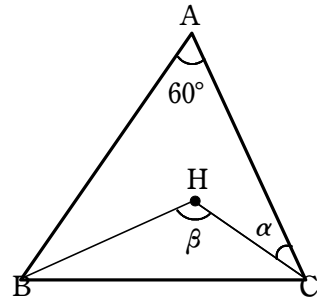


(2)



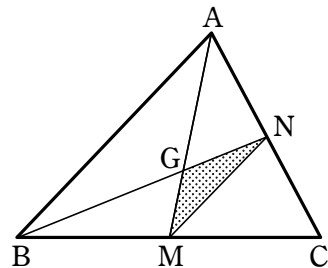
A 12 - 5

右の図において，点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。
 α ， β を求めよ。



A 12 - 6

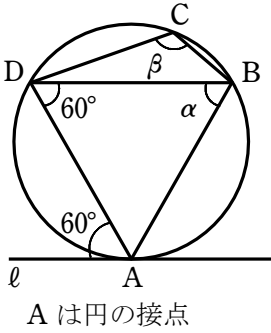
$\triangle ABC$ の 2 つの中線 AM ， BN の交点を G とし， M と N を結ぶ。 $\triangle ABC$ と $\triangle GMN$ の面積比を求めよ。



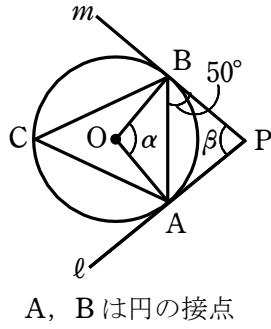
A 12 - 7

下の図において、 α , β を求めよ。ただし、直線 ℓ , m は円の接線とする。

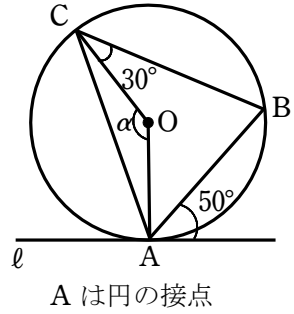
(1)



(2)



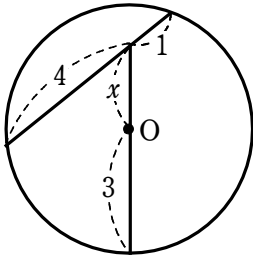
(3)



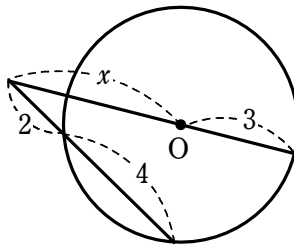
A 12 - 8

下の図において、 x を求めよ。ただし、 O は円の中心、直線 PT は円の接線で、 T は接点である。

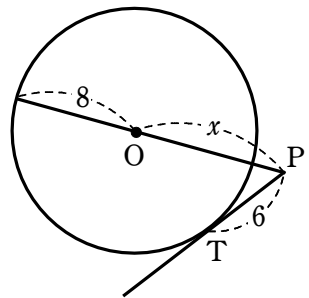
(1)



(2)



(3)



B問題

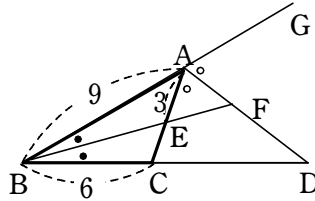
B 12 - 1

右の図において、

$$\angle ABF = \angle FBD$$

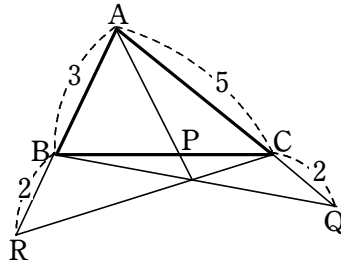
$$\angle CAD = \angle DAG$$

のとき、EC, CD, AF : FD の値を求めよ。



B 12 - 2

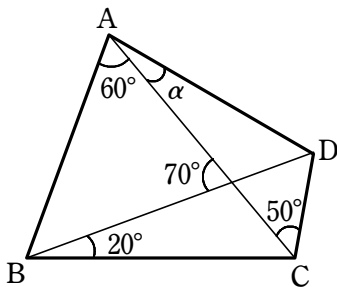
下の図において、線分比BP : PCを求めよ。



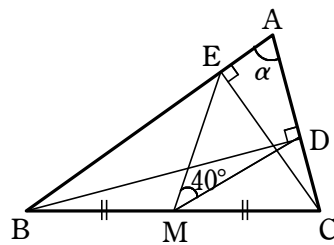
B 12 - 3

下の図において、 α を求めよ。

(1)



(2)

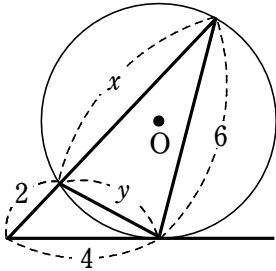


$BD \perp AC, CE \perp AB$

M は辺 BC の中点

B 12 - 4

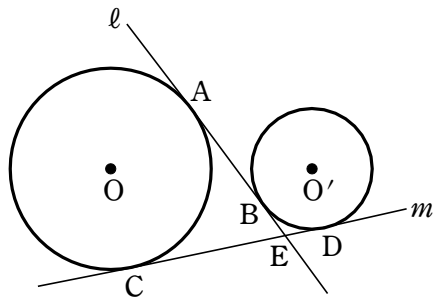
次の図において、 x , y の値を求めよ。



B 12 - 5

右の図において、直線 l は点 A, B で、直線 m は点 C, D でそれぞれ円 O, O' に接し、 l と m は点 E で交わっている。円 O の半径は 10, 円 O' の半径は 6, 中心間の距離 OO' は 20 である。次の線分の長さを求めよ。

- (1) AB (2) CD (3) BE

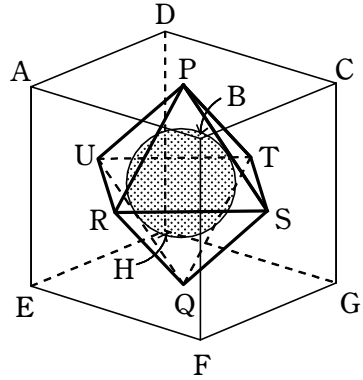


C問題

C 12 - 1

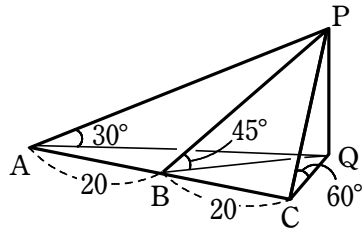
右の図のように、正六面体 $ABCD-EFGH$ の各面の対角線の交点 P, Q, R, S, T, U を結ぶと、正八面体 $PRSTUQ$ ができる。正八面体 $PRSTUQ$ の 1 辺の長さが 6 のとき、次の問いに答えよ。

- (1) 正八面体 $PRSTUQ$ の体積 V を求めよ。
- (2) $\triangle PRS$ の面積を求めよ。
- (3) 正八面体 $PRSTUQ$ に内接する球の半径 r を求めよ。



C 12 - 2

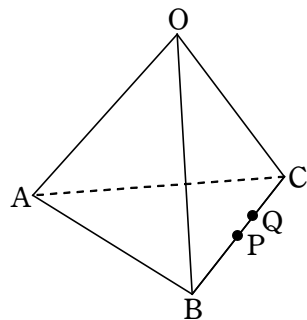
右の図のように、一直線上に並んだ 3 地点 A, B, C から塔 PQ の仰角を測ると、それぞれ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ であった。また、 $AB=20\text{ m}, BC=20\text{ m}$ であった。塔 PQ の高さを求めよ。



C 12- 3

右の図のように、1 辺の長さが 18 cm の正四面体 $OABC$ がある。辺 BC の中点を P 、 $2:1$ の比に分ける点を Q とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AP の長さを求めよ。
- (2) 点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さを求めよ。
- (3) 正四面体 $OABC$ の体積を求めよ。
- (4) 点 Q から $\triangle OAB$ に下ろした垂線の長さを求めよ。

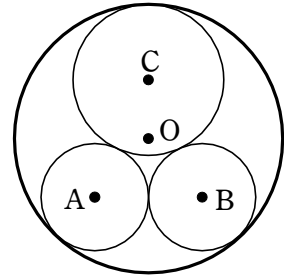


C 12 - 4

正四面体 T と半径 1 の球面 S とがあって、 T の 6 つの辺がすべて S に接しているという。 T の 1 辺の長さを求めよ。

C 12 - 5

右の図のように、半径 2 の外接する 2 円 A , B が、半径 5 の円 O に内接している。
2 円 A , B に外接し、円 O に内接する円 C の半径を求めよ。



第 13 章 図形と式 (1)

《学習項目》

- ・点 2点間距離公式（三平方の定理）、内分・外分公式
 - ・直線 $y = mx + n$ 型 \Rightarrow 傾き
 - ・直線 $ax + by + c = 0$ 型
 \Rightarrow 方向ベクトル、法線ベクトル、点と直線の距離公式
 - ・2直線の平行・垂直（傾き利用 または 法線ベクトル利用）
 - ・円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
 \Rightarrow 円のパラメータ表示、円の接線公式、直線との位置関係、2つの円の位置関係
 - ・グラフの平行移動・対称移動・軸方向への拡大縮小（③で扱う）
 - ・曲線束
- ・円と直線 \Rightarrow （円の中心と直線の距離）と（半径）の関係に帰着することが多い

A問題

A 13 - 1

2点 A(1, -1), B(4, 3) を結ぶ線分 AB について, 次のものを求めよ。

- (1) 2点A, Bの距離
- (2) 2:1 に内分する点 C
- (3) 3:2 に外分する点 D

A 13 - 2

(1) 次の直線の方程式を求めよ。

(ア) 点(-1, 3) を通り, 傾きが -2 (イ) 点(4, 1) を通り, x 軸に垂直

(2) 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(ア) (1, -2), (-3, 4) (イ) (-5, 7), (6, 7)

A 13 - 3

xy 平面上の直線 $(k+2)x + (k+1)y - 2k - 3 = 0$ は実数 k の値にかかわらず, 定点を通る。この定点の座標を求めよ。

A 13 - 4

点(2, 8) と直線 $y = \frac{3}{2}x + 2$ の距離を求めよ。

A 13 - 5

次の円の方程式を求めよ。

- (1) 中心が(3, -4) で, 原点を通る円
- (2) 中心が(1, 2) で, x 軸に接する円
- (3) 2点(1, 4), (5, 6) を直径の両端とする円
- (4) 2点(2, 1), (1, 2) を通り, 中心が x 軸上にある円
- (5) 3点(4, -1), (6, 3), (-3, 0) を通る円

A 13 - 6

円 $x^2 + y^2 = 9$ …… ① について次の問いに答えよ。

- (1) 円 ① 上の点 $(2, -\sqrt{5})$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 円 ① に接する傾き -2 の接線の方程式を求めよ。

A 13 - 7

円 $x^2 + 6x + y^2 - 6y + 5 = 0$ 上の点 $(-1, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

B問題

B 13 - 1

2 直線 $l : 2x - y + 3 = 0$, $m : 3x - 2y - 1 = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 直線 l , m の交点の座標を求めよ。
- (2) m 上の点 $P(3, 4)$ の、直線 l に関する対称点の座標を求めよ。
- (3) 直線 l に関して、直線 m と対称な直線の方程式を求めよ。

B 13 - 2

3 直線 $x - 2y + 9 = 0$, $3x + y - 1 = 0$, $ax - y + 5 = 0$ が三角形を作らないとき、定数 a の値を求めよ。

B 13 - 3

2 直線 $2x + 5y - 3 = 0$, $5x + ky - 2 = 0$ が平行になるとき、 $k = \overset{\text{ア}}{\square}$ である。また、直交するときは、 $k = \overset{\text{イ}}{\square}$ で、このとき、交点の座標は、 $\overset{\text{ウ}}{\square}$ である。

B 13 - 4

2 直線 $2x + y - 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。

B 13 - 5

円 $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$ 上の点 P と、直線 $x - 2y + 2 = 0$ 上の点 Q を結ぶ線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

B 13 - 6

点 $A(3, 1)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 5$ に接する直線の方程式を求めよ。

B 13 - 7

円 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ と直線 $l: y = -x + k$ が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ。また、 l が C によって切り取られてできる線分の長さが 2 となるとき、 k の値を求めよ。

B 13 - 8

曲線 $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 0$ を P 、 P を x 軸の正の向きに a 、 y 軸の正の向きに b だけ平行移動したものを P' とする。曲線 P と P' が共有点をもつとき a, b の満たす条件は

$a^2 + b^2 \leq \overset{ア}{\square}$ である。更に、 P と P' の 2 つの交点 A, B を通る直線 l の方程式が

$x + y = -6$ であれば $a = \overset{イ}{\square}$ 、 $b = \overset{ウ}{\square}$ である。

C問題

C 13 - 1

次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) $x - 2y + 4 = 0$, $3x - y - 3 = 0$ (2) $y = x + 1$, $y = (-2 + \sqrt{3})x$

C 13 - 2

平面上に 2 点 A (-1, 3), B (5, 11) がある。

- (1) 直線 $y = 2x$ に関して、点 A と対称な点 P の座標を求めよ。
 (2) 点 Q が直線 $y = 2x$ 上にあるとき、QA + QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

C 13 - 3

定数 k がどんな値をとっても、

$$(k+3)x - (k-4)y = 5k+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の表す直線はある定点を通る。この定点の座標を求めよ。また、①は、この定点を通るすべての直線を表すことができるかどうかを述べよ。

C 13 - 4

3 直線 $x - y + 1 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ の囲む三角形の外接円の中心 (外心) の座標と半径を求めよ。

C 13 - 5

2 つの円 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 5 = 0$ について

- (1) 2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。
 (2) 2 円の 2 つの交点および点 (1, 3) を通る円の方程式を求めよ。

C 13 - 6

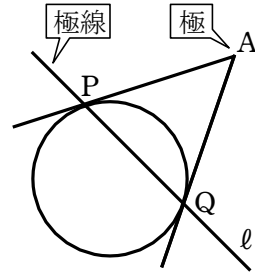
円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 円の共通接線は全部で何本あるか。
- (2) 2 円の共通接線のうち接点がすべて第 1 象限にあるものの方程式を求めよ。

C 13 - 7

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 外の点 $A(p, q)$ からこの円に引いた 2 本の接線の接点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。

このとき、直線 l を点 A に関する円の極線といい、 A を極という。

**C 13 - 8**

$10x^2 + kxy + 2y^2 - 9x - 4y + 2 = 0$ が 2 直線を表すときの k の値を求めよ。

第 14 章 図形と式 (2)

《学習項目》

- ・ 積の領域
- ・ 軌跡（与えられた条件を満たす点全体の集合）
- ・ 軌跡の求め方

動点を $P(x, y)$ とおき、 x, y の関係式を作る。ただし、軌跡の限界に注意する。

A 問題

A 14 - 1

不等式 $(2x - y - 3)(x - y + 1) \leq 0$ の表す領域を図示せよ。

A 14 - 2

2 点 $A(6, 1)$, $B(0, 1)$ からの距離の比が $2 : 1$ である点 P の軌跡を求めよ。

A 14 - 3

x, y が 4 つの不等式 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x - 3y \geq -6$, $3x + y \leq 12$ を同時に満たすとき、 $x + 3y$ の最大値と最小値を求めよ。

A 14 - 4

方程式 $x^2 + y^2 - 4kx + (6k - 2)y + 14k^2 - 8k + 1 = 0$ が円を表すとき

- (1) 定数 k の値の範囲を求めよ。
- (2) k の値がこの範囲で変化するとき、円の中心の軌跡を求めよ。

B問題

B 14 - 1

平面上の 2 点を $A(2, 2)$, $B(4, 3)$ とする。点 P が放物線 $y = -x^2 + 2x - 3$ 上を動くとき、 $\triangle PAB$ の面積の最小値を求めよ。

B 14 - 2

不等式 $x^2 + y^2 \leq 5$ を満たす x, y に対して、 $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

B 14 - 3

次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q が放物線 $y = x^2$ 上を動くとき、点 $A(2, -2)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ を $1:2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき、点 $A(4, 2)$ に関して点 Q と対称な点 P の軌跡を求めよ。

B 14 - 4

放物線 $y = (x - 3)^2$ と直線 $y = mx$ が異なる 2 点 A, B で交わっている。 m の値が変化するとき、線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

B 14 - 5

2 点 $A(4, 0)$, $B(2, 0)$ と円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の動点とでできる三角形の重心 G の軌跡を求めよ。

B 14 - 6

m の値が変化するとき、次の 2 直線の交点 P の軌跡を求めよ。

$$x - my + 1 = 0, \quad (m + 1)x - my + 2 = 0$$

B 14 - 7

a がすべての実数値をとって変化するとき、放物線 $y = x^2 + ax + a^2$ が通らない領域を図示せよ。

C問題

C 14 - 1

点 (x, y) が、不等式 $(x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ の表す領域上を動くとき、次の式の最大値、最小値を求めよ。

(1) $\frac{y}{x}$

(2) $x^2 + y^2$

C 14 - 2

直線 $y = ax + b$ が 2 点 $P(1, -1)$, $Q(2, 1)$ の間を通るとき、点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

C 14 - 3

(1) 不等式 $|x| + |y| \leq 3$ の表す領域を図示せよ。

(2) 実数 x, y は方程式 $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ を満たすとする。このとき、 $t = |x| + |y|$ の最大値を求めよ。

C 14 - 4

実数 a, b が $a^2 + b^2 + a + b = 1$ を満たしながら変わるとき、点 $(a+b, ab)$ はどんな曲線を描くか。

C 14 - 5

実数 m が変化するとき、直線 $y = mx$ と円 $(x-5)^2 + y^2 = 4$ の 2 つの交点 A, B を結ぶ線分 AB の中点 P はどんな曲線を描くか。

C 14 - 6

xy 平面上の 2 点 (t, t) , $(t-1, 1-t)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき、 ℓ の通りうる範囲を図示せよ。

第 15 章 三角関数

《学習項目》

- ・ 動径と一般角
- ・ 三角関数の定義
- ・ グラフ
- ・ 相互関係
- ・ 周期
- ・ 変換公式
- ・ 三角関数の方程式
- ・ 三角関数の不等式

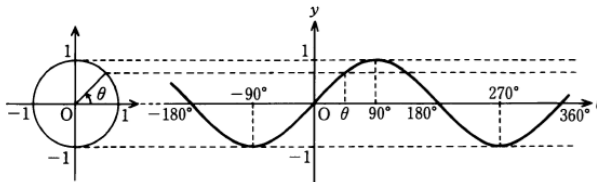
- ・ 加法定理
- ・ 2 倍角・半角・3 倍角の公式
- ・ 三角関数の合成
- ・ 積和, 和積変換

(1) $y = \sin \theta$

定義域: 任意の角.

値域: $-1 \leq \sin \theta \leq 1$.

原点对称.

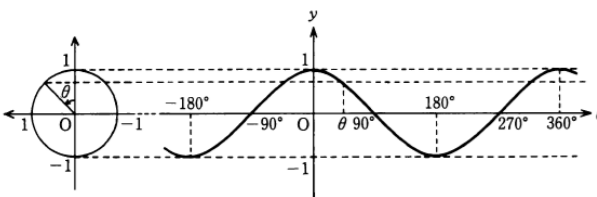


(2) $y = \cos \theta$

定義域: 任意の角.

値域: $-1 \leq \cos \theta \leq 1$.

y 軸対称.



(3) $y = \tan \theta$

定義域:

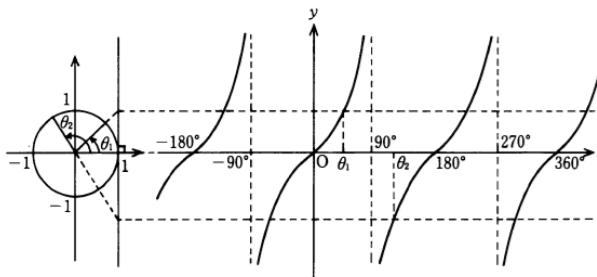
$90^\circ + 180^\circ \times n$

(n は整数) 以外の

任意の角.

値域: 実数全体.

原点对称.



A 問題

A 15 - 1

次の θ について, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を, それぞれ求めよ。

$$(1) \theta = \frac{7}{4}\pi \qquad (2) \theta = -\frac{5}{6}\pi \qquad (3) \theta = \frac{3}{2}\pi$$

A 15 - 2

(1) θ の動径が第 2 象限にあり, $\sin \theta = \frac{3}{4}$ のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を, それぞれ求めよ。

(2) θ の動径が第 4 象限にあり, $\tan \theta = -3$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を, それぞれ求めよ。

A 15 - 3

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。また, θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{2} \qquad (2) \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

A 15 - 4

加法定理を用いて, $\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$, $\tan 165^\circ$ の値を求めよ。

A 15 - 5

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ のとき, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

A 15 - 6

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y = \sin x - \cos x$

(2) $y = \sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x$

A 15 - 7

$2\sin 4\theta \cos 2\theta$ を和の形， $\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

B問題**B 15 - 1**

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \theta \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan \theta < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $2\sin \theta + \sqrt{3} \leq 0$

(5) $2\cos \theta > \sqrt{3}$

(6) $\tan \theta + 1 \geq 0$

B 15 - 2

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

B 15 - 3

$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ ， $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ のとき， $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

B 15 - 4

$\sin 22.5^\circ$, $\cos 22.5^\circ$, $\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ。

B 15 - 5

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。

(1) $\sin 2\theta = \sqrt{3} \sin \theta$

(2) $\cos 2\theta - 3\cos \theta - 1 = 0$

B 15 - 6

$\theta = 18^\circ$ のとき, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また, これを利用して, $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

B 15 - 7

関数 $y = 2\sin x + 3\cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値, 最小値を求めよ。

B 15 - 8

次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

(2) $\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

B 15 - 9

関数 $y = 2\sin^2 x + \sqrt{7} \sin x \cos x - \cos^2 x$ の最大値, 最小値を求めよ。

B 15 - 10

次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

$$y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x - 1$$

C問題

C 15 - 1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \cos\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$(3) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(4) \tan\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \leq -1$$

C 15 - 2

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $2\cos 2\theta + 4\cos \theta + 5 - a = 0$ の異なる解の個数を、定数 a の値の範囲によって調べよ。

C 15 - 3

次の関係式が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

C 15 - 4

y 軸上の 2 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ と動点 $P(a, 0)$ ($a > 0$) を考える。 $\theta = \angle APB$ とおく。

(1) $\tan \theta$ を a で表せ。

(2) θ が最大になる a を求めよ。

C 15 - 5

関数 $f(\theta) = \cos^2 \theta + 2a \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値を $M(a)$ とする。関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。

C 15 - 6

$t = \tan \frac{\theta}{2}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\sin \theta$, $\cos \theta$ を t の式で表せ。

(2) 関数 $y = \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta + 1}$ について、 y の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の

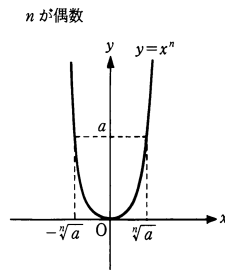
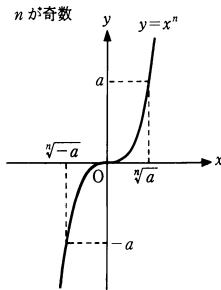
値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ とする。

第16章 指数・対数関数

《学習項目》

・ m 乗根

$$x = \sqrt[n]{a} \iff \begin{cases} x^n = a & (n \text{ が奇数のとき}), \\ x^n = a, x \geq 0 & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$



・ 指数法則

・ 指数の拡張

・ 指数関数とそのグラフ

・ 指数の方程式・不等式

・ 対数関数

・ 対数法則

・ 対数関数のグラフ

・ 対数の方程式

・ 対数の不等式

・ 常用対数

B問題

B 16 - 1

3つの数 $\log_3 6$, $\log_5 10$, $\frac{3}{2}$ の大小を不等号を用いて表せ。

B 16 - 2

$x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = 3$ のとき, $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

B 16 - 3

次の式の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 2}$ (2) $3^{-2\log_3 4}$ (3) $16^{\log_2 10}$

B 16 - 4

次の方程式を解け。

(1) $\log_2(x^2 + x - 2) = 2$ (2) $\log_2 x + \log_2(x + 3) = 2$

B 16 - 5

次の不等式を解け。

(1) $\log_5(2x + 3) < \log_5(x + 5)$ (2) $2\log_{0.2}(x - 2) > \log_{0.2}(x + 4)$
 (3) $\log_3(x - 4) + \log_3(x - 2) < 1$ (4) $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^3 - 4 \leq 0$

B 16 - 6

関数 $y = 4^x - 2^{x+2}$ ($0 \leq x \leq 2$) について, 次の問いに答えよ。

- (1) $2^x = t$ とおいて, y を t で表せ。また, t の値の範囲を求めよ。
 (2) y の最大値, 最小値を求めよ。

B 16 - 7

1.25^n の整数部分が 3 桁であるような自然数 n の値の範囲を求めよ。

ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

B 16 - 8

$\left(\frac{1}{30}\right)^{20}$ を小数で表したとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、

$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

C問題

C 16 - 1

連立方程式 $8 \cdot 3^x - 3^y = -27$, $\log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1$ を解け。

C 16 - 2

不等式 $\log_2\{\log_3(x-1) + \log_3(x+7)\} < 1$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

C 16 - 3

関数 $y = 8(2^x + 2^{-x}) - (4^x + 4^{-x}) - 10$ について、 $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと、 y を t の式で表せ。また、 y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

C 16 - 4

1枚で70%の花粉を除去できるフィルターがある。99.99%より多くの花粉を一度に除去するには、このフィルターは最低何枚必要か。ただし、 $\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

C 16 - 5

12^{30} について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

- (1) 12^{30} の桁数を求めよ。
- (2) 12^{30} の最高位の数字を求めよ。
- (3) 12^{30} の一の位の数字を求めよ。

C 16 - 6

不等式 $(\log_x y)^2 + 2 \leq 3\log_x y$ の表す領域を図示せよ。

C 16 - 7

座標平面上で不等式 $2(\log_3 x - 1) \leq \log_3 y - 1 \leq \log_3\left(\frac{x}{3}\right) + \log_3(2 - x)$ を満たす点 (x, y) 全体の作る領域を図示せよ。

第 17 章 数学 II の微分

《学習項目》

- ・ 極限
- ・ 微分係数と導関数
- ・ 微分公式
- ・ 関数の増加減少, 極値, グラフ

A問題

A 17 - 1

次の極限值を求めよ。

$$(ア) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

$$(イ) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 12}$$

A 17 - 2

導関数の定義に従って、次の関数の導関数を求めよ。

$$f(x) = x^3 - 3x$$

A 17 - 3

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = x^3 - 7x^2 - 8 \qquad (2) y = -2x^3 + 6x^2 + 4x \qquad (3) y = \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

A 17 - 4

関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフ上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

A 17 - 5

放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ について、傾きが 2 である接線の方程式と接点の座標を求めよ。

A 17 - 6

次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \qquad (2) y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$

B問題

B 17 - 1

次の等式が成り立つように、定数 a , b の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx}{x - 2} = 1$$

B 17 - 2

次の2つの条件 [1], [2] をともに満たす2次関数 $f(x)$ と定数 k の値を求めよ。

[1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

[2] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = k$

B 17 - 3

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、次の極限を $f'(a)$ など表せ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 3h) - f(a)}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 3h) - f(a - 2h)}{h}$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a}$

(4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a}$

B 17 - 4

関数 $y = x^2 - 3x + 6$ のグラフに点 $(1, 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

B 17 - 5

2つの曲線 $y = x^3 + ax^2$ と $y = x^2 + bx + c$ が点 $(2, 4)$ において、共通の接線をもつとき、定数 a , b , c の値を求めよ。

B 17 - 6

2つの放物線 $y = -x^2 + 1$, $y = x^2 + 6x + 10$ の共通接線の方程式を求めよ。

B 17 - 7

次の関数の極値を求め、そのグラフをかけ。

(1) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

(2) $y = x^4 - 4x^3 + 5$

B 17 - 8

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ は $x = 3$ で極大値 -26 をとる。定数 a , b の値を求めよ。

B 17 - 9

次の条件を満たすように、定数 k の値の範囲を定めよ。

(1) 関数 $f(x) = x^3 - kx^2 + 5x - 1$ が常に増加する。

(2) 関数 $f(x) = -x^3 + kx^2 - 6x + 7$ が常に減少する。

B 17 - 10

$a > 0$ とする。関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ が $x = -2$ で極大値, $x = 1$ で極小値をとり、極大値と極小値の差が 27 であるとき、定数 a , b , c の値を求めよ。

B 17 - 11

方程式 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - a = 0$ が異なる 4 個の実数解 α , β , γ , δ をもち、そのうちの 2 個は正, 残りの 2 個は負であるとする。

(1) 定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2番目に大きい解 β のとり得る値の範囲を求めよ。

B 17 - 12

点 A (0, a) から曲線 $C: y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ に 3 本の接線が引けるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

B 17 - 13

$x > 0$ のとき、不等式 $x^3 - 5x^2 + 3x + k > 0$ が成り立つように、定数 k の値の範囲を定めよ。

C問題

C 17 - 1

3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ は極大値と極小値をもち、それらを区間 $-1 \leq x \leq 1$ 内でとるものとする。この条件を満たすような実数の組 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

C 17 - 2

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とする。区間 $a \leq x \leq a+1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

C 17 - 3

$a > 0$ とする。関数 $f(x) = |x^3 - 3a^2x|$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $M(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) $M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

C 17 - 4

曲線 $y = x^3 - x$ と直線 $y = 2x + a$ が異なる3点を共有するとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

C 17 - 5

曲線 $C: y = \frac{1}{3}x^3$ 上の点 $A\left(a, \frac{1}{3}a^3\right)$ における接線を l_1 とする(ただし, $a > 0$)。

また, l_1 とは異なる C の接線のうち, 点 A を通る接線を l_2 とするとき

- (1) 接線 l_1 および l_2 が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α および β とするとき, $\tan \alpha, \tan \beta$ を a を用いて表せ。
- (2) l_1 が l_2 となす角を θ (ただし, $0^\circ < \theta < 90^\circ$) とするとき, $\tan \theta$ を a を用いて表せ。
- (3) $\tan \theta$ の最大値と, そのときの a の値を求めよ。

C 17 - 6

曲線 $y = x^4 - 4x^3 + 2x^2$ に異なる 2 点で接する直線の方程式と、その接点の x 座標 α, β ($\alpha < \beta$) を求めよ。

C 17 - 7

xy 平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - x$ に 3 本の相異なる接線が引けるための条件を求め、その条件を満たす (a, b) のある範囲を図示せよ。

第 18 章 数学 II の積分

《学習項目》

- ・不定積分とその公式
- ・定積分とその公式
- ・定積分と面積
- ・1/6公式
- ・偶関数と奇関数の積分公式
- ・絶対値の積分
- ・微分積分学の基本定理
- ・積分方程式

A問題

A 18 - 1

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (2 - 8x + 9x^2) dx \qquad (2) \int (x + 2)^2 dx \qquad (3) \int (x - 4)(2x + 5) dx$$

A 18 - 2

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 (2x - 3) dx \qquad (2) \int_{-1}^2 (2x^2 + x) dx \qquad (3) \int_1^3 (3x^2 - x + 1) dx$$

A 18 - 3

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 2x^2 - x + 3) dx$$

A 18 - 4

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^3 (x - 2)^2 dx$$

A 18 - 5

関数 $y = x^2 - 4$ ($-3 \leq x \leq 1$) のグラフと 2 直線 $x = -3$, $x = 1$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

A 18 - 6

2 つの放物線 $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 4x - x^2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

A 18 - 7

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_1^x f(t) dt = 3x^2 - x + a$$

A 18 - 8

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1) f(x) = x + \int_0^2 f(t) dt$$

$$(2) f(x) = 3x^2 - x \int_0^2 f(t) dt + 2$$

A 18 - 9

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^3 |x-1| dx$$

$$(2) \int_0^5 |x^2-16| dx$$

B 18 - 7

直線 $y=kx$ が、放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するように、定数 k の値を定めよ。

C 問題**C 18 - 1**

任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して、 $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ かつ $f(0)=1$ を同時に満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

C 18 - 2

曲線 $y=12x^3-12(a+2)x^2+24ax$ ($0 \leq a \leq 2$)

と x 軸で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

- (1) $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

C 18 - 3

放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

また、この囲まれた部分が直線 $y=mx$ によって上側と下側に 1:7 の面積比で分けられるとき、定数 m の値を求めよ。

C 18 - 4

放物線 $y = x^2 + 2x + k$ に原点から引いた 2 本の接線は垂直である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) k の値を求めよ。
- (2) 放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

C 18 - 5

曲線 $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ と直線 $y = mx$ とで囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするように、定数 m ($0 < m < 4$) の値を定めよ。

C 18 - 6

放物線 $y = x^2$ …… ① と半径 r の円 $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$ …… ② がある。

- (1) 放物線 ① 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 円 ② が点 (a, a^2) において、(1) で求めた l と接するとき、 a の値と半径 r を求めよ。ただし $a > 0$ とする。
- (3) 連立不等式 $y \geq x^2$, $y \leq 1$, $x^2 + (y - 1)^2 \geq r^2$ が表す領域を図示し、その面積 S を求めよ。ただし、 r は (2) で求めた値とする。

第 19 章 平面ベクトル

《学習項目》

- ・ベクトルと有向線分
- ・和・差・実数倍
- ・位置ベクトル
- ・成分表示
- ・ベクトルの平行
- ・内分公式、外分公式
- ・中点、重心
- ・直線上の点の表し方

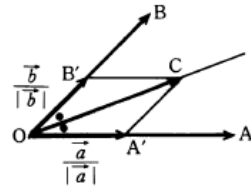
- ・直線のベクトル方程式（方向）
- ・斜交座標
- ・円のベクトル方程式
- ・単位ベクトル
- ・ベクトルにおける角の二等分

一直線上にない異なる 3 点 O, A, B が与えられたとき、

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とすると、 $\angle AOB$ の 2 等分線は

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

に平行である。



- ・内積

A問題

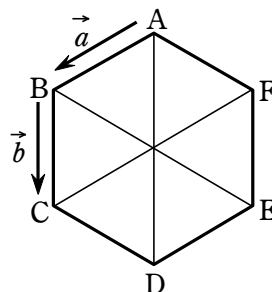
A 19 - 1

正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ とするとき、
次のベクトルを \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(1) \overrightarrow{AF}

(2) \overrightarrow{BE}

(3) \overrightarrow{DF}



A 19 - 2

$\triangle ABC$ で、辺 BC を 2 : 1 に外分する点を P、辺 CA の中点を Q、辺 AB を 1 : 2 に内分する点を R とする。

(1) 3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。

(2) $PQ : QR$ を求めよ。

A 19 - 3

$\triangle ABC$ において、辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D、辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 CD の交点を P とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{AP} を \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。

A 19 - 4

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 1$ 、 \vec{a} と \vec{b} のなす角が 60° のとき、 $2\vec{a} + 3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

A 19 - 5

$|\vec{a}| = 1$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ 、 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。また、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ を求めよ。

A 19 - 6

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ のとき, $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ が垂直になるように, 実数 t の値を定めよ。

A 19 - 7

2つのベクトル $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (1, x)$ について, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が平行になるような x の値を求めよ。

A 19 - 8

ベクトル $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (3, -1)$ に対して, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t =$ のとき最小値 $\sqrt{\text{$ をとる。

A 19 - 9

- (1) $\vec{a} = (1, -\sqrt{3})$ とのなす角が 120° , 大きさが $2\sqrt{10}$ であるベクトル \vec{b} を求めよ。
- (2) $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (-2, 1)$ に対して, $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直であるとき, t の値を求めよ。

B問題

B 19 - 1

$\triangle ABC$ と点 P に対して、等式 $6\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ が成り立つとき、

- (1) 点 P の位置をいえ。
- (2) 面積比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めよ。

B 19 - 2

$AB=5$, $BC=6$, $CA=7$ である $\triangle ABC$ の内心を I とする。 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{AI} を \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

B 19 - 3

$AB=5$, $AC=4$, $\angle A=60^\circ$ の $\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とするとき、 \overrightarrow{AH} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} で表せ。

B 19 - 4

$OA=2\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=2$ である $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき、 \overrightarrow{OH} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} で表せ。

B 19 - 5

$\triangle ABC$ において、 $AB=3$, $AC=2$, $\angle A=60^\circ$, 外心を O とし、 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{AO} を \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

B 19 - 6

$\triangle ABC$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接していて

$$3\vec{OA} + 4\vec{OB} + 5\vec{OC} = \vec{0}$$

を満たしているとする。

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

B 19 - 7

$\triangle OAB$ の面積を S とする。実数 s, t が、 $2s + 3t \leq 6, s \geq 0, t \geq 0$ を満たすとき、 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ で表される点 P の存在範囲を求め、その面積を S で表せ。

B 19 - 8

4 点 $A(1, 2), B(3, -2), C(4, 1), D(x, y)$ を頂点とする平行四辺形 $ABCD$ について、点 D の座標を求めよ。

B 19 - 9

次の直線の方程式を、媒介変数 t を用いて表せ。また、 t を消去した式で表せ。

- (1) 点 $A(-5, 3)$ を通り、ベクトル $\vec{d} = (-1, 3)$ に平行な直線
- (2) 2 点 $A(-5, -5), B(-2, 3)$ を通る直線

B 19 - 10

次の直線、円の方程式を、ベクトルを利用して求めよ。

- (1) 点 $A(-1, 2)$ を通り、 $\vec{n} = (4, 3)$ が法線ベクトルである直線
- (2) 中心が $C(3, -5)$ 、半径 6 の円
- (3) 2 点 $A(7, -3), B(-3, 5)$ を直径の両端とする円

C問題

C 19 - 1

$\triangle ABC$ の重心を G , 外接円の中心を E とするとき, 次のことを示せ。

- (1) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- (2) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EH}$ である点 H をとると, H は $\triangle ABC$ の垂心。
- (3) 3 点 E, G, H は一直線上にあり $EG : GH = 1 : 2$

C 19 - 2

平面上のベクトル \vec{a}, \vec{b} が $|5\vec{a} - 2\vec{b}| = 1, |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 1$ を満たすように動くとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

C 19 - 3

1 辺の長さが 1 である正五角形 $ABCDE$ において, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{e}$ とおくとき

- (1) 線分 BE の長さを求めよ。
- (2) $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC}$ を \vec{b}, \vec{e} で表せ。

第 20 章 空間座標・空間ベクトル

《学習項目》

- ・空間内の平面（2種）
- ・直線・球面
- ・点と平面の距離公式
- ・外積

A問題

A 20 - 1

3点 $A(-4, 0, 1)$, $B(-3, 2, 0)$, $C(-2, 1, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) $\angle BAC$ の大きさ
- (2) $\triangle ABC$ の面積 S

A 20 - 2

2点 $A(2, 1, 4)$, $B(3, -1, 8)$ を通る直線と、次の平面との交点の座標を求めよ。

- (1) xy 平面
- (2) yz 平面
- (3) zx 平面

A 20 - 3

次のような直線の方程式を求めよ。

- (1) 点 $A(1, 2, 3)$ を通り、 $\vec{d}=(2, 3, -4)$ に平行。
- (2) 2点 $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 3, 1)$ を通る。
- (3) 点 $A(-3, 5, 2)$ を通り、 $\vec{d}=(0, 0, 1)$ に平行。

A 20 - 4

点 $A(-2, 1, 0)$ を通り、 $\vec{n}=(1, 1, 2)$ に垂直な平面上の点 (x, y, z) の満たす方程式を求めよ。

A 20 - 5

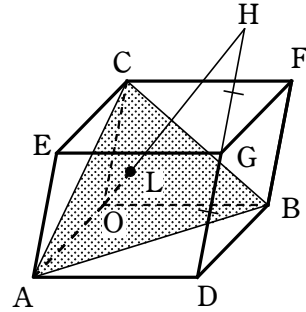
次のような球面の方程式を求めよ。

- (1) 2点 $A(3, 2, -4)$, $B(5, -6, 2)$ を直径の両端とする球面
- (2) 点 $(2, -1, 0)$ で xy 平面に接する半径 3 の球面

A 20 - 6

平行六面体 $OADB-CEGF$ において、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 DG の延長上に $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{GH}$ となる点 H をとる。

直線 OH と平面 ABC の交点を L とするとき、 \overrightarrow{OL} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

**A 20 - 7**

四面体 $OABC$ において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を P , 辺 BC を $3:2$ に内分する点を Q , 線分 PQ を $4:3$ に内分する点を R , 直線 BR と平面 OAC との交点を S とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として、 \overrightarrow{OR} , \overrightarrow{OS} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。また、 $BR:RS$ を求めよ。

B問題

B 20 - 1

点 $(-1, 0, 1)$ を通り、方向ベクトル $\vec{d}=(2, 3, 4)$ の直線を g とする。

- (1) 点 $A(4, 8, 7)$ から g へ引いた垂線と g との交点 H の座標を求めよ。
- (2) g に関して A と対称な点 B の座標を求めよ。

B 20 - 2

2つのベクトル $\vec{a}=(-1, 2, -2)$, $\vec{b}=(2, -2, 3)$ のいずれにも垂直な単位ベクトルを求めよ。

B 20 - 3

次の平面の方程式を求めよ。

- (1) 点 $A(2, 1, -5)$ を通り、 $\vec{n}=(1, -2, 3)$ に垂直な平面
- (2) 3点 $A(1, -1, 0)$, $B(3, 1, 2)$, $C(3, 3, 0)$ を通る平面

B 20 - 4

座標空間に、3点 $A(2, -2, -1)$, $B(-1, 2, 2)$, $C(-1, -2, 0)$ をとる。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) 原点 O と平面 ABC の距離を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

B 20 - 5

- (1) 次の方程式で表される球面の中心の座標と半径を求めよ。

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 2$$

- (2) 次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。
 - (ア) 直径の両端が $A(1, 2, 4)$, $B(-5, 8, -2)$ である。
 - (イ) 4点 $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, -8)$ を通る。

C問題

C 20 - 1

2点 $A(6, -2, 4)$, $B(7, -4, 3)$ を通る直線に、原点 O から垂線 OH を下ろす。
このとき、点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

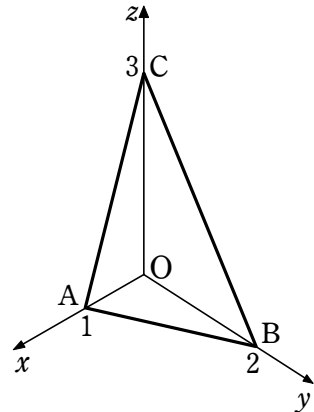
C 20 - 2

$A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, -2)$ とする。平面 ABC に原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

C 20 - 3

右の図のような4点 O, A, B, C について、次のものを求めよ。

- (1) 四面体 $OABC$ の体積 V
- (2) $\triangle ABC$ の面積 S
- (3) 原点 O から平面 ABC へ垂線 OH を下ろすとき、線分 OH の長さ h



C 20 - 4

空間内に4点 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 2, -1)$, $D(0, 2, 1)$ がある。

- (1) 点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき、点 H の座標を求めよ。
- (2) 点 P が xy 平面上を動き、点 Q が直線 AB 上を動くとき、距離 DP, PQ の和 $DP+PQ$ が最小となる P, Q の座標を求めよ。

C 20 - 5

$\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $OB = OC = 1$, $OA = 2$ である四面体 $OABC$ において、頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さを求めよ。

補充問題**C 20 - 6**

4点 $A(2, 1, 0)$, $B(2, 3, 2)$, $C(4, 1, 2)$, D を頂点とする正四面体 $ABCD$ において、頂点 D の座標を求めよ。

C 20 - 7

中心が点 $(-2, 1, a)$ 、半径が 6 の球面が、 xy 平面と交わってできる円の半径が $4\sqrt{2}$ であるとき、 a の値を求めよ。

C 20 - 8

次の4点 が同じ平面上にあるように、 x の値を定めよ。

$$A(1, 1, 0), B(3, 4, 5), C(1, 3, 6), P(4, 5, x)$$

C 20 - 9

4点 $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(-2, 1, -1)$ を通る球面の方程式を求めよ。

第 21 章 数列

《学習項目》

- ・ 数列の定義
- ・ 等差数列の一般項と和
- ・ 等比数列の一般項と和
- ・ 等差中項, 等比中項
- ・ Σ 記号と和の公式
- ・ 階差数列
- ・ 等差 \times 等比の和
- ・ 和から一般項を求める公式

A 問題

A 21 - 1

次のような等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。

- (1) 第 5 項が 11, 初項から第 6 項までの和が 39
- (2) 初項から第 5 項までの和が 40, 初項から第 10 項までの和が 155

A 21 - 2

等比数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 + a_2 = 3$, $a_3 + a_4 = 12$ である。この等比数列の一般項を求めよ。

A 21 - 3

3 つの数 -6 , a , b がこの順に等差数列をなし, a , b , -16 がこの順に等比数列をなす。このとき, a , b の値を求めよ。

A 21 - 4

次の和を求めよ

- (1) $\sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2^k} \right)$
- (2) $\sum_{k=1}^n k(n-k+1)$

A 21 - 5

次の和を求めよ。

- (1) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1)$
- (2) $1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 5 + \cdots + n^2(n+2)$

A 21 - 6

和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ を求めよ。

A 21 - 7

次の和を求めよ。

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}}$$

A 21 - 8

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = 2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

B問題

B 21 - 1

初項が 30, 公差が -4 の等差数列がある。

- (1) 初項から第何項までの和が初めて負の数になるか。
- (2) 初項から第何項までの和が最大となるか。

B 21 - 2

次の数列の第 k 項を求めよ。また, 初項から第 n 項までの和を求めよ。

9, 99, 999, 9999, ……

B 21 - 3

次の数列の第 k 項 a_k と, 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

- (1) $1 \cdot (2n - 1), 3(2n - 3), 5(2n - 5), \dots, (2n - 3) \cdot 3, (2n - 1) \cdot 1$
- (2) $1^2 \cdot n, 2^2 \cdot (n - 1), 3^2 \cdot (n - 2), \dots, (n - 1)^2 \cdot 2, n^2 \cdot 1$

B 21 - 4

次の和 S を求めよ。

$$(1) S = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n - 1)(3n + 2)}$$

$$(2) S = 1 + \frac{1}{1 + 2} + \frac{1}{1 + 2 + 3} + \dots + \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

B 21 - 5

和 $\sum_{k=1}^{76} \frac{2}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+5}}$ を求めよ。

B 21 - 6

次の和を求めよ。

$$1 + 4x + 7x^2 + \dots + (3n - 2)x^{n-1}$$

B 21 - 7

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は、 $S_n = n^3 + 3n^2 + 2n$ で与えられている。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。 (2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

C問題**C 21 - 1**

$a_n = 5n + 4$, $b_n = 3n + 2$ である 2 つの等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。この 2 つの数列に共通な項を順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする。

- (1) c_1 を求めよ。
 (2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。
 (3) $c_5 = a_l$, $c_{10} = a_m$ となる l , m に対し、数列 $\{a_n\}$ の第 l 項から第 m 項までの和を求めよ。

C 21 - 2

和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}}$ を求めよ。

C 21 - 3

-5 と 15 の間に n 個の数を入れて等差数列を作ると、その総和が 100 になった。このとき、 n の値と公差を求めよ。

C 21 - 4

3 で割り切れないすべての正の整数を、小さいものから順に並べてできる数列を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とする。

- (1) 正の整数 m に対して、第 $2m$ 項 a_{2m} を m の式で表せ。
- (2) 正の整数 n に対して、和 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ を n の式で表せ。
- (3) $S_n \geq 600$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

C 21 - 5

m, n は正の整数で $m < n$ とする。このとき、 m 以上 n 以下の分数で、5 を分母とし、5 の倍数でない整数を分子とするもの全体の和を求めよ。

C 21 - 6

- (1) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ において、隣接する 2 数の積の総和を求めよ。
- (2) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ において、互いに相異なり、かつ隣接しない 2 数の積の総和を求めよ。

C 21 - 7

数列 $\{a_n\}$ を、初項 1、公差 3 の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの n 個の項のうち、異なる 2 項の積の総和を S_n とする。例えば、 $S_3 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ である。このとき、 S_{10} を求めよ。

第 22 章 漸化式・数学的帰納法の基礎

《学習項目》

- ・ 階差数列
- ・ 2 項間漸化式
- ・ 3 項間漸化式
- ・ 2 項間帰納法
- ・ 3 項間帰納法

A 問題

A 22 - 1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| (1) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 6$ | (2) $a_1 = 2, a_{n+1} = -3a_n$ |
| (3) $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 1$ | (4) $a_1 = 3, 2a_{n+1} = a_n$ |

A 22 - 2

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 8n$$

A 22 - 3

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3$$

A 22 - 4

$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 第 n 項 a_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

B問題

B 22 - 1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

B 22 - 2

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

B 22 - 3

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n=2a_n-n$ であるとき、 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

B 22 - 4

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \quad a_2=4, \quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$$

B 22 - 5

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \quad a_2=4, \quad a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$$

B 22 - 6

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。

$$a_1=1, \quad b_1=3, \quad a_{n+1}=3a_n+2b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+3b_n$$

- (1) 数列 $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}$ の一般項を、それぞれ求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を、それぞれ求めよ。

B 22 - 7

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1 = 6, b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3b_n, b_{n+1} = 2a_n + 2b_n$$

- (1) 数列 $\{a_n - b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 数列 $\{2a_n + 3b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を、それぞれ求めよ。

B 22 - 8

n は自然数とする。 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

C問題

C 22 - 1

$a_1=2$, $a_{n+1}=16a_n^5$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

C 22 - 2

$a_1=1$, $na_{n+1}=2(n+1)a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定められている数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

C 22 - 3

数列 $\{x_n\}$ が $x_1=3$, $x_{n+1}=\frac{4x_n-2}{x_n+1}$ で定義されている。

(1) $x=\frac{4x-2}{x+1}$ の解を α, β ($\alpha<\beta$) とする。 $y_n=\frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ で定義される数列 $\{y_n\}$ が満た

す漸化式を導き、一般項 y_n を求めよ。

(2) 一般項 x_n を求めよ。

C 22 - 4

$a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+2n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

C 22 - 5

n を 3 以上の自然数とするとき、不等式 $3^n > 8n$ …… (A) を証明せよ。

第 23 章 数列の応用

《学習項目》

- ・ 群数列
- ・ 格子点
- ・ 数学的帰納法とその応用
- ・ 漸化式と確率
- ・ 漸化式と関数（関数列）

A問題

A 23 - 1

数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots$ において, $\frac{9}{128}$ は第何項であるか。

また, 初項からその項までの和を求めよ。

A 23 - 2

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 15x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点を考える。
ただし, 「格子点」とは, x 座標も y 座標も整数であるような点のことである。

- (1) x 座標が 3 である格子点の個数を求めよ。
- (2) この領域内にある格子点の個数を求めよ。

A 23 - 3

n を正の整数, i を虚数単位として

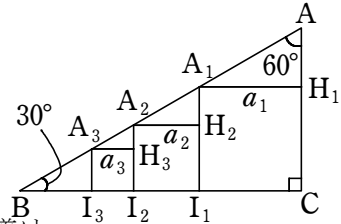
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

B問題

B 23 - 1

$A = 60^\circ$, $B = 30^\circ$, $AC = 1$ である直角三角形 ABC 内に、右の図のように、1 辺の長さが a_1, a_2, a_3, \dots の正方形が並んでいる。



- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) 右の図の $\triangle A_1A_2H_2$ と $\triangle ABC$ が相似であることに着目して、一般に a_n, a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。
- (3) a_n の値を n を用いて表せ。

B 23- 2

$\angle XPY (= 60^\circ)$ の 2 辺 PX, PY に接する半径 1 の円を O_1 とする。次に、2 辺 PX, PY および円 O_1 に接する円のうち半径の小さい方の円を O_2 とする。以下、同様にして順に円 O_3, O_4, \dots を作る。

- (1) 円 O_n の半径 r_n を n で表せ。
- (2) 円 O_n の面積を S_n とするとき、 $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ を n で表せ。

B 23 - 3

自然数の列を次のような群に分けるときの

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11, \dots\}, \dots$$

- (1) 第 n 群の最初の数を求めよ。
- (2) 第 n 群の数の和を求めよ。
- (3) 88 は第何群の何番目の数か。

B 23 - 4

n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0, 0), (2n, 0), (0, n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点 (x 座標, y 座標がともに整数である点) の個数を求めよ。

B 23 - 5

直線上に異なる 2 点 A, B があり, 点 P は A と B の 2 点を行ったり来たりする。サイコロを投げて 1 の目が出たとき, P は他の点に移動し, 1 以外の目が出たときはその場所にとどまる。初めに P は A にいるとして, サイコロを n 回投げたとき, P が A にいる確率を p_n で表す。

- (1) p_1 を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n で表せ。
- (3) p_n を n で表せ。

B 23 - 6

1 個のサイコロを投げ, 4 以下の目が出ればボールの所有者が代わり, 5 以上の目が出れば代わらない, という規則に従って, 最初 A が持っている 1 つのボールを, A, B の 2 人の間で受け渡し合うものとする。 n 回サイコロを投げた後, A, B がボールを持っている確率をそれぞれ a_n, b_n としたとき

- (1) a_{n+1} と b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表せ。
- (2) a_n と b_n をそれぞれ n の式で表せ。

B 23 - 7

硬貨を投げて数直線上を原点から正の向きに進む。表が出れば 1 進み, 裏が出れば 2 進むものとする。このとき, ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す。ただし, n は自然数とする。

- (1) 2 以上の n について, p_{n+1} と p_n, p_{n-1} との関係式を求めよ。
- (2) p_n を求めよ。

B 23 - 8

1 次式 $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が

$$f_1(x) = x + 1, \quad x^2 f_{n+1}(x) = x^3 + x^2 + \int_0^x t f_n(t) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき, $f_n(x)$ を求めよ。

B 23 - 9

n が自然数のとき、 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

B 23 - 10

自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を、 $(3 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ。
- (2) $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

B 23 - 11

$4(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = (2n + 1)a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) a_1 , a_2 , a_3 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

B 23 - 12

$t = x + \frac{1}{x}$ とおくと、 $x^n + \frac{1}{x^n}$ は t の n 次式になることを数学的帰納法により証明せよ。

C問題

C 23 - 1

平面上において、 n 本の直線は次の 2 つの条件を満たしている。

- (i) どの 2 本の直線も平行でない (ii) どの 3 本の直線も 1 点では交わらない
 このとき、 n 本の直線によって分けられる平面の部分の個数を a_n とする。このとき a_n の一般項を求めよ。

C 23 - 2

次のような操作を考える。

「1 つの線分に対し、それを 3 等分した長さを 1 辺とする正三角形の 2 辺でその線分の中央部を置き換える。」



面積 1 の正三角形 (図 1) から出発し、そのすべての辺に対し上の操作を繰り返す。

図 2, 図 3 はそれぞれ 1 回目, 2 回目の操作を行った後の図形である。

- (1) 3 回目の操作を行った後の辺の数を求めよ。
- (2) 3 回目の操作を行った後の面積を求めよ。
- (3) n 回目の操作を行った後の面積を求めよ。

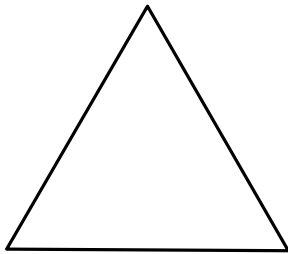


図 1

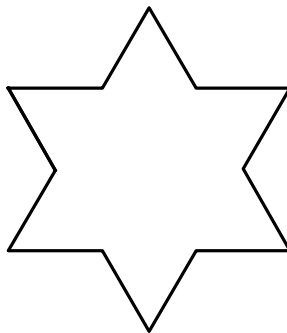


図 2

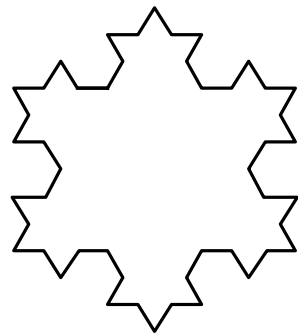


図 3

C 23 - 3

自然数 n について、 a_n を \sqrt{n} 以下の整数のうち最大のものとするとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。
- (2) 自然数 m について、 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{m^2}$ を、 m を用いて表せ。

C 23 - 4

n は自然数とする。3本の直線 $3x + 2y = 6n$, $x = 0$, $y = 0$ で囲まれる三角形の周および内部にあり、 x 座標と y 座標がともに整数である点は全部でいくつあるか。

C 23 - 5

自然数を右の図のように並べて、上から第 m 行、左から第 n 列にある数を $a_{m, n}$ で表す。

- (1) $a_{n, 1}, a_{1, n}$ を求めよ。
- (2) $a_{m, n}$ を求めよ。

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		