週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

1　次の式を因数分解せよ。

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-84$$

解答　$(x-3)(x+5)(x^2+2x+4)$

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-84&=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-84\\&=\{(x^2+2x)-3\}\{(x^2+2x)-8\}-84\\&=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)-60\\&=\{(x^2+2x)-15\}\{(x^2+2x)+4\}\\&=(x-3)(x+5)(x^2+2x+4)\end{aligned}$$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2+5xy+2y^2+5x+y-3$

(2)　$6x^2-7ax+2a^2-6x+5a-12$

解答　(1)　$(x+2y+3)(2x+y-1)$　　(2)　$(2x-a-4)(3x-2a+3)$

(1)　与式$=2x^2+(5y+5)x+(2y^2+y-3)$

$$\begin{aligned}&=2x^2+(5y+5)x+(y-1)(2y+3)\\&=\{x+(2y+3)\}\{2x+(y-1)\}\\&=(x+2y+3)(2x+y-1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}1 & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6\\ 2 & y-1 & \longrightarrow & y-1\\ \hline 2 & (y-1)(2y+3) & & 5y+5\end{array}$$

(2)　与式

$$\begin{aligned}&=6x^2+(-7a-6)x+(2a^2+5a-12)\\&=6x^2+(-7a-6)x+(a+4)(2a-3)\\&=\{2x-(a+4)\}\{3x-(2a-3)\}\\&=(2x-a-4)(3x-2a+3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}2 & -(a+4) & \longrightarrow & -3a-12\\ 3 & -(2a-3) & \longrightarrow & -4a+\ 6\\ \hline 6 & (a+4)(2a-3) & & -7a-\ 6\end{array}$$

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

(2)　$(a+b-c)(ab-bc-ca)+abc$

解答　(1)　$(a+b)(b+c)(c+a)$　　(2)　$-(a+b)(b-c)(c-a)$

(1)　与式$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+(b^2c+bc^2)$

$$\begin{aligned}&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

(2)　与式$=\{a+(b-c)\}\{(b-c)a-bc\}+abc$

$$\begin{aligned}&=(b-c)a^2-abc+(b-c)^2a-bc(b-c)+abc\\&=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}\\&=(b-c)(a+b)(a-c)\\&=-(a+b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

4　次の式を因数分解せよ。

$$x^4-7x^2+9$$

解答　$(x^2+x-3)(x^2-x-3)$

$$\begin{aligned} x^4-7x^2+9 &= (x^4-6x^2+9)-x^2=(x^2-3)^2-x^2 \\ &= \{(x^2-3)+x\}\{(x^2-3)-x\} \\ &= (x^2+x-3)(x^2-x-3) \end{aligned}$$

5　$\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

解答　$\dfrac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}} &= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}} \\ &= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12} \end{aligned}$$

6　$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　x^2y+xy^2　　(2)　x^3+y^3

解答　(1)　$\sqrt{5}$　　(2)　$2\sqrt{5}$

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

よって　$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}$，

$$xy=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1$$

(1)　$x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{5})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

別解　(2)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\cdot1=3$

よって

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= (x+y)\{(x^2+y^2)-xy\} \\ &= \sqrt{5}(3-1)=2\sqrt{5} \end{aligned}$$

7 次の式の 2 重根号をはずせ。

(1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　　(2) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

解答 (1) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

(1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot 2}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\cdot 3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

8 不等式 $|2x+1|\leqq|2x-1|+x$ を解け。

解答 $-2\leqq x\leqq 0$，$x\geqq 2$

[1] $x<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$|2x+1|=-(2x+1)$，$|2x-1|=-(2x-1)$ であるから

$-(2x+1)\leqq-(2x-1)+x$

すなわち　$-x\leqq 2$

よって　$x\geqq -2$

これと $x<-\dfrac{1}{2}$ の共通範囲を求めて

$-2\leqq x<-\dfrac{1}{2}$ ……①

[2] $-\dfrac{1}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}$ のとき

$|2x+1|=2x+1$，$|2x-1|=-(2x-1)$ であるから

$2x+1\leqq-(2x-1)+x$

すなわち　$3x\leqq 0$

よって　$x\leqq 0$

これと $-\dfrac{1}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}$ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ ……②

[3] $x\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$|2x+1|=2x+1$，$|2x-1|=2x-1$ であるから

$2x+1 \leqq 2x-1+x$

すなわち　$-x \leqq -2$

よって　$x \geqq 2$

これと $x \geqq \dfrac{1}{2}$ の共通範囲を求めて

$x \geqq 2$ ……③

したがって，解は①と②と③を合わせた範囲で

$-2 \leqq x \leqq 0$，$x \geqq 2$

9　$\sqrt{28+\sqrt{300}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とするとき，$\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{a-b-1}$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{4}{11}$

$$\sqrt{28+\sqrt{300}}=\sqrt{28+2\sqrt{75}}=\sqrt{(25+3)+2\sqrt{25\cdot 3}}$$
$$=\sqrt{25}+\sqrt{3}=5+\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$6<5+\sqrt{3}<7$

よって　$a=6$

したがって　$b=(5+\sqrt{3})-a=(5+\sqrt{3})-6$

$=\sqrt{3}-1$

よって

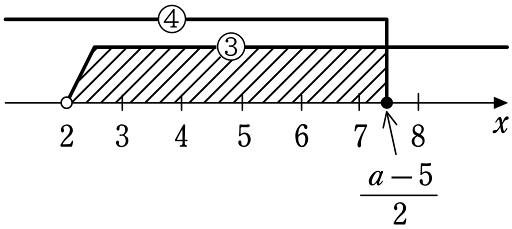
$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{a-b-1}$$
$$=\frac{1}{6+(\sqrt{3}-1)+1}+\frac{1}{6-(\sqrt{3}-1)-1}$$
$$=\frac{1}{6+\sqrt{3}}+\frac{1}{6-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{6-\sqrt{3}+6+\sqrt{3}}{(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{12}{6^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{12}{33}$$
$$=\frac{4}{11}$$

10　x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a \geqq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど5個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$19 \leqq a < 21$

$$\begin{cases} 7x-5>13-2x & \cdots\cdots ① \\ x+a \geqq 3x+5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　$9x>18$
よって　$x>2$　…… ③
② から　$x \leqq \dfrac{a-5}{2}$　…… ④
条件を満たすのは，③ と ④ を同時に満たす整数 x が 3，4，5，6，7 となるときであるから



$$7 \leqq \frac{a-5}{2} < 8 \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ の各辺に 2 を掛けて
$$14 \leqq a-5 < 16$$
各辺に 5 を加えて　$19 \leqq a < 21$

11 a を定数とするとき，不等式 $ax+4<2x+2a$ を解け。

解答　$a>2$ のとき $x<2$，$a=2$ のとき解なし，$a<2$ のとき $x>2$

$ax+4<2x+2a$
移項すると　$ax-2x<2a-4$
よって　$(a-2)x<2(a-2)$
[1]　$a-2>0$ すなわち $a>2$ のとき
両辺を正の数 $a-2$ で割って　$x<2$
[2]　$a-2=0$ すなわち $a=2$ のとき
与えられた不等式は $0 \cdot x<2 \cdot 0$ となり，これを満たす x の値はない。
よって，解はない。
[3]　$a-2<0$ すなわち $a<2$ のとき
両辺を負の数 $a-2$ で割って　$x>2$

12 整数を要素とする 2 つの集合 A，B を $A=\{2,\ 5,\ a^2\}$，$B=\{4,\ a-1,\ a+b,\ 9\}$ とするとき，$A \cap B=\{5,\ 9\}$ となるような定数 a，b の値を求めよ。また，$A \cup B$ を求めよ。

解答　$a=-3$，$b=8$，$A \cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9\}$

$A \cap B=\{5,\ 9\}$ より $9 \in A$ であるから　$a^2=9$　…… ①
同様に $5 \in B$ であるから　$a-1=5$　…… ②
または　$a+b=5$　…… ③
① から　$a=\pm 3$
これらは ② を満たさない。
$a=3$ のとき，③ から　$b=2$
このとき $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ 2,\ 5,\ 9\}$ であるから，$2 \in A \cap B$ となり不適。
$a=-3$ のとき，③ から　$b=8$
このとき $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ -4,\ 5,\ 9\}$ となり，適する。

よって　$a=-3$，$b=8$

また　$A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9\}$

13 a，b は実数とする。次の $\boxed{}$ 内に，必要，十分，必要十分のうち最も適するものを入れよ。

(1)　$a+b>0$ は $a>0$ かつ $b>0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2)　$a>2$ は $a^2\fallingdotseq 1$ であるための $\boxed{}$ 条件

解答　(1)　必要　　(2)　十分

(1)　$a+b>0 \Longrightarrow a>0$ かつ $b>0$ について

これは偽。　反例は　$a=2,\ b=-1$

$a>0$ かつ $b>0 \Longrightarrow a+b>0$ について

これは，明らかに真。

したがって　　必要

(2)　$a>2 \Longrightarrow a^2\fallingdotseq 1$ について

$a>2$ のとき $a^2>4$ であるから真。

$a^2\fallingdotseq 1 \Longrightarrow a>2$ について

これは偽。　反例は　$a=0$

したがって　　十分

14 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1)　すべての素数 n について，n は奇数である。

(2)　ある実数 x について　$x^2\leqq 0$

解答　(1)　否定「ある素数 n について，n は偶数である。」；
もとの命題は 偽，否定は 真

(2)　否定「すべての実数 x について　$x^2>0$」；
もとの命題は 真，否定は 偽

(1)　否定は　「ある素数 n について，n は偶数である。」

2 は素数であり，かつ偶数であるから，否定は真である。

否定が真であるから，もとの命題は偽である。

(2)　否定は　「すべての実数 x について　$x^2>0$」

$x=0$ のとき $x^2=0$ となるから，否定は偽である。

否定が偽であるから，もとの命題は真である。

15　x，y は実数とする。次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ。
（元の命題の真偽は不要）
(1)　$x=-1 \Longrightarrow x^2=1$
(2)　$x+y=5 \Longrightarrow x=3$ かつ $y=2$

解答　(1)　逆「$x^2=1 \Longrightarrow x=-1$」，偽
(2)　逆「$x=3$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=5$」，真

(1)　逆は　「$x^2=1 \Longrightarrow x=-1$」
$x=1$ のとき，$x^2=1$ であるが，$x=-1$ でない。
よって，逆は偽。
(2)　逆は　「$x=3$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=5$」
逆は真。

16　【おみやげ問題】
表面にアルファベットが，裏面には自然数が書かれている 5 枚のカードが，次のように置かれている。　$\boxed{\mathrm{P}}$　$\boxed{\mathrm{Q}}$　$\boxed{1}$　$\boxed{3}$　$\boxed{6}$
これら 5 枚のカードに対する命題「表面がアルファベット P ならば，裏面は素数である」の真偽を調べるために，できるだけ少ない枚数のカードを裏返して確認したい。左から n 番目の位置にあるカードを裏返す必要のあるときには $a_n=1$，必要のないときには $a_n=0$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k 2^{k-1}=\boxed{}$ である。　（2022　早稲田大学）

解答　21

命題「表面がアルファベット P ならば，裏面は素数である」　…… ① の真偽を確かめるために，左から 1 番目のカードは裏返して確認する必要がある。
また，命題 ① の対偶
「裏面が素数でないならば，表面はアルファベット P でない」　…… ② の真偽と命題 ① の真偽は一致するから，命題 ② の真偽を調べる必要がある。
命題 ② の真偽を調べるために，左から 3 番目と 5 番目のカードを裏返して確かめる必要がある。
ゆえに　$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=0$，$a_5=1$
したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k 2^{k-1}=a_1\cdot 2^0+a_2\cdot 2^1+a_3\cdot 2^2+a_4\cdot 2^3+a_5\cdot 2^4$
$=1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 8+1\cdot 16=21$