

# すうがく♪ ちゃちゃちゃ!

## ①数学 IA 篇【問題】

第1章 数と式 .....	3
第2章 集合論理 (不等式含む) .....	11
第3章 二次関数 .....	17
第4章 三角比 .....	23
第5章 数え上げの基礎 .....	31
第6章 場合の数 .....	35
第7章 確率 .....	43
第8章 整数問題 .....	49
第9章 平面図形 (および空間図形) .....	53
第10章 二項定理 .....	61
第11章 データの分析 .....	63



# 第1章 数と式

## 《学習項目》

・展開・因数分解公式

・絶対値 (1)  $a \geq 0$  のとき,  $|a| = a$ ,  $a < 0$  のとき,  $|a| = -a$

(2)  $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$

(3)  $|x| > k \Leftrightarrow x > k$  または  $x < -k$  ただし,  $k > 0$

(4)  $|a+b| \leq |a| + |b|$  等号成立は  $a, b$  が同符号 (またはいずれかがゼロ) のとき。

(5)  $|ab| = |a||b|, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

・平方根・二重根号

・数の分類

・等式の変形

(1) 両辺に同じ項をたしざん, ひきざんしても同値

(2) 両辺にゼロでない同じ項をかけざんしても同値

両辺にゼロをかけても成り立つが, 同値性は崩れる

(3) 両辺をゼロでない同じ式でわりざんしても同値

(注) ゼロとなる式ではわりざんできない!

(4) 両辺ゼロ以上なら両辺2乗しても同値

(注) 両辺の符号が異なる可能性があるときは, 両辺2乗できない!

(5)  $\sqrt{a^2} = |a|$

・解の公式, 判別式

・解と係数の関係

・対称式

・二次方程式・二次不等式とグラフの関係

・絶対値とグラフ

・分母の有理化

・二重根号

・等式の証明

・整式

・恒等式

・除法の原理 (剰余の定理・因数定理)

・★有理数解の候補

・連立方程式の解法 (代入法・加減法)

・高次方程式 (因数分解・置き換え)

・整式において, 解と因数の対応関係

・3次方程式の解と係数の関係

・3文字の対称式

・★複2次方程式

・★相反方程式

・共通解

・1の虚数3乗根

・相加平均・相乗平均の関係の不等式

・不等式の証明などは「集合論理」で扱います

**A 問題**

①**1-A-1**

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^2 - y^2 - x + y$

(2)  $a^2 - (b - c)a - bc$

(3)  $x^4 - x^2y^2 - 2y^4$

(4)  $(x - y)^2 - 3x + 3y - 10$

(5)  $x^3 + 64$

(6)  $64x^3 - 27y^3$

①**1-A-2**

次の式を簡単にせよ。

(1)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

(2)  $\sqrt{9 + \sqrt{56}}$

(3)  $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$

①**1-A-3**

次の等式を満たす実数  $x, y$  の値を求めよ。

(1)  $(3 + 2i)x + 2(1 - i)y = 17 - 2i$

(2)  $\frac{3 - 2i}{x + 2yi} = 1 + i$

①**1-A-4**

次の方程式, 不等式を解け。

(1)  $|3x - 2| = 5$

(2)  $|3 - x| < 2$

(3)  $|2x + 7| \geq 9$

①**1-A-5**

$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{7} \neq 0$  のとき,  $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3 + y^3 + z^3}$  の値を求めよ。

①**1-A-6**

$2x^2 - 5x + 4 = 0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき, 次の式の値を求めよ。

(1)  $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta$

(2)  $\alpha^2 + \beta^2$

(3)  $\alpha^3 + \beta^3$

(4)  $(\alpha - \beta)^2$

(5)  $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

①**1-A-7**

方程式  $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$  の 3 つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき, 次の 3 数を解とする 3 次方程式を求めよ。

(1)  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$

(2)  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

①**1-A-8**

次の等式が  $x$  についての恒等式となるように、定数  $a, b, c$  の値を定めよ。

(1)  $x^3 + 1 = (x - 2)^3 + a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c$

(2)  $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$

①**1-A-9**

(1) 整式  $f(x)$  を  $x + 2$  で割ると 6 余り、 $x - 6$  で割ると  $-10$  余る。

$f(x)$  を  $(x + 2)(x - 6)$  で割った余りを求めよ。

①**1-A-10**

方程式  $x^3 = 1$  の虚数解の 1 つを  $\omega$  とする。次の式の値を求めよ。

(1)  $\omega^6 + \omega^3 + 1$

(2)  $\omega^8 + \omega^4 + 1$

(3)  $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}$

**B** 問題

①**1-B-1**

次の式を因数分解せよ。

(7)\*  $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

(8)\*  $-x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

(9)  $x^4 + x^3y - xy^3 - y^4$

(10)\*  $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 2$

(11)  $x^4 + 4$

(12)\*  $x^4 + 3x^2 + 4$

①**1-B-2**

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^2 + 2xy - 3y^2 - 4x - 4y + 4$       (2)  $2x^2 - 7xy + 3y^2 - 5x + 10y + 3$

(3)\*  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$       (4)\*  $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$

(5)  $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$       (6)  $x^4 + x^2y^2 + y^4$

① **1-B-3**

次の不等式を解け。

(1)  $|3x - 4| < 2x$

(2)  $3|x - 1| \geq x + 3$

(3)  $3|x - 2| - 2|x| \leq 3$

①**1-B-4**

次の式を簡単にせよ。

(1)  $\sqrt{8 + \sqrt{48}}$

(2)  $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$

①**1-B-5**

$x^2 - 3x + 7 = 0$  の2つの解  $\alpha, \beta$  に対して、 $(\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7)$  の値を求めよ。

①**1-B-6**

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$  のとき  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  と  $x^5 + \frac{1}{x^5}$  の値を求めよ。

①**1-B-7**

方程式  $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 0$  を解け。

①**1-B-8**

$x$  についての方程式  $x^3 - (2a-1)x^2 - 2(a-1)x - 4a = 0$  を解け。

①**1-B-9**

方程式  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$  を解け

①**1-B-10**

$a$  を実数とするとき,  $x$  についての2次方程式

$$3x^2 + \{2a - 5 + 5(2a - 1)i\}x - 1 + (2a^2 - a)i = 0$$

が実数解をもつための ( $a$  の満たす) 条件を求めよ。

①**1-B-11**

3次方程式  $x^3 + (2a-1)x^2 - (3a-2)x + a - 2 = 0$  がある。次の各場合に対して, 実数  $a$  の条件を求めよ。

- (1) 与えられた方程式が3個の異なる実数解をもつ。
- (2) 与えられた方程式がちょうど2個の異なる実数解をもつ。

①**1-B-12**

3次方程式  $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$  の1つの解が  $1+i$  であるとき, 実数の係数  $a, b$  を求めよ。

①**1-B-13**

次の最小値を求めよ。

- (1)  $x > 0$  のとき  $x + \frac{3}{x}$  の最小値
- (2)  $x > 2$  のとき  $x + \frac{4}{x-2}$  の最小値

①**1-B-14**

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2}$  のとき,  $4x^3 + 2x^2 + 6x + 3$  の値を求めよ。

①**1-B-15**

$\alpha, \beta$  が  $x^2 - x + 1 = 0$  の解のとき,  $\alpha^{10} + \beta^{10}$  の値を求めよ。

**C 問題**

①**1-C-1**

(1)  $y = ||x-1|-3|$  のグラフをかくことにより、不等式  $||x-1|-3| < 2$  を解け。

【補足】 グラフを利用しない解法も考えてみよ。

(2) すべての実数  $x$  に対して不等式  $|3x-4| \geq -|x+2| + a$  が成り立つように  $a$  の値の範囲を求めよ。

①**1-C-2**

$f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + 5x + a - 2$ ,  $g(x) = x^3 + ax^2 + 6x + a$  とするとき、 $f(x)$  と  $g(x)$  が共通の因数 ( $x$  の1次式) をもつような定数  $a$  の値を求めよ。さらに、そのとき、 $f(x)$ ,  $g(x)$  がどのように因数分解されるかを示せ。

①**1-C-3**

$a + b + c = 1$ ,  $ab + bc + ca = 3$ ,  $abc = 2$  のとき、

(1)  $a^2 + b^2 + c^2$  の値を求めよ。

(2)  $a, b, c$  を解とする3次方程式を求めよ。

(3) (2)を用いて、 $a^3 + b^3 + c^3$ ,  $a^4 + b^4 + c^4$ ,  $a^5 + b^5 + c^5$  の値を求めよ。

①**1-C-4**

$\alpha, \beta$  が  $x^2 + 2x + 4 = 0$  の2解のとき、次の値を求めよ。

(1)  $\alpha^4 + \beta^4$     (2)  $\alpha^{3n+2} + \beta^{3n+2}$     (3)  $\alpha^n + \beta^n$



①**1-C-5**

整式  $f(x)$  を  $x^2-4x+3$  で割ると  $-x+10$  余り,  $x^2-5x+6$  で割ると  $2x+1$  余るという。

- (1)  $f(x)$  を  $x^2-3x+2$  で割ったときの余りを求めよ。
- (2)  $f(x)$  を  $(x-1)(x-2)(x-3)$  で割ったときの余りを  $px^2+qx+r$  とおき,  $p, q, r$  の値を求めよ。

①**1-C-6**

$x^{15}+1$  を  $x^2+x+1$  で割った余りを求めよ。

①**1-C-7**

$x^{2006}$  を  $x^4-1$  で割った余りを求めよ。

①**1-C-8**

多項式  $P(x)$  を  $(x+2)^3$  で割った余りを  $4x^2+3x+5$ ,  $x-1$  で割った余りを 3 とする。

- (1)  $P(x)$  を  $(x+2)(x-1)$  で割った余りを求めよ。
- (2)  $P(x)$  を  $(x+2)^2(x-1)$  で割った余りを求めよ。

①**1-C-9**

$\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2$  を  $x^3+1$  で割った余りを求めよ。

①**1-C-10**

正の整数  $n$  に対し,  $f(z) = z^{2^n} + z^n + 1$  とする。

- (1)  $f(z)$  を  $z^2 + z + 1$  で割ったときの余りを求めよ。
- (2)  $f(z)$  を  $z^2 - z + 1$  で割ったときの余りを求めよ。

①**1-C-11**

整式  $f(x)$  について, 恒等式  $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$  が成り立つとする。

- (1)  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$  の値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の次数を求めよ。
- (3)  $f(x)$  を決定せよ。

## 第2章 集合論理 (不等式含む)

### 《学習項目》

- ・ 集合の記号 和集合, 共通部分 (積集合), 全体集合, 補集合,
- ・ 条件, 否定, 命題 (真偽), 逆・裏・対偶, 必要条件・十分条件
- ・ 真偽の判定法 証明, 反例, 包含関係

#### ・ 有名不等式

相加平均と相乗平均の関係の不等式

すべての文字は正とする。

$$(2 \text{文字}) \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(3 \text{文字}) \quad a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc}$$

$$(4 \text{文字}) \quad a + b + c + d \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}$$

等号成立はすべての文字の値が等しいとき。

コーシー・シュワルツの不等式

$$(2 \text{次元}) \quad (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad \text{等号成立は } a:b = x:y \text{ のとき}$$

$$(3 \text{次元}) \quad (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{等号成立は } a:b:c = x:y:z \text{ のとき}$$

三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{等号成立は, } x, y \text{ が同符号, または } 0 \text{ を含むとき。}$$

#### ・ 不等式の性質

(a) やっていいこと

$$(1) \quad a < b \Leftrightarrow a + x < b + x, a - x < b - x \quad \text{同じ数を足しても引いてもよい。}$$

$$(2) \quad a < b, x > 0 \Rightarrow ax < bx, \frac{a}{x} < \frac{b}{x} \quad \text{正の数をかけても, 正の数で割ってもよい。}$$

$$(3) \quad a < b, x < 0 \Rightarrow ax > bx, \frac{a}{x} > \frac{b}{x}$$

負の数をかけたり, 負の数で割ったりすると, 不等号の向きが逆転する。

$$(4) \quad a < b, x < y \Rightarrow a + x < b + y \quad \text{同じ向きの不等式の両辺を加えてもよい。}$$

$$(5) \quad 0 < a < b, 0 < x < y \Rightarrow ax < by \quad \text{正ならば同じ向きの不等式の両辺をかけてもよい。}$$

$$(6) \quad n : \text{自然数}, 0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n \quad \text{ともに正ならば両辺を } n \text{ 乗してよい。}$$

(b) やってはいけないこと

$$(1) \quad \text{辺々ひきざん } a < b, x < y \text{ のとき, } a - x < b - y \text{ としてはいけない。}$$

$$(2) \quad \text{両辺2乗 } a < b \text{ のとき, } a^2 < b^2 \text{ としてはいけない。}$$

ただし, 両辺正ならばやってもよい。cf. (a)(6)

$$(3) \quad \text{辺々かけざん } a < b, x < y \text{ のとき, } ax < by \text{ としてはいけない。}$$

$$(4) \quad \text{文字でわりざん } ax < ay \text{ のとき, } x < y \text{ としてはいけない。}$$

ただし,  $a > 0$  ならばやってもよい。cf. (a)(2)

**A 問題**

① **2-A-1**

$A = \{x \mid x \text{ は } 1 \leq x \leq 10 \text{ である整数}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ は } 1 \leq x \leq 20 \text{ である整数}\}$ ,  $C = \{x \mid x = 3n + 1, n \text{ は自然数}\}$  とする。 $A \cup (B \cap C)$  と  $A \cap \overline{C}$  を求めよ。

① **2-A-2**

次の  に入れるのに最も適するものを下の①～④から選べ。

- (1) 四角形の対角線が垂直であることは、四角形がひし形であるための  ア .
- (2)  $x + y > 0$  は、 $x > 0$  または  $y > 0$  であるための  イ .
- (3)  $|x| \leq 1$  かつ  $|y| \leq 2$  は、 $2|x| + |y| \leq 2$  であるための  ウ .
- ① 必要条件であるが十分条件でない    ② 十分条件であるが必要条件でない  
 ③ 必要十分条件である    ④ 必要条件でも十分条件でもない

① **2-A-3**

次の2式の大小を比較せよ。

- (1)  $ab + bc + ca, a^2 + b^2 + c^2$                       (2)\*  $(a + b + c)^2, 4(ab + bc)$   
 (3)  $(ax + by)^2, (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$               (4)\*  $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b}, \sqrt{5(3a + 2b)}$

① **2-A-4**

$\sqrt[3]{2}$  が無理数であることを証明せよ。

**B** 問題

① **2-B-1**

次の  に入る適切な文を下の①～④から選べ

- (1)  $x=5$  は,  $x^2=5x$  であるための  ア .
  - (2)  $xy>0$  は,  $x>0, y>0$  であるための  イ .
  - (3)  $3x-5y=1$  は,  $x=2$  かつ  $y=1$  であるための  ウ .
  - (4)  $x>1, y>1$  は,  $x+y>2, xy>1$  であるために  エ .
- ① 必要条件であるが十分条件でない
  - ② 十分条件であるが必要条件でない
  - ③ 必要十分条件である
  - ④ 必要条件でも十分条件でもない

① **2-B-2**

次の  内に入れるのに最も適するものを下の①～④から選べ。

- (1)  $a^2=b^2$  は  $a^3=b^3$  であるための  ア 。(ただし,  $a, b$  は実数)
  - (2)  $p^2-4q>0$  は 2 次方程式  $x^2+px+q=0$  が実数解をもつための  イ .
  - (3) 2つの集合  $P, Q$  について,  $P \cup Q = P$  は  $P \cap Q = Q$  であるための  ウ .
- ① 必要条件であるが十分条件でない
  - ② 十分条件であるが必要条件でない
  - ③ 必要十分条件である
  - ④ 必要条件でも十分条件でもない

① **2-B-3**

$m$  を整数とする。このとき,  $m^2$  が 3 の倍数ならば,  $m$  は 3 の倍数であることを証明せよ。

① **2-B-4**

実数  $\alpha, \beta, \gamma$  が  $\alpha + \beta + \gamma = 3$  を満たしているとき,  
 $p = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, q = \alpha\beta\gamma$  とおく。

- (1)  $p = q + 2$  のとき,  $\alpha, \beta, \gamma$  の少なくとも1つは1であることを示せ。  
 (2)  $p = 3$  のとき,  $\alpha, \beta, \gamma$  はすべて1であることを示せ。

① **2-B-5**

$|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1$  のとき, 次の不等式を証明せよ。

- (1)  $xy + 1 > x + y$                       (2)  $xyz + 2 > x + y + z$

① **2-B-6**

- (1)  $a > 0, b > 0, ab = 2$  のとき,  $2a + 3b$  の最小値を求めよ。  
 (2)\*  $a > 0, b > 0, a + b = 3$  のとき,  $2ab$  の最大値を求めよ。

① **2-B-7**

- (1)\*  $x + 2y + 3z = 6$  のとき,  $x^2 + 4y^2 + 9z^2$  の最小値を求めよ。  
 (2)  $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$  のとき,  $4x + 3y - 6z$  の最大値と最小値を求めよ。

**C** 問題

① **2-C-1**

次の条件  $p, q$  に対し,  $p$  は  $q$  の必要条件か, 十分条件か, 必要十分条件か, そのいずれでもないかを答えよ。

- (1)  $p: x^2 + y^2 < 1$                        $q: |x| + |y| < 1$   
 (2)  $p: \text{命題 } r \text{ が真である}$                $q: \text{命題 } r \text{ の逆が真である}$   
 (3)  $p: a \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$                $q: a \text{ の平方が } 3 \text{ の倍数である (ただし, } a \text{ は整数)}$   
 (4)  $p: |a + b| < |a| + |b|$                    $q: ab > 0$

① **2-C-2**

実数  $c$  に関する以下の条件 (A)  $|c| \leq 2$  を考える。

以下の(1)から(6)の  $c$  に関する条件は, それぞれ上の条件 (A) が成り立つための

- (a) 必要条件であるが十分条件でない  
 (b) 十分条件であるが必要条件でない  
 (c) 必要十分条件である  
 (d) 必要条件でも十分条件でもない

のいずれであるか。

- (1)  $c \leq 2$                                   (2)  $c^2 - 2 \leq 0$   
 (3) すべての実数  $x$  に対して  $x^4 - c \geq 0$   
 (4) ある実数  $x$  があり  $(x-1)^2 + c^2 \leq 4$  となる  
 (5)  $x < 1$  ならば  $cx < 2$   
 (6)  $x$  の 2 次方程式  $x^2 + cx + 1 = 0$  は実数解をもたない

① **2-C-3**

(1)  $a:b=2:3, b:c=2:3$  のとき,  $a^2 + bc + \frac{9}{b^2} + \frac{9}{ac}$  の最小値を求めよ。

(2)\*  $x > 0, y > 0, x + y = 1$  のとき,  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$  の最小値を求めよ。

(3)\*  $\frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{\cos^2 \theta}$  の最小値を求めよ。

① **2-C-4**

文字がすべて正の数であるとき、次の不等式を証明せよ。

(1)  $m+n=1$  ならば、 $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} \geq \frac{1}{am+bn}$  である。

(2)  $p+q+r=1$  ならば、 $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} \geq \frac{1}{ap+bq+cr}$  である。

① **2-C-5**

$a, b, c$  を正の実数とするとき、次の  $F$  と  $G$  の値の大小を比較せよ。

$$F=(a^3+b^3+c^3)(a+b+c), \quad G=(a^2+b^2+c^2)^2$$

① **2-C-6**

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ ,  $x > 2, y > 2$  のとき  $2x+y$  の最小値を求めよ。

① **2-C-7**

命題「 $|x-b| + |y-b| \leq b$  ならば  $x^2 + y^2 < 125$  である」が真であるような整数  $b$  のうち最大のものを求めよ。



## 第3章 二次関数

### 《学習項目》

- ・ 2次関数のグラフ (直線との位置関係など)
- ・ 2次関数の最大最小(変域なし) ⇒ 軸
- ・ 2次関数の最大最小(変域あり) ⇒ 軸・両端
- ・ 2次の絶対不等式
- ・ 2次方程式の解の配置問題 ⇒ 軸・端点・判別式
- ・ 逆手法の基礎
  
- ・ 定数変数
- ・ 場合分け
- ・ 関数と、方程式・不等式の対応

### A 問題

#### ①3-A-1

次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

$$(1) y = 2x^2 - 8x - 1 \quad (-1 \leq x \leq 3) \qquad (2) y = -x^2 + 4x - 1 \quad (0 < x \leq 1)$$

#### ①3-A-2

次の2次方程式を解け。

$$(1) (x+6)(x-1) = x(7-3x) \qquad (2) (x+2)^2 - 5(x+2) + 5 = 0$$

$$(3) 1.5x(2-0.5x) = 0.5x + 2 \qquad (4) x^2 - 5\sqrt{3}x + 18 = 0$$

#### ①3-A-3

次の2次不等式を解け。

$$(1) 5x^2 + 7x - 6 > 0 \qquad (2) -x^2 + 4x - 1 > 0$$

①**3-A-4**

次の2次不等式を解け。

(1)  $x^2 + 2x + 1 > 0$

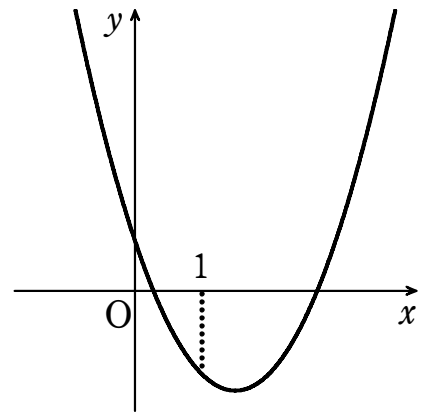
(2)  $x^2 - 2x + 3 \leq 0$

①**3-A-5**

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが右の図のようになる  
とき、次の値の符号を調べよ。

(1)  $a$       (2)  $b$       (3)  $c$       (4)  $b^2 - 4ac$

(5)  $a + b + c$       (6)  $a - b + c$



①**3-A-6**

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1) 放物線  $y = x^2 - x + 1$  を平行移動した曲線で、2点  $(1, 2)$ ,  $(-1, 6)$  を通る。

(2) 頂点は放物線  $y = -3x^2 + 6x + 1$  の頂点と同じであり、 $y$  軸と点  $(0, 6)$  で交わる。

(3) 最小値が  $-1$  で、そのグラフが2点  $(1, 1)$ ,  $(3, 1)$  を通る。

**B** 問題

① **3-B-1**

実数  $x, y$  の 2 次式  $x^2 - 2xy + 5y^2 + 6x - 14y + 5$  の最小値とそのときの  $x, y$  の値を求めよ。

① **3-B-2**

$x + y + z = 5$  のとき,  $x^2 + y^2 + z^2$  の最小値を求めよ。

【hint】 まずは一文字消去を試そう。余力があれば, 別解も考えてみよう。

① **3-B-3**

関数  $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$  の  $-2 \leq x \leq 3$  における最大値と最小値を求めよ。

① **3-B-4**

2 次関数  $f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$  の  $0 \leq x \leq 4$  における最大値を  $M(a)$ , 最小値を  $m(a)$  とする。次の値を求めよ。

- (1)  $M(a)$             (2)  $m(a)$             (3)  $M(a) - m(a)$  の最小値

① **3-B-5**

2 次関数  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  の  $t \leq x \leq t + 1$  における最大値を  $M(t)$ , 最小値を  $m(t)$  とするとき,  $M(t)$  の最小値と  $m(t)$  の最小値を求めよ。

① **3-B-6**

(1)  $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2$  のとき,  $x^2 + y^2 - xy$  の最大値と最小値を求めよ。

①**3-B-7**

(1)  $0 \leq x \leq 2$  における  $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^2 - 3x^2 - 6x + 3$  の最大値と最小値を求めよ。

(2)\*  $y = (x^2 - 4x + 5)^2 - 2a(x^2 - 4x + 5) + 3$  の最小値が 10 になるように定数  $a$  の値を定めよ。

①**3-B-8**

(1)\* 不等式  $x^2 + kx + k^2 - 2k - 4 < 0$  を満たす  $x$  の値が存在するような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

①**3-B-9**

2次方程式  $4x^2 - 2ax + 1 = 0$  の異なる2つの解がともに  $0 < x < 1$  の範囲にあるための定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

①**3-B-10**

2次方程式  $ax^2 - (a-1)x - 6 = 0$  が  $-2 < x < -1$  と  $1 < x < 2$  の両方の範囲で解をもつように定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

**C** 問題

① **3-C-1**

放物線  $y=x^2$  上の動点  $P(x, y)$  と,  $y$  軸上の点  $A(0, a)$  (ただし,  $a>0$ ) を考える。このとき,  $AP^2$  の最小値を求めよ。

① **3-C-2**

$a, b$  を実数として,  $P=a^4-4a^2b+b^2+6b$  とおく。

- (1) すべての実数  $b$  に対して  $P \geq 0$  となるような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2) すべての実数  $a$  に対して  $P \geq 0$  となるような  $b$  の範囲を求めよ。

① **3-C-3**

$2x^2+x-1>0 \cdots \textcircled{1}$ ,  $x^2+(2-a)x-2a<0 \cdots \textcircled{2}$  を考える。

- (1)  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  を同時に満たす整数値が 1 だけであるように  $a$  の値の範囲を定めよ。
- (2)  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  を同時に満たす整数値が 3 つ以下であるように  $a$  の値の範囲を定めよ。

① **3-C-4**

$0 \leq x \leq 2$  における関数  $f(x) = -x^2 + 4|x-a| + 1$  の最小値を  $g(a)$  とする。

- (1)  $g(a)$  を求めよ。
- (2)  $g(a)$  の最小値を求めよ。



## 第4章 三角比

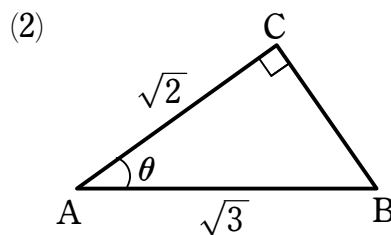
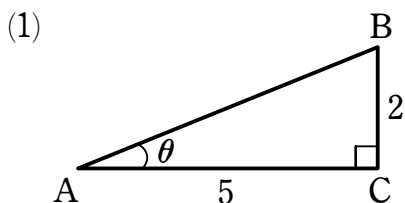
### 《学習項目》

- ・ 三角比の定義
- ・ 鋭角  $\Rightarrow$  鈍角 (三角形  $\Rightarrow$  円)
- ・ 相互関係
- ・ 正弦定理
- ・ 余弦定理
- ・ 三角形の面積公式
- ・ 三角形の内接円半径公式
- ・ 中線定理
- ・ 内角の二等分線の性質
- ・ 鋭角鈍角の判定
- ・ 三角形の成立条件
- ・ 三角形の形状決定問題

### A 問題

#### ① 4-A-1

下の図において、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  の値を、それぞれ求めよ。



#### ① 4-A-2

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

(1)  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

(2)  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)  $\tan \theta = 1$

#### ① 4-A-3

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  のうちの1つが次のように与えられたとき、他の2つの値を求めよ。

(1)  $\cos \theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$

(2)  $\tan \theta = -\frac{\sqrt{15}}{3}$

① **4-A-4**

$\triangle ABC$  において、外接円の半径を  $R$  とする。次のものを求めよ。

- (1)  $b=10$ ,  $A=105^\circ$ ,  $C=30^\circ$  のとき  $B$ ,  $c$ ,  $R$
- (2)  $b=\sqrt{6}$ ,  $R=\sqrt{2}$  のとき  $B$

① **4-A-5**

- (1)  $\triangle ABC$  において、 $a=2\sqrt{2}$ ,  $b=3$ ,  $C=135^\circ$  のとき  $c$  を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  において、 $a=13$ ,  $b=7$ ,  $c=15$  のとき  $A$  を求めよ。

① **4-A-6**

$\triangle ABC$  において、 $a=8$ ,  $b=3$ ,  $c=7$  のとき、次のものを求めよ。

- (1)  $\cos A$  の値
- (2)  $\triangle ABC$  の面積  $S$
- (3)  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$
- (4)  $\triangle ABC$  の外接円の半径  $R$



**B 問題**

① **4-B-1**

$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$  のとき,  $\cos A:\cos B:\cos C$  を求めよ。

① **4-B-2**

$\sin A:\sin B:\sin C=15:13:4$  のとき,  $\tan A$  の値を求めよ。●中部大●

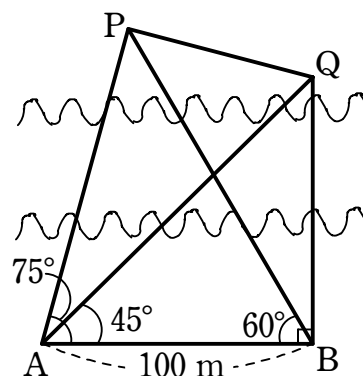
① **4-B-3**

右の図のように, 100 m 離れた 2 地点 A, B から川を隔てた対岸の 2 地点 P, Q を観測して, 次の値を得た。

$\angle PAB=75^\circ$ ,  $\angle QAB=45^\circ$ ,  $\angle PBA=60^\circ$ ,  
 $\angle QBA=90^\circ$

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) A, P 間の距離を求めよ。
- (2) P, Q 間の距離を求めよ。



① **4-B-4**

$\triangle ABC$  において,  $AB=5$ ,  $BC=7$ ,  $CA=3$  とする。

- (1)  $\angle A$  の大きさを求めよ。 (2)  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。
- (3)  $\angle A$  の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき, AD の長さを求めよ。

①4-B-5

$\triangle ABC$ において、 $a=8$ ,  $b=4$ ,  $c=6$ とする。線分  $BC$  の中点を  $M$ , 線分  $BM$  の中点を  $D$  とするとき,

- (1)  $AM$  の長さを求めよ。
- (2)  $AD$  の長さを求めよ。

①4-B-6

次の等式が成り立つとき、 $\triangle ABC$  はどのような形状か。

- (1)  $\sin A = 2\cos B \sin C$
- (2)\*  $a\cos B - b\cos A = c$
- (3)\*  $\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$
- (4)  $b\sin^2 A + a\cos^2 B = a$

①4-B-7

円に内接する四角形  $ABCD$  の4辺の長さが  $AB=4$ ,  $BC=4$ ,  $CD=6$ ,  $DA=10$  であるとき,

- (1)  $\angle ADC = \theta$  とするとき、 $\cos \theta$  の値と  $AC$  の長さを求めよ。
- (2) 四角形  $ABCD$  が内接している円の半径と四角形  $ABCD$  の面積を求めよ。

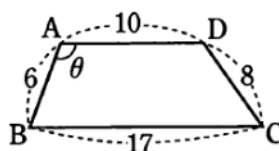
**C** 問題

①**4-C-1**

- (1)  $\triangle ABC$  において、 $A=60^\circ$  のとき、 $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{c+a}$  の値を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  において、 $A=60^\circ$ 、 $a = \frac{\sqrt{6}}{2}c$  のとき、 $\sin B$  と  $\sin C$  の値を求めよ。

①**4-C-2**

右図のように  $AD \parallel BC$  である台形  $ABCD$  がある。辺の長さは  $AB=6$ 、 $BC=17$ 、 $CD=8$ 、 $DA=10$  である。 $\angle DAB = \theta$  とするとき、次の問いに答えよ。



- (1)  $\cos \theta$  を求めよ。
- (2) 対角線  $BD$  の長さを求めよ。
- (3) 台形  $ABCD$  の面積を求めよ。

①**4-C-3**

円に内接する四角形  $ABCD$  において、 $AB=1$ 、 $BC=2$ 、 $CD=3$ 、 $DA=4$  とする。

- (1)  $BD$  の長さと、 $\cos \angle BAD$  の値を求めよ。
- (2) 四角形  $ABCD$  の面積  $S$  を求めよ。
- (3)  $AC$  と  $BD$  の交点を  $P$  とするとき、 $AC:BD$ 、 $BP:PD$ 、 $AP:PC$  を求めよ。
- (4) 4 つの三角形の面積比  $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCD : \triangle PDA$  を求めよ。

①4-C-4

三角形 ABC において、 $AB=2$ 、 $AC=1$  とする。 $\angle A$  の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし、 $\angle PAC=\theta$  とする。

(1) AP を  $\theta$  を用いて表せ。 (2)  $AP=BP$  のとき、 $\theta$  の値を求めよ。

①4-C-5

三角形 ABC において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような三角形か。

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc\left(\frac{1}{2} + \cos A\right) + ca\left(\frac{1}{2} + \cos B\right) + ab\left(\frac{1}{2} + \cos C\right)$$

①4-C-6

の長さがそれぞれ  $AB=10$ 、 $BC=6$ 、 $AC=8$  の  $\triangle ABC$  がある。辺 AB 上に点 P、辺 AC 上に点 Q を、 $\triangle APQ$  の面積が  $\triangle ABC$  の面積の  $\frac{1}{2}$  になるようにとる。

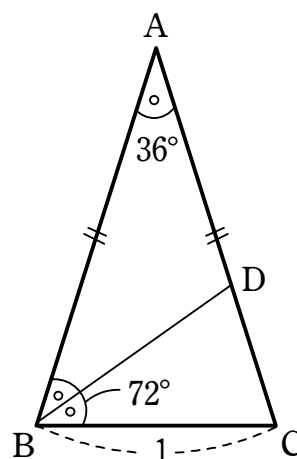
(1) 2 辺の長さの和  $AP+AQ$  を  $u$  とおく。 $\triangle APQ$  の周の長さ  $l$  を  $u$  を用いて表せ。

(2)  $l$  が最小となるときの AP、AQ、 $l$  の値を求めよ。

①4-C-7

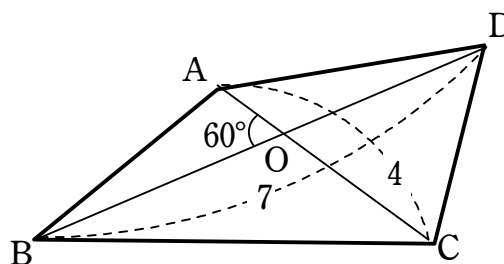
右の図の  $\triangle ABC$  において、次のものを求めよ。

- (1) 辺  $AB$  の長さ
- (2)  $\sin 18^\circ$  の値
- (3)  $\cos 36^\circ$  の値



①4-C-8

四角形  $ABCD$  の2つの対角線  $AC$ ,  $BD$  の交点を  $O$  とする。 $AC=4$ ,  $BD=7$ ,  $\angle AOB=60^\circ$  であるとき、四角形  $ABCD$  の面積  $S$  を求めよ。



①4-C-9

正方形  $ABCD$  を底面にもち、すべての辺の長さが2である四角錐  $EABCD$  がある。辺  $EA$  上に点  $P$ , 辺  $EB$  上に点  $Q$  を  $EP=EQ$  が満たされるようにとる。  $P$  および  $Q$  から底面  $ABCD$  に下ろした垂線の足をそれぞれ  $P'$  および  $Q'$  とし、正方形  $ABCD$  の2本の対角線の交点を  $O$  とする。

- (1)  $\angle PAO$  の大きさを求めよ。
- (2) 四角形  $PP'Q'Q$  の面積は、 $EP = \boxed{\text{ア}}$  のとき最大値  $\boxed{\text{イ}}$  をとる。
- (3) (2)の場合、 $\cos \angle POQ$  を求めよ。

①4-C-10

三角錐 ABCD が  $\triangle BCD$  を底面にして、机の上に置かれている。辺の長さをそれぞれ

$$AB=1, AC=\sqrt{2}, AD=\sqrt{5}, BC=\sqrt{3},$$

$$BD=\sqrt{6}, CD=3$$

とする。

- (1) 三角錐 ABCD の体積を求めよ。
- (2) 三角錐 ABCD を、辺 CD を軸として、頂点 A が机につくまで回転させるとき、三角錐が通過する部分の体積を求めよ。

## 第5章 数え上げの基礎

### 《学習項目》

・数え上げ, 算数っぽい問題

### A 問題

#### ①5-A-1

200 から 300 までの整数のうちで, 3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数の個数を求めよ。

#### ①5-A-2

7 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 から, 異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作るとき, 次のような数は何個できるか。

- (1) 3 桁の整数
- (2) 偶数

#### ①5-A-3

A, B, C, D, E, F の 6 文字を全部使ってできる文字列を, アルファベット順の辞書式に並べる。

- (1) CDABEF は何番目にあるか
- (2) 339 番目の文字列は何か。

**B** 問題

①**5-B-1**

ある大学の入学者のうち、他の a 大学, b 大学, c 大学を受験したものの集合を, それぞれ  $A, B, C$  で表すと, 次の通りであった。

$$n(A) = 65, n(B) = 40, n(A \cap B) = 14, n(A \cap C) = 11$$

$$n(A \cup C) = 78, n(B \cup C) = 55, n(A \cup B \cup C) = 99$$

- (1) c 大学を受験したものは何人か。
- (2) a 大学, b 大学, c 大学のすべてを受験した者は何人か。
- (3) a 大学, b 大学, c 大学のどれか 1 大学のみを受験した者は何人か。

①**5-B-2**

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作る。

- (1) 全部で何個の 3 桁の整数ができるか。
- (2) 9 の倍数は何個できるか。また, 4 の倍数は何個できるか。



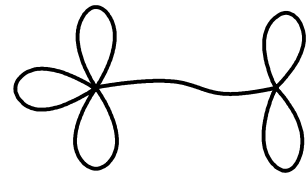
**C** 問題

① **5-C-1**

$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 150$  の末尾に続く 0 の個数を求めよ。

① **5-C-2**

右の図において、これを一筆書きする仕方の総数を求めよ。



① **5-C-3**

50 人のクラスで、兄弟のいる人は 33 人、姉妹のいる人は 27 人であった。

- (1) 一人っ子の人数の範囲を求めよ。(何人以上何人以下などと答える)
- (2) 兄弟だけいる人の人数の範囲を求めよ。
- (3) 姉妹だけいる人の人数の範囲を求めよ。

① **5-C-4**

500 以下の自然数を全体集合とし、 $A$  を 8 の倍数の集合、 $B$  を 12 の倍数の集合、 $C$  を 15 の倍数の集合とする。次の集合の個数を求めよ。

- (1) 8 または 15 の倍数の集合
- (2) 8 でも 15 でも割り切れない数の集合
- (3) 8 または 12 または 15 の倍数の集合
- (4)  $(A \cup C) \cap B$

①**5-C-5**

1. 2, 3, 5, 6, 8, 9 の 7 個の数字がある。

- (1) この中の 2 個を並べてできる 2 桁の整数は全部で何個あるか。
- (2) この中の 2 個を並べてできる 2 桁の整数の総和を求めよ。

①**5-C-6**

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 を使ってできる 3 桁の整数のうち, 次のような整数は何個あるか。ただし, 同じ数字は 2 度以上使わないとする。

- (1) 偶数
- (2) 3 の倍数

①**5-C-7**

次の場合, 硬貨の一部または全部を使って, 支払うことができる金額は何通りあるか。

- (1) 10 円硬貨 4 枚, 50 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 3 枚
- (2) 10 円硬貨 2 枚, 50 円硬貨 3 枚, 100 円硬貨 3 枚
- (3) 10 円硬貨 7 枚, 50 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 3 枚

## 第6章 場合の数

### 《学習項目》

- ・ その道具
  - ① 並べる道具  $n!$
  - ② 選ぶ道具  $n k C$
- ・ 道具の運用
  - ・ 流れ作業はかけざん
  - ・ 場合分けはたしざん
  - ・ 場合分けがメンドウなとき, ( $\sim$ でないとき) を考えて全体からひきざん
  - ・ 区別のできない同じものを数えるときは, その個数の階乗でわりざん。
    - ※ 場合わけでは, モレ・ダブリが発生しないように注意することが大切。

運用の例  $\sim$  公式化しているもの

- ・ 円順列  $\Rightarrow$  固定がポイント
- ・ ネットレス順列  $\Rightarrow$  円順列  $\div 2$
- ・ 重複順列  $\Rightarrow$  流れ作業 = かけざん がわかっているならば公式不要
- ・ 重複組み合わせ
- ・ 異なる種類のものから, 重複を許して 個選ぶ選び方は, 通り
- ・ 組分け問題
- ・ 順番キープ問題
- ・ 最短経路問題

### A 問題

#### ①6-A-1

- (1) 4種類の記号○, △, □, ×から重複を許して合計5個を取って1列に並べるとき, 並べ方は何通りあるか。
- (2) 4人が1回じゃんけんをするとき, 手の出し方は全部で何通りあるか。

#### ①6-A-2

次の総数を求めよ。

- (1) 7個の文字  $a, a, a, b, b, c, c$  の全部を1列に並べるときの並べ方
- (2) 8個の数字  $1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3$  の全部を使ってできる8けたの数
- (3) AKASAKA の7文字をすべて使ってできる文字列

#### ①6-A-3

男子5人, 女子3人が1列に並ぶとき, 次のような並び方は何通りあるか。

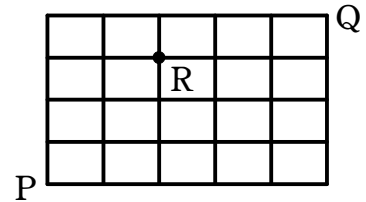
- (1) 女子3人が続いて並ぶ。
- (2) 両端が男子である。

①**6-A-4**

- (1) 7人が円卓に着席する方法は何通りあるか。
- (2) 異なる6個の玉を用いて作る首飾りは何通りできるか。

①**6-A-5**

右の図のような道がある。遠回りをしない道順で、次のような道順は何通りあるか。



- (1) PからQへ行く。
- (2) PからRを通ってQへ行く。
- (3) PからRを通らないでQへ行く。

①**6-A-6**

男子10人、女子5人の中から選ぶとき、次の選び方は何通りあるか。

- (1) 男子4人、女子3人を選ぶ。
- (2) 特定の2人を含むように7人選ぶ。
- (3) 3人を選ぶのに、女子から少なくとも1人を選ぶ。

①**6-A-7**

柿、りんご、みかん、キウイの4種類の果物の中から10個の果物を買う。次のような買い方は何通りあるか。

- (1) 買わない果物があってもよい。
- (2) どの果物も1個は買う。

①**6-A-8**

medicineの文字をすべて使って横1列に並べるとき、次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) mがdより左側にある。
- (2) m, d, c, nがこの順に並ぶ。

## B 問題

### ①6-B-1

男子 3 人, 女子 4 人が一列に並ぶとき, 次のような並び方は何通りあるか。

- (1) 男子 3 人が隣り合う (2) 男子どうしが隣り合わない。

### ①6-B-2

STUDENTS の 8 文字を一列に並べるとき, 次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) すべての並べ方。 (2) 同じ文字が隣り合わない並べ方。

### ①6-B-3

9 人の生徒を次のようにグループ分けする。分け方はそれぞれ何通りあるか。

- (1) 2 人, 3 人, 4 人の 3 つの組  
 (2) 3 人ずつ A, B, C の 3 つの組  
 (3) 3 人ずつ 3 つの組

### ①6-B-4

2 人の先生と 6 人の生徒が円卓に座るとき,

- (1) 先生どうしが向かい合う座り方は何通りあるか。  
 (2) 先生どうしが向かい合い, 特定の生徒 2 人も向かい合う座り方は何通りあるか。  
 (3) 先生の上に生徒が 1 人座る座り方は何通りあるか。  
 (4) この 8 人の性別が男子 4 人, 女子 4 人のとき, 男女が交互に座る座り方は何通りあるか。

### ①6-B-5

青玉 4 個, 白球 3 個, 黒玉 1 個がある。

- (1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか。  
 (2) これらの玉にひもを通して輪を作る方法は何通りあるか。

①**6-B-6**

6色のペンキと立方体がある。この立方体の各面を次のようにペンキで塗り分けるのに何通りの方法があるか。ただし、隣り合う面は異なる色で塗るとし、また、回転して同じ色の配置になるものは1通りとして数えることにする。

- (1) 6色で塗り分ける。 (2) 5色で塗り分ける。 (3) 4色で塗り分ける。

①**6-B-7**

正十二角形の3頂点を結んでできる三角形について、正十二角形と辺を共有しないものは全部で何個できるか。

①**6-B-8**

- (1)  $x+y+z=10$  を満たす0以上の整数解は何組あるか。

(2)  $x+y+z=10$  を満たす正の整数解は何組あるか。

(3)  $5 \leq x+y+z \leq 8$  を満たす正の整数解は何組あるか。

①**6-B-9**

6人の人を3つの部屋に分けたい。どの部屋にも少なくとも1人は入るものとして、分ける方法は何通りあるか。次の(1)~(3)のそれぞれの場合について答えよ。

- (1) 人も部屋も区別しないで、人数の分け方だけ考えた場合  
 (2) 人は区別しないが、部屋は区別して考えた場合  
 (3) 人も部屋も区別して考えた場合

①**6-B-10**

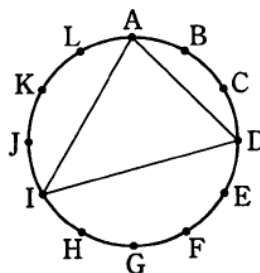
1から10までの自然数の各数字を1つずつ記入した10枚のカードがある。これらをA, B, Cの3つの箱に分けて入れる。

- (1) 空の箱があってもよいものとする、分け方は何通りあるか。  
 (2) 空の箱があってはならないとする、分け方は何通りあるか。

**C 問題**

①**6-C-1**

右図のように円周を12等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる3点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形が得られる。



- (1) 正三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

①**6-C-2**

平面上に11個の相異なる点がある。このとき2点ずつを結んでできる直線が全部で48本であるとする。

- (1) 与えられた11個の点のうち3個以上の点を含む直線は何本であるか。また, そのそれぞれの直線上に何個の点が並ぶか。
- (2) 与えられた11個の点から3点を選び三角形を作ると, 全部で何個できるか。

①**6-C-3**

次の条件を満たす4桁の正の整数  $d_4d_3d_2d_1$  の個数をそれぞれの場合について求めよ。

- (1)  $9 \geq d_4 > d_3 > d_2 > d_1 \geq 0$
- (2)  $9 \geq d_4 \geq d_3 \geq d_2 \geq d_1 \geq 0$

①6-C-4

次の問いに答えよ。ただし、同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいものとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別できる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか。
- (2) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を、区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか。

①6-C-5

7 個横に並んでいる正方形のすべてを下図のように白または黒に塗る。

- (1) 異なる塗り方は何通りあるか。
- (2) 図 2 のように、黒が 5 個以上連続する部分がある塗り方は何通りあるか。
- (3) 図 3 のように、黒が 4 個連続する部分があって、5 個以上連続しない塗り方は何通りあるか。
- (4) 黒が 3 個連続する部分があって、4 個以上連続しない塗り方は何通りあるか。





## 補充問題

### ①6-C-6

- (1)  $x + y + z = 15$  の正の整数解は何通りあるか。
- (2) (1)のうちで  $x = y$  となる解は何通りあるか。
- (3) (1)のうちで  $x > y$  となる解は何通りあるか。

### ①6-C-7

10 段の階段を登るとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての階段を1段上がり(途中の階段をジャンプしないで1段ずつ登ること)で登るとき、登り方は何通りあるか。
- (2) 1回だけ2段上がり(1段をジャンプする登り方)を行い、残りの階段を1段上がりするときの登り方は何通りあるか。
- (3) 少なくとも1回は2段上りをするとき、登り方は何通りあるか。
- (4) 最大3段上がり(2段をジャンプする登り方)まで許すとき、可能な登り方の総数は何通りあるか。

### ①6-C-8

1 から  $n$  までの番号を1列に並べたとき、左から  $k$  番目の番号が  $k$  でないような並べ方の総数を  $f(n)$  で表す。

- (1)  $f(3)$ ,  $f(4)$  を求めよ。
- (2)  $f(5)$  を求めよ。



## 第7章 確率

### 《学習項目》

- ・ 確率の定義  $\text{確率} = \frac{\text{条件を満たす場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$
- ・ 確率では、区別のないものも「区別して」数えなければならない。
- ・ 確率では、全体の場合の数と、条件を満たす場合の数の数え方を統一しなければならない。
- ・ 確率の問題は、できるだけ場合の数で解く方がよい。
- ・ 確率では、起こりうるすべての事象を把握しなければならない。
- ・ 復元抽出（さいころ型）、非復元抽出（くじびき型）の区別に注意
- ・ 「途中で終了」する問題も、最後までやり遂げる（オープン参加問題）

特殊な確率の求め方のチェックシート

- ・ 反復試行の確率（ $n$  回中  $k$  回）
- ・ じゃんけん
- ・ くりぬき確率（最大値の確率）
- ・ トーナメント

### A 問題

#### ①7-A-1

赤玉 6 個と白玉 5 個が入った袋から、同時に 4 個の玉を取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 個は白玉が出る確率
- (2) 赤玉が 2 個以上出る確率
- (3) 4 個とも同じ色である確率
- (4) 赤玉も白玉も少なくとも 1 個は出る確率

#### ①7-A-2

当たる確率が  $\frac{1}{7}$  であるくじを 3 回引くとき、ちょうど 2 回当たる確率を求めよ。ただし、引いたくじは 1 回ごとにもとに戻す。

①**7-A-3**

3個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 出る目の最大値が4以下である確率
- (2) 出る目の最大値が4である確率

①**7-A-4**

5人がじゃんけんを1回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1人だけが勝つ確率
- (2) 2人が勝つ確率
- (3) あいこになる確率

①**7-A-5**

血液型がA型、B型のどちらかである100人を調べたところ、男子60人、女子40人で、そのうちA型の人には男子36人、女子25人である。次の確率を求めよ。

- (1) この中から選ばれた1人が女子のとき、その人がA型である確率
- (2) この中から選ばれた1人がB型のとき、その人が男子である確率

①**7-A-6** (数学Bの選択分野)

1から9までの整数が1つずつ書かれたカードが9枚ある。この中から7枚のカードを取り出して得られる7つの整数のうち最大のものを $X$ とする。

- (1)  $X$ が8である確率 $P(X=8)$ を求めよ。
- (2)  $X$ の期待値 $E(X)$ を求めよ。

**B 問題**

① **7-B-1**

白球 7 個, 黒球 3 個の入った箱から 6 球を同時に取り出したとき, 白球の個数が黒球の個数より多い確率を求めよ。

① **7-B-2**

A が 1 つのさいころを投げて出た目を  $x$  とし, B が 2 つのさいころを投げて出た目の和を  $y$  とする。このとき,  $2x > y$  となる確率を求めよ。

① **7-B-3**

袋の中に白球, 赤球, 黒球が 1 個ずつ入っている。袋から無作為に球を 1 個取り出し, 白球なら A の勝ち, 黒球なら B の勝ち, 赤球なら引き分けとする。取り出した球をもとに戻し, このゲームを繰り返す。A, B のうち, 先に 3 回ゲームに勝った方を優勝とする。

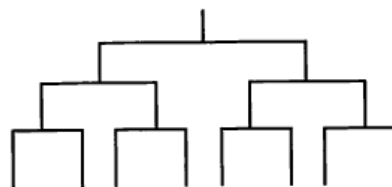
- (1) 5 回目のゲームで A の優勝が決定する確率を求めよ。
- (2) 6 回目のゲームで A の優勝が決定する確率を求めよ。
- (3) 引き分けが 1 回も起こらずに A の優勝が決定する確率を求めよ。

① **7-B-4**

金の硬貨 10 枚と銀の硬貨 20 枚が入った袋がある。この袋から硬貨を 13 枚同時に取り出すとき, その中に金の硬貨が  $n$  枚含まれる確率を  $P_n$  とする。このとき,  $P_n$  が最大となる  $n$  の値を求めよ。

① **7-B-5**

同等の技能をもった 8 人がトーナメント形式で優勝を争うことになった。抽選で右図のように対戦相手を決めるものとする。このトーナメント戦に参加した特定の 2 人を甲, 乙とするととき, 次の確率を求めよ。



- (1) 甲, 乙が 1 回戦で対戦する確率
- (2) 甲, 乙が 2 回戦で対戦する確率
- (3) 甲, 乙がこのトーナメント戦で対戦する確率

①7-B-6

独立な事象  $A, B$  に対し,  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ,  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{5}{6}$  のとき,  
 $P(A)$  と  $P(B)$  を求めよ。ただし  $P(A) > P(B)$  とする。

①7-B-7

A の箱には赤玉 2 個, 白玉 3 個が入っている。B の箱には赤玉 3 個, 白玉 3 個が入っている。C の箱には赤玉 4 個, 白玉 3 個が入っている。無作為に 1 箱選んで 1 個の玉を取り出したところ赤玉であった。選んだ箱が A の箱であった確率を求めよ。

①7-B-8

箱の中に 1 番から  $N$  番までの番号札が 1 枚ずつ合計  $N$  枚入っている。  
 この箱から同時に 4 枚の番号札を取り出す。この 4 枚の札の中で, 最小の  
 番号が 3 である確率を  $P_N$  とする。ただし,  $N \geq 6$  とする。

- (1)  $P_N$  を求めよ。
- (2)  $P_N < P_{N+1}$  となる  $N$  をすべて求めよ。
- (3)  $P_N$  を最大にする  $N$  とその最大値を求めよ。

①7-B-9

1 つのさいころを  $n$  回投げる試行において, 出た目がすべて奇数で,  
 かつ 1 の目がちょうど  $k$  回 ( $0 \leq k \leq n$ ) 出る確率を  $p_k$  とする。

- (1)  $n=3$  のとき,  $p_1$  を求めよ。
- (2)  $p_k$  を  $n$  と  $k$  の式で表せ。
- (3) 出た目がすべて奇数で, かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率  $q$  を  
 求めよ。

**C 問題**

①**7-C-1**

1つのさいころを  $n$  回投げ、出た  $n$  個の目の積を  $A_n$  とする。このとき、

- (1)  $A_n=6$  になる確率を求めよ。 (2)  $A_n=12$  になる確率を求めよ。

①**7-C-2**

$n$  を 6 以上の自然数とする。1, 2, …,  $n$  から、異なる 6 つの数を無作為に選び、それらを小さい順に並びかえたものを、 $X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5 < X_6$  とする。

- (1)  $X_3=5$  となる確率  $p_n$  を求めよ。  
 (2)  $p_n$  を最大にする自然数  $n$  を求めよ。

①**7-C-3**

H 大学には 4 つの食堂があり、A 君と B さんは、それぞれ毎日正午に、前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日、2 人は別々の食堂で食事をしたとして、次の確率を求めよ。

- (1)  $n$  日後に、初めて 2 人が食堂で出会う確率。ただし、 $n \geq 1$  とする。  
 (2)  $n$  日後に、2 人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし、 $n \geq 2$  とする。

①**7-C-4**

白球 9 個、赤球 3 個の計 12 個の球の入った袋がある。いま、この袋から 1 個ずつ順に 3 回球を取り出したとき、次の確率を求めよ。ただし、取り出した球はもとに戻さないものとする。

- (1) 3 回目に取り出した球が白である確率  
 (2) 3 回目に取り出した球が白であるときに、1 回目に取り出した球も白であった確率

①**7-C-5**

5回に1回の割合で帽子を忘れるくせのあるK君が、正月にA, B, C3軒を順に年始回りをして家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気が付いた。2番目の家Bに忘れてきた確率を求めよ。

①7-C-6

正四面体 ABCD の辺上を動くアリは、1つの頂点を訪れた1秒後に他の頂点のいずれかを、おのおの確率  $\frac{1}{3}$  で訪れる。最初に頂点 A にいるアリをその  $n$  秒後まで観察する。最初にいる頂点 A は、訪れた頂点として考え、次の問いに答えよ。

- (1) 頂点 A, B は訪れているが、頂点 C, D は訪れていない確率  $p_n$  を求めよ。
- (2) 頂点 A, B, C は訪れているが、頂点 D は訪れていない確率  $q_n$  を求めよ。
- (3) 全頂点を訪れている確率  $r_n$  を求めよ。



## 第8章 整数問題

### 《学習項目》

- ・ 整数の整除 (あまりのあるわりざん)
- ・ 約数倍数
- ・ 素数と素因数分解
- ・ 公約数と公倍数, 最大公約数と最小公倍数  
 正の整数  $a, b$  の最大公約数を  $G$ , 最小公倍数を  $L$  とすると,  
 $a = a_1 G, b = b_1 G, L = a_1 b_1 G$   
 と表せる。このことより,  
 $ab = GL$
- ・ 互いに素
- ・ 整数の「余りによる類別」
- ・ 整数問題
  - (1) 整数  $\times$  整数 = 整数
  - (2) 一文字整理
  - (3) 余りによる類別
  - (4) 範囲を絞り込む
- ・ 合同式  
 $a \equiv c \pmod{m}, b \equiv d \pmod{m}$  のとき  
 $a + b \equiv c + d \pmod{m}$   
 $a - b \equiv c - d \pmod{m}$   
 $a \equiv c \pmod{m}, b \equiv d \pmod{m}$  のとき  
 $ab \equiv cd \pmod{m} \quad a^k \equiv c^k \pmod{m}$

### A 問題

#### ① 8-A-1

次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。(3) は最大公約数のみでよい。

- (1)  $2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$                       (2) 18, 252                      (3) 4984, 3471

#### ① 8-A-2

次の数の正の約数の和を求めよ。

- (1)  $3^7$                       (2)  $3^4 \cdot 7^3$                       (3) 864

#### ① 8-A-3

次の  $\square$  に当てはまる 0 以上の整数のうち, 最も小さいものを求めよ。

- (1)  $9 \equiv \square \pmod{3}$                       (2)  $13 \equiv \square \pmod{4}$                       (3)  $100 \equiv \square \pmod{15}$

**B** 問題

① **8-B-1**

等式  $4x+2y+z=15$  を満たす自然数  $x, y, z$  の組をすべて求めよ。

① **8-B-2**

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)  $30x+17y=2$                       (2)  $29x+42y=5$                       (3)  $46x-35y=4$

① **8-B-3**

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)  $xy-3x-y-1=0$                       (2)  $xy-4x+2y+1=0$

① **8-B-4**

$n$  は自然数とする。  $n^2-14n+40$  が素数となるような  $n$  をすべて求めよ。

① **8-B-5**

$x, y$  がともに整数のとき、次の方程式を満たす  $(x, y)$  を求めよ。

(1)  $x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$                       (2)  $x^2+xy+y-2=0$

① **8-B-6**

次の等式を満たす自然数  $x, y, z$  の組をすべて求めよ。

(1)  $2xyz=x+3y+4z$     ( $x < y < z$ )

(2)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$     ( $x \leq y \leq z$ )

(3)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$     ( $x \leq y \leq z$ )

①8-B-7

3桁の自然数  $N$  を 7 進法で表すと  $a0b$  となり, 5 進法で表すと逆の並び  $b0a$  になるという。  $a, b$  を求めよ。また,  $N$  を 10 進法で表せ。

①8-B-8

次のものを求めよ。

- (1)  $4^{200}$  を 5 で割った余り
- (2) 整数  $n$  を 7 で割った余りが 2 であるとき,  $n^{30}$  を 7 で割った余り
- (3)  $123^{120}$  の一の位
- (4)  $7^{251}$  の下 2 桁

①8-B-9

次のことを証明せよ。

- (1)  $n$  が 3 以上の奇数のとき,  $n^3 - n$  は 24 の倍数である。
- (2)  $m, n$  が異なる自然数のとき,  $m^3n - mn^3$  は 6 の倍数である。
- (3)  $n$  が整数のとき,  $n^9 - n^3$  は 9 で割り切れる。

**C** 問題

① **8-C-1**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  は,  $x = 1, -1, -2$  で整数値  $f(1) = r$ ,  $f(-1) = s$ ,  $f(-2) = t$  をとるものとする。

- (1)  $a, b, c$  をそれぞれ  $r, s, t$  の式で表せ。
- (2) すべての整数  $n$  について,  $f(n)$  は整数になることを示せ。

① **8-C-2**

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを  $m, n$  とし, 斜辺の長さを  $l$  とする。  $n$  が3以上の素数であり,  $m, l$  が自然数であるとき, この直角三角形の面積  $S$  を  $n$  だけで表し, その  $S$  が整数であることを示せ。

① **8-C-3**

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n$  で定まる数列  $\{a_n\}$  がある。  $a_n$  が偶数となる  $n$  を決定せよ。

① **8-C-4**

$\theta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を  $\tan \theta_n = \frac{1}{n}$  ( $-90^\circ < \theta_n < 90^\circ$ ) で定めるとき,  $\tan(\theta_2 + \theta_i + \theta_j) = 1$  を満たす組  $(i, j)$  で  $i \leq j$  であるものをすべて求めよ。

① **8-C-5**

(1)\* 自然数  $a, b, c$  が  $a < b < c$  かつ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$  を満たす。このような組  $(a, b, c)$  のうち,  $c$  の最も小さいものをすべて求めよ。

① **8-C-6**

$m$  を正の整数とする。  $m^3 + 3m^2 + 2m + 6$  はある正の整数の3乗である。  $m$  を求めよ。

## 第9章 平面図形（および空間図形）

### 《学習項目》

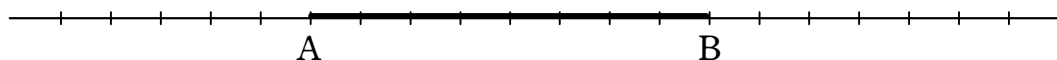
- ・ 三角形の成立条件（再）
- ・ 角の二等分線の性質
- ・ 三角形の重心・外心・内心・垂心
- ・ 正三角形の性質
  - ① 重心 = 外心 = 内心 = 垂心
  - ② 重心・外心・内心・垂心のいずれか2つが一致すれば正三角形
- ・ メネラウスの定理, 拡張メネラウスの定理
- ・ チェバの定理, 拡張チェバの定理
- ・ 円と接線
- ・ 2円の共通接線（共通内接線, 共通外接線）
- ・ 2つの円の位置関係
- ・ 円周角の定理, その逆
- ・ 円に内接する四角形の性質, その逆
- ・ 接弦定理, その逆
- ・ 方べきの定理, その逆
- ・ 方べきの定理の証明
  
- ・ 補助線の引き方

### A 問題

#### ①9-A-1

線分 AB について, 次の点を下の図にしろせ。

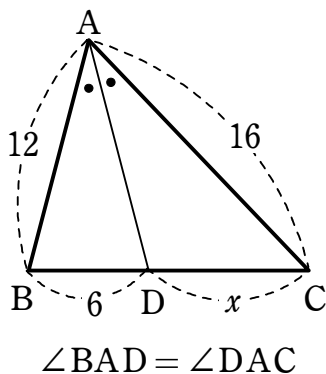
- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| (1) 3 : 1 に内分する点 P | (2) 3 : 1 に外分する点 Q |
| (3) 1 : 3 に内分する点 R | (4) 1 : 3 に外分する点 S |



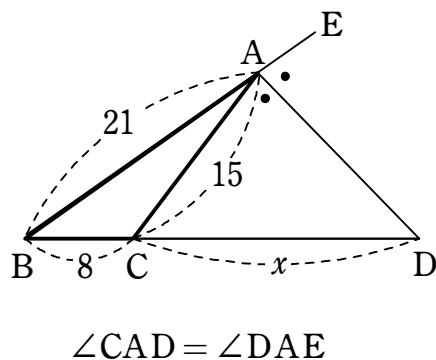
#### ①9-A-2

次の図において,  $x$  の値を求めよ。

(1)



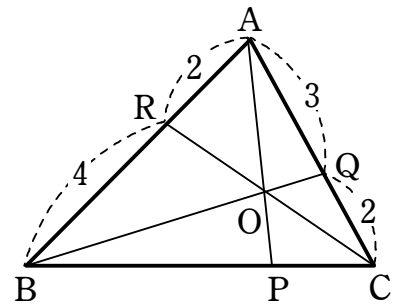
(2)



①9-A-3

右の図において、次の比を求めよ。

- (1)  $BP : PC$
- (2)  $AO : OP$



①9-A-4

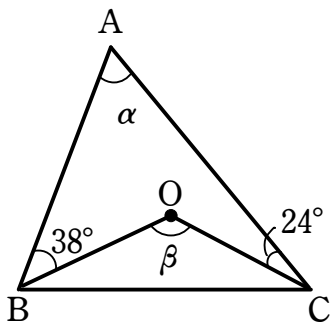
$\triangle ABC$  の内部に点  $O$  をとり、直線  $AO, BO, CO$  が  $BC, CA, AB$  と交わる点をそれぞれ  $D, E, F$  とするとき、 $AF : FB = 5 : 6$ ,  $BD : DC = 3 : 1$  である。

- (1)  $AE : EC$  を求めよ。
- (2) 直線  $EF$  と辺  $BC$  の延長との交点を  $G$  とするとき、 $BC : CG$  を求めよ。

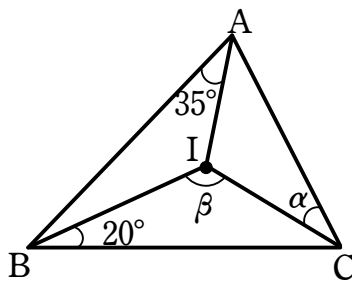
①9-A-5

$\triangle ABC$  の外心を  $O$ , 内心を  $I$  とする。次の図の  $\alpha, \beta$  の大きさを求めよ。

(1)

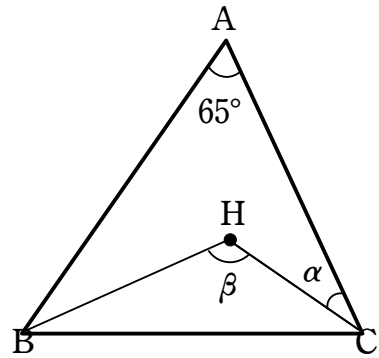


(2)



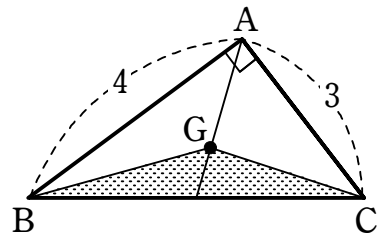
①9-A-6

右の図において、点Hは△ABCの垂心である。  
α, βを求めよ。



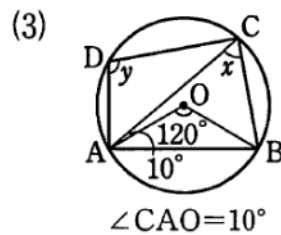
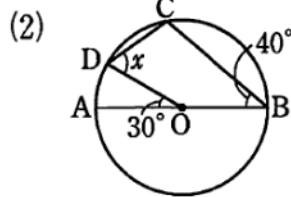
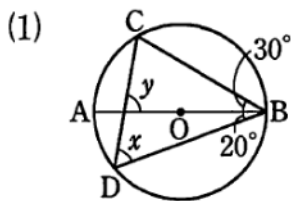
①9-A-7

∠A=90°, AB=4, AC=3である直角三角形ABCについて、その重心をGとすると、△GBCの面積を求めよ。



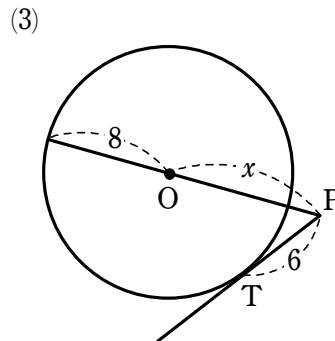
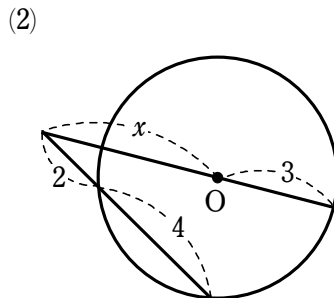
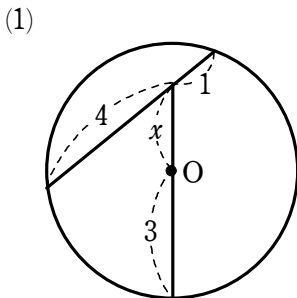
①9-A-8

次の各図で角x, yを求めよ。ただし、Oは円の中心とする。



①9-A-9

下の図において、xを求めよ。ただし、Oは円の中心、直線PTは円の接線で、Tは接点である。



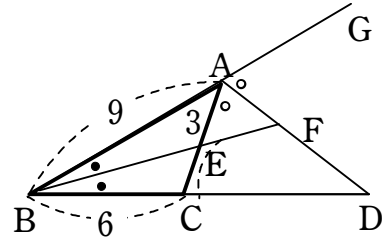
**B 問題**

①**9-B-1**

右の図において、

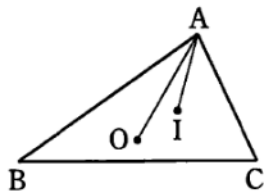
$$\angle ABF = \angle FBD, \quad \angle CAD = \angle DAG$$

のとき、 $EC$ ,  $CD$ ,  $AF:FD$  の値を求めよ。

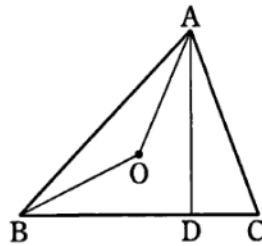


①**9-B-2**

(1) 下図の  $\triangle ABC$  で、 $\angle B = 35^\circ$ ,  $\angle C = 65^\circ$  である。 $\triangle ABC$  の内心を  $I$ , 外心を  $O$  とする。 $\angle IAO$  は何度か。



(2)  $\triangle ABC$  の外心を  $O$ ,  $A$  から  $BC$  へ引いた垂線を  $AD$ ,  $\angle CAD = 20^\circ$  とする。 $\angle ABO$  は何度か。



①**9-B-3**

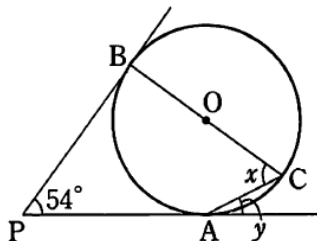
$\triangle ABC$  の辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  を同じ比  $2:3$  に内分する点を、それぞれ  $D$ ,  $E$ ,  $F$  とし、 $BE$  と  $CF$  の交点を  $P$ ,  $CF$  と  $AD$  の交点を  $Q$ ,  $AD$  と  $BE$  の交点を  $R$  とするとき、

- (1)  $AR:RD$  を求めよ。 (2)  $AQ:QR:RD$  を求めよ。

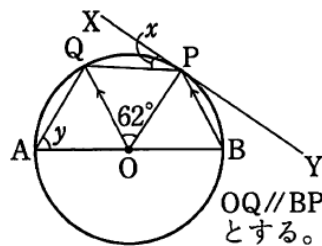
①**9-B-4**

次の各図で角  $x$ ,  $y$  を求めよ。 $O$  は円の中心とする。

(1)



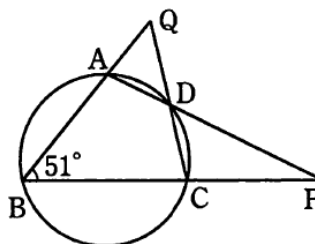
(2)





①9-B-5

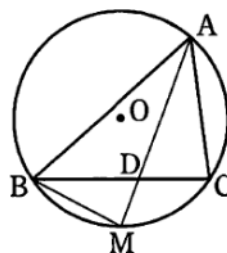
右の図で、四角形 ABCD は円に内接し、  
 $\angle B = 51^\circ$ 、 $\angle Q = 2\angle P$  のとき、 $\angle P$  の大きさを  
 求めよ。



①9-B-6

$AB=4.8$ 、 $BC=4$ 、 $CA=3.2$  の  $\triangle ABC$  が円  
 $O$  に内接している。 $\angle A$  の二等分線が  $BC$ 、 $\widehat{BC}$  と  
 交わる点をそれぞれ  $D$ 、 $M$  とする。

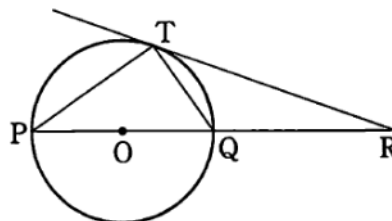
- (1)  $BD$  の長さを求めよ。
- (2)  $AD \cdot DM$  の値を求めよ。



①9-B-7

円  $O$  の直径  $PQ$  の  $Q$  を越えた延長上に  
 $PQ$  に等しく  $QR$  をとり、 $R$  から円  $O$  に1つ  
 の接線を引き、その接点を  $T$  とする。  
 $PQ=1$  cm として、次の各問いに答えよ。

- (1)  $RT$  の長さを求めよ。
- (2)  $PT:QT$  を求めよ。
- (3)  $PT$ 、 $QT$  の長さを求めよ。
- (4)  $\triangle PTR$  の面積を求めよ。



①9-B-8

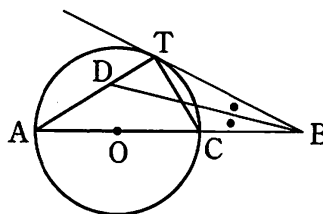
直円錐に半径1の球が内接している。

- (1) 直円錐の高さを  $h$ 、底面の半径を  $r$  とするとき、 $r$  を  $h$  で表せ。
- (2) このような直円錐の体積  $V$  の最小値を求めよ。

**C** 問題

①**9-C-1**

長さ1の線分  $AB$  上に  $A, B$  と異なる点  $C$  をとり、点  $A, C$  を直径の両端とする半径  $r$  の円  $O$  を描く。点  $B$  から円  $O$  へ接線を1本引き、その接点を  $T$  とする。 $\angle ABT$  の二等分線と線分  $AT$  との交点を  $D$  とする。



- (1)  $\angle BDT$  の大きさを求めよ。
- (2) 線分  $AT$  の長さを  $r$  で表せ。
- (3) 線分  $DT$  の長さを  $r$  で表せ。

①**9-C-2**

正四面体  $T$  と半径1の球面  $S$  とがあって、 $T$  の6つの辺がすべて  $S$  に接しているという。 $T$  の1辺の長さを求めよ。

①**9-C-3**

$xyz$  空間内に正三角形  $ABC$  があり、 $A, B, C$  から  $xy$  平面に下ろした垂線と  $xy$  平面との交点をそれぞれ  $A', B', C'$  とすると、 $A'B'=1$ ,  $B'C'=\sqrt{6}$ ,  $C'A'=3$  である。正三角形  $ABC$  の1辺の長さを求めよ。

①**9-C-4**

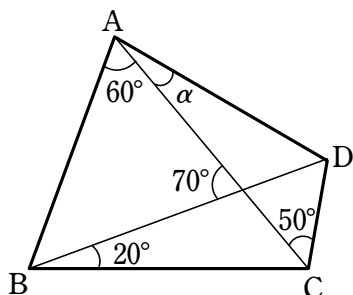
半径  $r$  の球面上に4点  $A, B, C, D$  がある。四面体  $ABCD$  の各辺の長さは、 $AB=\sqrt{3}$ ,  $AC=AD=BC=BD=CD=2$  を満たしている。このとき  $r$  の値を求めよ。

補充問題

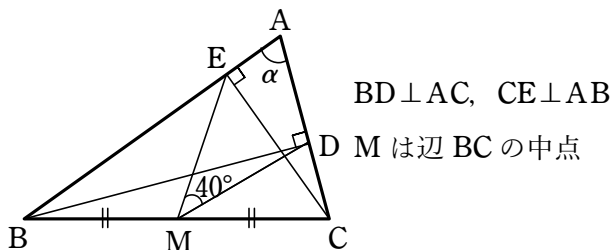
①9-C-5

下の図において、 $\alpha$ を求めよ。

(1)



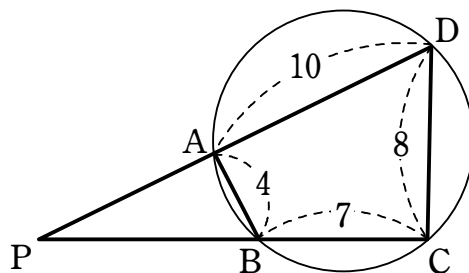
(2)



①9-C-6

右の図のように、円に内接する四角形 ABCD の辺 AD の延長と辺 BC の延長が円の外部の点 P で交わっている。

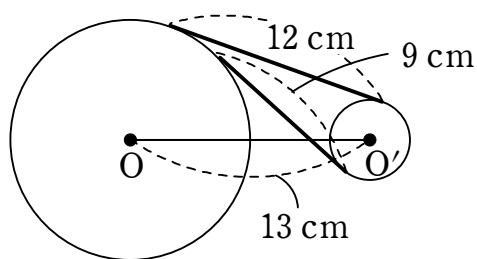
AB=4, BC=7, CD=8, DA=10 のとき、線分 PA, PB の長さを求めよ。



①9-C-7

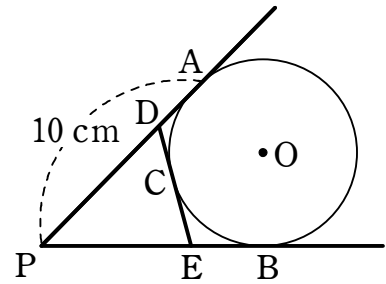
右の図のように、中心間の距離が 13 cm, 共通外接線の長さが 12 cm, 共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O, O' がある。

この 2 つの円の半径を、それぞれ求めよ。



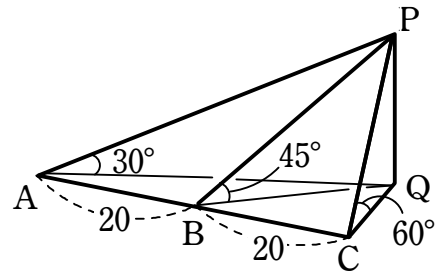
①9-C-8

右の図において、PA, PB, DE はそれぞれ A, B, C を接点とする円 O の接線である。AP=10 cm のとき、 $\triangle DPE$  の周囲の長さを求めよ。



①9-C-9

右の図のように、一直線上に並んだ3地点 A, B, C から塔 PQ の仰角を測ると、それぞれ  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  であった。また、 $AB=20$  m,  $BC=20$  m であった。塔 PQ の高さを求めよ。



## 第10章 二項定理

### 《学習項目》

- ・ P, C の定義, 性質
- ・ 二項定理, 多項定理

### A 問題

#### ①10-A-1

次の等式を証明せよ。

- (1)  ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_n C_r$
- (2)  $k \cdot {}_n C_k = n \cdot {}_{n-1} C_{k-1}$

#### ①10-A-2

$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^5$  の展開式において,  $x^4$  の係数を求めよ。

#### ①10-A-3

- (1)  $(a+2b-c)^6$  の展開式において,  $a^2b^2c^2$  の係数を求めよ。
- (2)  $\left(x^3 - 2x + \frac{2}{x}\right)^5$  の展開式において,  $x^3$  の係数を求めよ。

#### ①10-A-4

次の式を簡単にせよ。

- (1)  ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n$
- (2)  ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n$

## B 問題

### ①10-B-1

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$$

$$(2) \quad {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}$$

### ①10-B-2

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad 1 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n$$

$$(2) \quad \frac{{}_nC_0}{1} + \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{3} + \cdots + \frac{{}_nC_n}{n+1}$$

## C 問題

### ①10-C-1

$$(1) \quad \sum_{r=0}^n {}_nC_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \text{ を求めよ。}$$

(2)  $(1+x)^{2n}$  を展開したときの  $x^n$  の係数に着目して次の等式を証明せよ。

$${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + {}_nC_2^2 + \cdots + {}_nC_n^2 = {}_{2n}C_n$$

# 第11章 データの分析

## 《学習項目》

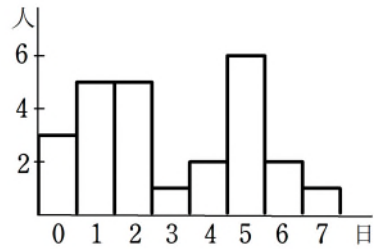
- ・代表値（平均値，最頻値，中央値，四分位数），範囲
- ・ヒストグラム，度数分布表（階級値），箱ひげ図
- ・分散，標準偏差，共分散，相関係数，散布図

### A 問題

#### ①11-A-1

右のヒストグラムは，ある高校の生徒 25 人について，この 1 週間における路線バスの利用日数を調査した結果である。

- (1) 利用日数の最頻値，中央値を求めよ。
- (2) 利用日数の平均値を求めよ。



#### ①11-A-2

右の表は，ある都市の 1 日の最低気温を 30 日間測定した結果の度数分布表である。

- (1) データの最頻値を求めよ。
- (2) この表から階級値を用いて，データの平均値を求めよ。
- (3) 階級値を用いなくて平均値を求めると，データの平均値はどのような値の範囲に入るか。

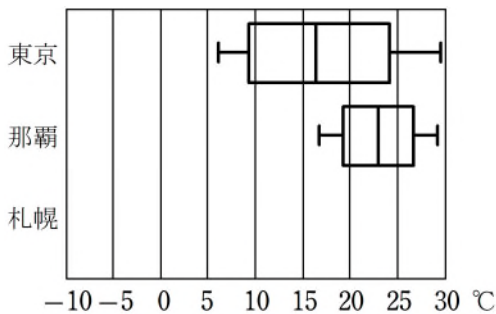
階級(°C)	度数
6 以上 8 未満	7
8 ~ 10	9
10 ~ 12	7
12 ~ 14	6
14 ~ 16	1
計	30

#### ①11-A-3

次のデータは，2010 年度の札幌における月ごとの平均気温を，気温の低い順に並べたものである。（単位は °C）

-3.2 -2.0 -0.1 0.6 5.5 5.9 12.2 12.2 19.2 20.0 22.1 24.8

このデータの箱ひげ図を，下の東京と那覇の箱ひげ図と並べてかき，3つの都市のデータの分布を比較せよ。



①11-A-4

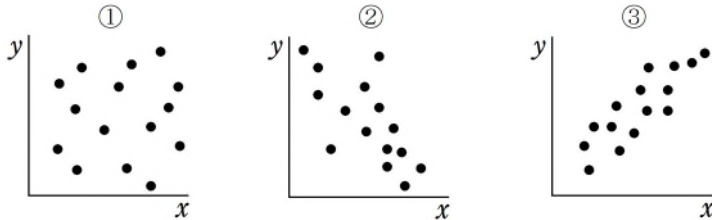
次の変数  $x$ ,  $y$  のデータは、ある飲料メーカーが新商品として売り出す予定の 2 つの飲料  $X$ ,  $Y$  について、それぞれ 8 人のモニターに 15 点満点でおいしさを採点してもらった結果である (単位は点)。

- (1)  $x$ ,  $y$  のデータについて、平均値, 分散, 標準偏差をそれぞれ求めよ。
- (2)  $x$ ,  $y$  のデータについて、標準偏差によってデータの平均値からの散らばりの度合いを比較せよ。

$x$	10	12	7	6	13	10	7	15
$y$	3	10	11	2	8	15	9	6

①11-A-5

次の ①, ②, ③ は、ある 2 つの変数  $x$  と  $y$  のデータについての散布図である。データ ①, ②, ③ の  $x$  と  $y$  の相関係数は、0.87, 0.04, -0.71 のいずれかである。データ ①, ②, ③ の相関係数をそれぞれ答えよ。

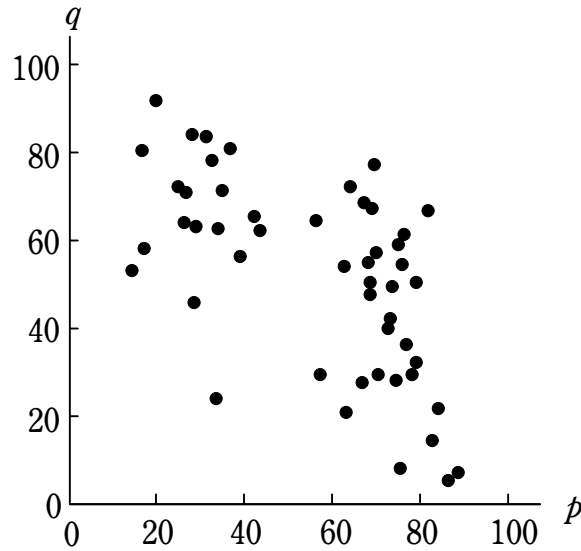




**B 問題**

①11-B-1

変量  $p$  と変量  $q$  を観測した資料に対して、相関図(散布図)を作ったところ、次のようになった。ただし、相関図(散布図)中の点は、度数 1 を表す。



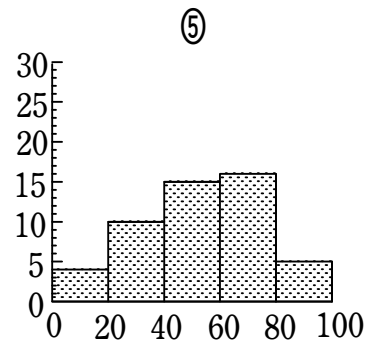
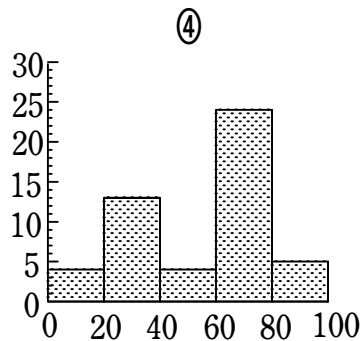
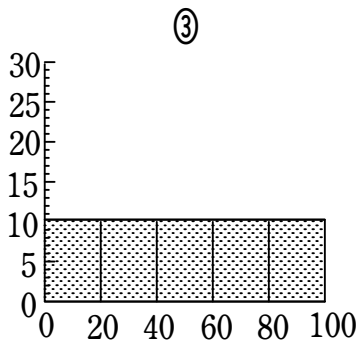
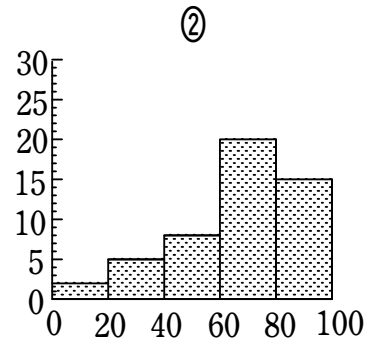
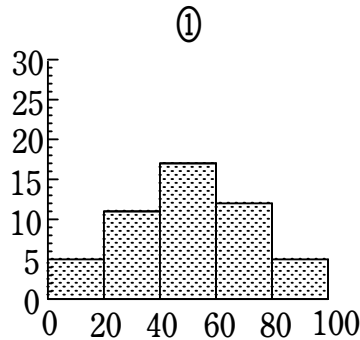
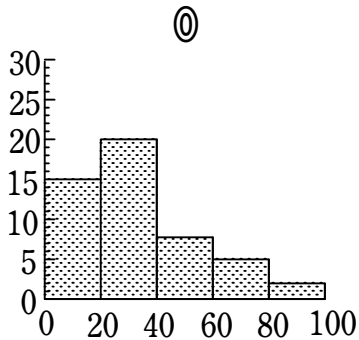
(1) 二つの変量  $p$  と  $q$  の相関係数に最も近い値はア  である。ア  に当てはまるものを、次の ㉠～㉦ のうちから一つ選べ。

- ㉠  $-1.5$       ㉡  $-0.9$       ㉢  $-0.6$       ㉣  $0.0$   
 ㉤  $0.6$       ㉥  $0.9$       ㉦  $1.5$

(2) 同じ資料に対して度数をまとめた相関表を作ったところ、次のようになった。例えば相関表中の 7 の 7 という数字は、変量  $p$  の値が 60 以上 80 未満で変量  $q$  の値が 20 以上 40 未満の度数が 7 であることを表している。

100	2	3	0	0	0	
80	0	7	3	5	1	
60	2	2	0	11	0	
40	0	1	1	7	1	
20	0	0	0	1	3	
0						
	0	20	40	60	80	100
	$p$					

このとき、変量  $p$  のヒストグラムは  $\text{イ}$   であり、変量  $q$  のヒストグラムは  $\text{ウ}$   である。 $\text{イ}$  ,  $\text{ウ}$   に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つずつ選べ。



① **11-B-2**

A組 4人の選手と B組 3人の選手の 100 m 走のタイムを測定した。A組 4人の選手のタイムは、それぞれ 12.5, 12.0, 14.0, 13.5 (単位は秒)であった。また、B組 3人の選手のタイムの平均値はちょうど 14.0 秒、分散はちょうど 1.50 であった。

以下、計算結果の小数表示では、指定された桁 (けた) 数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合は、指定された桁まで 0 にマークすること。

(1) A組と B組を合わせた 7人の選手のタイムを変量  $x$  とする。変量  $y$  を  $y = x - 14.0$

としたとき、変量  $y$  の平均値は  $\text{アイ}$    $\cdot$   $\text{ウエ}$   秒であり、もとの変量  $x$  の平均

値は  $\text{オカ}$    $\cdot$   $\text{キク}$   秒である。また、変量  $y$  の分散は  $\text{ケ}$    $\cdot$   $\text{コサ}$   であり、

もとの変量  $x$  の分散は  $\text{シ}$    $\cdot$   $\text{スセ}$   である。

(2) B組 3人の選手の中の 1人の選手のタイムは、ちょうど 14.0 秒であることがわかったとする。このとき、他の 2人の選手のタイムは、速く走った方から順に、

$\text{ソタ}$    $\cdot$   $\text{チ}$   秒と  $\text{ツテ}$    $\cdot$   $\text{ト}$   秒である。

さらに、B組 3人の選手の体重が、速く走った選手から順に、57.0, 54.0, 60.0 (単位は kg) であるとき、選手の体重と 100 m 走のタイムの相関係数は  $\text{ナ}$    $\cdot$   $\text{ニヌ}$

となる。